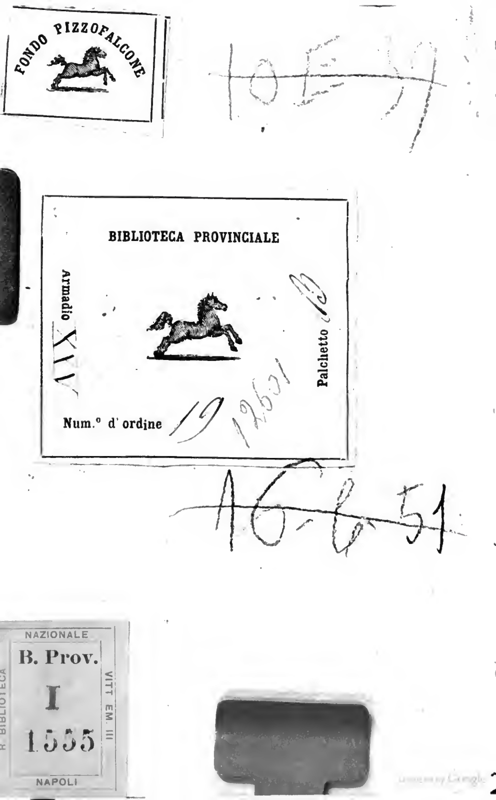




# ASTRONOMIE

## PRATIQUE.



*On trouve aussi chez le même Libraire les Ouvrages suivans du même Auteur.*

COURS COMPLET DE MATHÉMATIQUES PURES, dédié à S. M. Alexandre Ier, Empereur de toutes les Russies; Ouvrage destiné aux Élèves des Écoles Normale et Polytechnique, et aux Candidats qui se disposent à y être admis; 3e édit., revue et considérablement augmentée. 2 vol. in-8, avec pl., 1828. 15 fr.

ÉLÉMENS DE STATIQUE, in-8., 3 fr.

TRAITÉ ÉLÉMENTAIRE DE MÉCANIQUE, cinquième édit., in-8., 1825, 7 fr. 50 c.

URANOGRAPHIE, ou Traité élémentaire d'Astronomie, à l'usage des personnes peu versées dans les Mathématiques, des Géographes, des Marins, des Ingénieurs, accompagnée de Planisphères; 4e édition, revue et considérablement augmentée. 1 vol. in-8., 1828, avec pl., 9 fr. 50 c.

LA GONIOMÉTRIE, ou l'Art de tracer sur le papier des Angles dont la graduation est connue, et d'évaluer le nombre de degrés d'un Angle déjà tracé, accompagnée d'une Table des Cordes de 1 à 10,000. Brochure in-8., fig. 1 fr. 25 c.

ENSEIGNEMENT DU DESSIN LINÉAIRE, d'après une méthode applicable à toutes les Écoles primaires, quel que soit le mode d'instruction qu'on y suit; deuxième édition, 1827. 1 vol. in 8., et atlas in-folio, 7 fr.

*Se trouve aussi à Bordeaux*

CHEZ GASSIOT FILS AINÉ, LIBRAIRE,
FOSSÉS DE L'INTENDANCE, N° 61.

IMPRIMERIE DE HUZARD-COURCIER,
rue du Jardinet, n° 12.

# ASTRONOMIE

## PRATIQUE.

### USAGE ET COMPOSITION

DE LA

## CONNAISSANCE DES TEMS.

OUVRAGE DESTINÉ AUX ASTRONOMES, AUX MARINS ET AUX INGÉNIEURS;

**PAR L.-B. FRANCOEUR,**

Professeur de la Faculté des Sciences de Paris et du Collége Charlemagne; Chevalier de l'Ordre royal de la Légion-d'Honneur; Officier de l'Université; ex-Examinateur des Candidats de l'École Polytechnique; des Sociétés Philomatique, d'Encouragement, etc.; Membre honoraire du Département de la Marine russe; des Académies de Saint-Pétersbourg, Rouen, Lyon, Cambrai, Toulouse, etc.




PARIS,

BACHELIER, LIBRAIRE POUR LES SCIENCES,

QUAI DES AUGUSTINS, N° 55.

ET A BRUXELLES,

A LA LIBRAIRIE PARISIENNE, RUE DE LA MADELEINE, N° 438.

1830

A Monsieur

LE CHEVALIER **SCHUMACHER**,

Professeur

ET CONSEILLER D'ÉTAT DE S. M. LE ROI DE DANNEMARCK,

à Altona.

Monsieur,

*L'hommage que j'ai l'honneur de vous adresser est bien dû au célèbre professeur dont les utiles publications entretiennent en Europe le goût de l'Astronomie, et fournissent aux savans d'heureuses occasions de*

*connaître mutuellement leurs découvertes. Vous avez, Monsieur, daigné permettre cette Dédicace; recevez les témoignages de ma reconnaissance pour un suffrage qui me donne lieu d'espérer que j'obtiendrai aussi celui des Astronomes et des Navigateurs.*

*Veuillez agréer, Monsieur le Professeur, l'expression de ma haute considération,*

Francoeur.

Ce 20 mars 1830.

Il existe plusieurs excellens traités d'Astronomie, tels sont ceux de Laplace, Delambre, Lalande, Schubert, M. Biot, etc.; mais il m'a paru que ces ouvrages avaient plus spécialement pour but la théorie que la pratique de la science, et que, lorsqu'on voulait en venir à l'application des formules, on devait être arrêté par des difficultés. En effet, l'Astronomie est la science où l'on rencontre de plus fréquentes occasions de faire des calculs longs et compliqués. C'est dans la *Connaissance des Tems* que le calculateur prend ordinairement une partie des données de ses problèmes; et s'il ne s'en fie pas aux prédictions contenues dans cet ouvrage, il doit recourir aux tables astronomiques, précaution qui est indispensable dans tous les cas importans et délicats. Il faut donc qu'il ait une parfaite connaissance de la formation de ces tables, de la manière dont on en tire les nombres des éphémérides, de l'emploi de ces nombres, des précautions qu'il faut prendre pour être assuré qu'on ne néglige aucune des conditions de la question, etc.

J'ai cru qu'il était utile de composer un traité qui eût spécialement pour but l'application des formules et des éphémérides aux problèmes d'Astronomie usuelle; et quoique la troisième partie de l'*Uranographie* puisse, jusqu'à un certain point, suppléer à ce travail, il m'a semblé qu'elle n'avait pu recevoir tous les développemens convenables pour atteindre ce but. Le présent ouvrage, conçu pour cet objet spécial, ne me paraît laisser aucune cause d'erreur ou d'omission dans les applications qu'on voudra faire des formules astronomiques.

La *Connaissance des Tems* est un ouvrage sous forme de calendrier astronomique; il est publié chaque année, deux ou trois ans d'avance, par les soins du Bureau des Longitudes de France. On y trouve les positions du Soleil, de la Lune et des planètes, ainsi que celles des principales étoiles, à certaines époques périodiques, pour mettre les astronomes, les ingénieurs, les marins et toutes les personnes qui observent le ciel,

à même de résoudre les problèmes qui s'offrent fréquemment à eux, et leur épargner l'ennui de recourir aux tables astronomiques, d'où ces nombres sont extraits par des calculateurs spécialement chargés de ces travaux.

Cet ouvrage, qui a servi de modèle à toutes les Éphémérides publiées en différens pays, fut composé pour la première fois, en 1679, par Picard, le fondateur de l'Astronomie en France. Picard continua cette publication chaque année, jusqu'en 1685, que Lefebvre en fut chargé par l'Académie des Sciences. En 1702, Lieutaud succéda à ce dernier, à qui l'on retira le privilége, et qu'on raya même de la liste des membres de l'Académie, par suite d'une querelle qu'il eut avec Lahire. (*V.* l'*Hist. de l'Astr. moderne,* par Delambre, t. II, p. 683.)

Lieutaud continua la *Connaissance des Tems* jusqu'en 1729; en 1730, elle fut composée par Godin, jusqu'en 1734, époque où ce savant partit avec les académiciens chargés de mesurer, au Pérou, un arc du méridien terrestre. Maraldi composa cet ouvrage depuis 1735 jusqu'en 1759. En 1760, Lalande l'entreprit, et lui donna la forme qu'il a à peu près conservée depuis. Il y ajouta des tables et des observations astronomiques, des dissertations, enfin, il en fit des espèces d'annales; il emprunta au *Nautical Almanac* l'usage d'indiquer les distances de la Lune au Soleil et aux principales étoiles, pour trouver la longitude en mer. Lalande composa la *Connaissance des Tems* jusqu'en 1775. Jeaurat lui succéda depuis 1776 jusqu'en 1787. Méchain fut chargé de cette publication depuis 1788 jusqu'à 1794. Enfin, le Bureau des Longitudes fut créé par une loi le 25 juin 1795, sur le rapport de l'abbé Grégoire. Cette illustre assemblée fut chargé de composer cet ouvrage, et, depuis cette époque, il paraît sous sa surveillance.

Beaucoup d'autres Éphémérides ont paru en divers temps; on en a pour l'an 1442: mais le plus ancien de ces ouvrages, qu'on ait publié avec régularité, est celui de Regiomontanus, pour 1475, imprimé à Nuremberg l'année d'avant. On y trouve diverses prédictions d'éclipses, le lieu des planètes, etc., depuis 1475 jusqu'à 1531.

Les Éphémérides de Stoffler parurent en 1482, et furent étendues jusqu'en 1550; celles de Stadius allèrent de 1554 à 1606; celles de Leovitius de 1556 à 1606; celles d'Origan de 1595 à 1654; celles d'Argoli, imprimées à Rome, vont de 1621 à 1700; enfin, les Éphémérides de Képler, de 1617 à 1636, firent époque dans ce genre de productions, par le soin qu'y apporta leur illustre auteur. Celles de Malvasia, imprimées à Modène en 1662, s'étendent de 1661 à 1666. Duret de Montbrisson fut le premier Français qui se livra à ces calculs; ses Éphémérides vont de 1637 jusqu'à 1700.

Lahire fils continua celles d'Argoli en 1701, 1702 et 1703. Desforges, sous le nom de Beaulieu, en calcula d'autres de 1701 à 1714; elles furent continuées par Desplaces de 1715 à 1744, en trois volumes, de dix ans chaque. La Caille donna le 4ᵉ, le 5ᵉ et le 6ᵉ volume, de 1745 à 1774, et Lalande le 7ᵉ et le 8ᵉ, de 1775 à 1792.

Ce n'est qu'en 1767 que commença à paraître, en Angleterre, le *Nautical Almanac*, rédigé sous la direction du célèbre Maskelyne.

L'institut de Bologne imita aussi nos savans; Manfredi publia des Éphémérides de 1715 à 1750, qui furent continuées, jusqu'en 1786, par Zanotti.

Les Éphémérides astronomiques du père Hell furent publiées à Vienne, chaque année, depuis 1754.

L'Académie de Berlin en publie de pareilles. C'est en 1776 que Lambert les a fondées; depuis, M. Bode les a rédigées: c'est actuellement M. Encke qui est chargé de ce soin, dont il s'acquitte avec un talent et une correction dignes d'être pris pour modèle. Le 56ᵉ vol. est pour l'an 1831.

Reggio et Cesaris, à Milan, donnent, depuis 1775, des Éphémérides astronomiques, que continuent MM. Oriani et Carlini.

Depuis quelques années, M. Schumacher en publie qui sont très exactes et conçues sur un plan excellent, pour le service de la marine danoise.

On trouve, dans la *Connaissance des Tems*, l'annonce des éclipses et autres phénomènes célestes qu'il importe aux as-

tronomes de prévoir et d'observer. C'est surtout aux marins que cet ouvrage est destiné, pour leur fournir les élémens des calculs nécessaires à la résolution des problèmes de navigation. Ces problèmes sont principalement la détermination du lieu où se trouve transporté un navire, savoir, la longitude et la latitude du vaisseau, l'heure sous le méridien où il est, la déclinaison de l'aiguille aimantée, les levers et couchers des astres, les relèvemens astronomiques des points remarquables d'une côte, enfin, l'heure de la pleine mer.

On conçoit qu'il serait très pénible au marin, livré aux travaux et aux dangers des élémens, d'être obligé de recourir aux tables astronomiques pour calculer les positions des corps célestes qu'il a observés. D'ailleurs, le calculateur pourrait craindre les erreurs des opérations numériques, erreurs si faciles à commettre au milieu de tant de soins divers, et de la part d'officiers qui ne sauraient avoir l'exercice des tables au même degré que des personnes qui n'ont, pour ainsi dire, pas d'autre occupation, qui en ont bien étudié et bien compris toutes les difficultés, et qui font ces calculs contradictoirement, pour les vérifier par comparaison. Il faut encore remarquer qu'il est bien plus facile, et moins sujet à erreur, de chercher ces résultats consécutivement et pour des époques périodiques, que d'en obtenir d'isolés; d'ailleurs, plusieurs de ces nombres pouvant se déduire d'autres déjà trouvés, il est préférable de recourir à ces procédés plus faciles et plus simples, plutôt que de chercher directement ces résultats numériques.

L'*Annuaire*, ou calendrier, où ces résultats sont enregistrés, est terminé par une explication très claire de l'usage qu'on en peut faire. Mais il m'a semblé que cette partie, suffisante pour les hommes exercés à l'Astronomie, n'était pas assez développée pour ceux qui n'en font, pour ainsi dire, qu'un usage accidentel ; qu'il pouvait être avantageux à ces derniers de voir ces nombres combinés entre eux, selon les règles de la science, et introduits dans des problèmes du genre de ceux qu'ils rencontrent le plus souvent, afin qu'ils aient

sous les yeux des types de calcul qui, imités sur les exemples qu'ils doivent traiter, ne laissent place à aucune erreur vraisemblable. Les exemples, presque tous tirés de l'année courante, 1830; n'exigent, pour être exécutés, que l'usage d'un seul volume de la *Connaissance des Tems;* et les types de calcul sont tellement disposés, que, dans chaque question particulière, on n'éprouve d'autre embarras que de substituer aux nombres cités ici ceux qui se rapportent aux circonstances où l'on se trouve.

Je me suis parfois permis de désirer des améliorations dans la rédaction de la *Connaissance des Tems*. Les nations étrangères ont aussi leurs Éphémérides à l'usage de leurs marins et de leurs astronomes. Le *Nautical Almanac,* les Tables astronomiques de M. Schumacher, les Éphémérides de Berlin, de Milan, etc., contiennent des documens qu'il serait bon de voir introduits dans la *Connaissance des Tems;* leurs résultats numériques sont aussi plus approchés. Les réclamations des savans français ont été entendues; déjà cette publication a reçu plus de correction dans les calculs et dans la partie typographique: d'autres changemens ne se feront pas long-temps attendre. Depuis que la majeure partie du présent ouvrage est imprimée, le Bureau des Longitudes a pris une décision qui étend beaucoup l'usage de la *Connaissance des Tems*. Ce livre était principalement destiné, par les législateurs, aux calculs de la navigation. Les savans d'un mérite éminent qui composent le Bureau des Longitudes n'ont pas voulu qu'une œuvre qui paraît sous leurs auspices, et avec leur approbation formelle, fût au-dessous de celles que les étrangers font paraître; ils ont ordonné des modifications qui rendront cette publication utile aux astronomes de tous les pays. Déjà les étrangers l'ont appelée *le trésor des astronomes;* les perfectionnemens qu'on y doit apporter lui mériteront de plus en plus ce titre, et rendront superflus les vœux que j'ai formés en plusieurs endroits de mon livre. Ces souhaits, devenus inutiles, me seront pardonnés par les savans auteurs de la *Connaissance des Tems*, pour lesquels je professe la plus haute estime, et dont j'admire, avec l'Eu-

rope, les talens distingués; et l'amitié dont plusieurs m'honorent me fait penser qu'ils apprécient assez bien mes sentimens, pour ne voir dans les vœux que j'ai exprimés que l'intérêt de la science.

Mon ouvrage est divisé en trois parties. La première est destinée à indiquer la signification des termes usités dans la *Connaissance des Tems*, le sens qu'il faut rattacher à chacun des nombres qui s'y trouvent, et les moyens d'en vérifier l'exactitude. Les matières y sont exposées dans l'ordre même où le lecteur les trouve classées dans cet annuaire astronomique.

La seconde partie comprend la théorie des principaux problèmes d'Astronomie que doit résoudre le navigateur, ou celui qui observe le ciel. Cette partie doit être étudiée avec soin, parce qu'elle renferme la plupart des choses qu'il importe de savoir sur ce sujet, et montre comment on doit gouverner les calculs.

On ne tire des tables astronomiques que plusieurs des nombres qu'on lit dans la *Connaissance des Tems*, et les autres s'en déduisent par des calculs dont nous avons exposé les règles dans la première partie; mais il nous restait à montrer comment on peut obtenir ceux-là, c'est-à-dire à donner la forme et l'usage des tables astronomiques : c'est ce qui se trouve dans la troisième partie.



# TABLE

# DES MATIÈRES.

*Introduction relative à quelques propositions préliminaires.* Formules de Trigonométrie, p. 1. Quelques particularités sur les étoiles, p. 9. Opérations numériques, p. 16.

## PREMIÈRE PARTIE.

### *Nombres donnés dans la* Connaissance des Tems, *leur signification et leur usage*, p. 25.

Lever et coucher du Soleil et de la Lune, p. 28. Longitude du Soleil, p. 31.

Calcul de l'ascension droite et de la déclinaison du Soleil, p. 39. Équation du temps, p. 45.

Longitude et latitude de la Lune, p. 49. Passage de cet astre au méridien, p. 55.

Parallaxe horizontale et demi-diamètre de la Lune, p. 56. Augmentation de ce diamètre avec la hauteur, p. 59.

Position des planètes, heures du lever et du coucher, p. 64.

Demi-diamètre du Soleil, p. 66. Mouvement horaire, distance et parallaxe de cet astre, p. 67. Longitude du nœud ascendant de la Lune, p. 68.

Éclipses et configurations des satellites de Jupiter, p. 68.

Distances de la Lune au Soleil et aux étoiles, p. 76.

Phénomènes célestes et observations, p. 79.

Réfractions astronomiques, p. 83.
Différences logarithmiques et tables pour les interpolations, p. 86.
Tables pour réduire le temps en degrés, et réciproquement, p. 86.
Accélération des étoiles et marche du Soleil moyen en ascension droite, p. 87.
Catalogue d'étoiles, calcul de la nutation et de l'aberration, p. 89.
Positions géographiques, p. 93.
Obliquité de l'écliptique, p. 94.
Méthode d'interpolation, p. 97. Phases lunaires, p. 107.
Figure du globe terrestre, p. 109.
Parallaxes de hauteur, d'ascension droite et de déclinaison, de longitude et de latitude, p. 116.

## SECONDE PARTIE.

### *Problèmes d'Astronomie.*

Mesure du temps, p. 143. Calcul de l'asc. dr. du Soleil moyen, p. 144. Conversion des trois espèces de temps l'une en l'autre, p. 150.
Sur les passages au méridien, p. 155. De la lunette méridienne, p. 162. Rectification de la pendule, p. 166.
Des angles horaires, p. 172. Trouver l'heure par la hauteur absolue d'un astre, p. 175; et réciproquement, p. 184.
Des hauteurs correspondantes, p. 186.
Détermination de la latitude du lieu, p. 195. Autres procédés, p. 214.
Moyen de régler les chronomètres, et leur usage pour trouver la longitude du lieu, p. 237. Autres procédés par les distances lunaires, p. 247. Par des feux terrestres, p. 258. Par le lock et la boussole, p. 260. Par une triangulation, p. 260. Par le passage de la Lune au méridien, p. 261. Méthode du capitaine Grant par les culminations d'étoiles et de la Lune, p. 265. De MM. Nicolaï et Baily, p. 268.
Des prédictions d'éclipses de Lune, p. 280. De Soleil, p. 290. Occultations d'étoiles, p. 303.
Détermination des longitudes géographiques par les éclipses de Lune ou de satellites, p. 307. Par les éclipses de Soleil, p. 310. Par les occultations d'étoiles, p. 320. Corrections des tables lunaires, p. 317 et 324.

Lever, coucher et amplitude des astres, p. 327. Azimuth, p. 336. Déclinaison de l'aiguille aimantée, p. 340. Relèvemens, p. 354.

Des marées, p. 362. Heures de la haute mer, p. 365. Hauteur à laquelle s'élève la mer, p. 375.

## TROISIÈME PARTIE.

### *Construction et usage des tables astronomiques.*

Tables du Soleil, p. 379. Tables de la Lune, p. 392. Tables des planètes, p. 397.

Manière de réduire les formules en tables, p. 406. Équations de condition, p. 412. Méthode de Tobie Mayer, p. 422. Méthode des moindres carrés, p. 424.

Détermination de l'obliquité de l'écliptique, des solstices et des équinoxes, p. 431.

Précession des équinoxes, p. 445.

Calcul de la nutation, p. 453. De l'aberration, p. 461.

Ascension droite du Soleil moyen, p. 466.

Explication relative aux tables qui terminent l'ouvrage, p. 470.

TABLES I et II. Accélération des fixes.

III. Ascension droite du Soleil moyen.

IV. Nutation lunaire et solaire.

V et VI. Réfraction.

VII. Catalogue de 50 étoiles, et tables de nutation et d'aberration.

VIII. Fractions de l'année.

IX. Augmentation du demi-diamètre lunaire.

X. Réduction au méridien.

XI. Valeurs de *n* pour la lunette méridienne.

XII. Parallaxe du Soleil pour toutes les hauteurs de cet astre.

XIII. Correction pour l'heure de la haute mer.

XIV. Table du Soleil.

XV. Table de la Lune.

XVI. Table des planètes.

XVII. Mouvemens moyens des planètes.

## *Errata.*

Page 27, ligne 23, n° 262, *lisez* n° 259
56, 14, n° 120, *lisez* n° 185
57, 6 en remontant, n° 95, *lisez* n° 94
90, 2, n° 308, *lisez* n° 311
*102, à la formule (16), t', *lisez* t
132, ligne 1, n° 110, *lisez* n° 109
158, 3, table II, *lisez* table I
168, 3 et 4, nos 215 et 223, *lisez* nos 225 et 230
177, 24, sin... 9.4106019, *lisez* 9.4103648, ce qui altère un peu le résultat du calcul.
205, 20, avance, *lisez* retarde
206, 8, retard, *lisez* avance
212, table XIV, *lisez* table X
388, 13, n° 308, *lisez* 323
399, 2, au lieu de sin z, on a employé cos z, ce qui rend les calculs suivans défectueux
414, 11, n° 308, *lisez* 323

# ASTRONOMIE

# PRATIQUE.

## INTRODUCTION

RELATIVE A QUELQUES PROPOSITIONS PRÉLIMINAIRES.

### *Formules de Trigonométrie.*

Le fréquent usage que nous ferons par la suite des formules trigonométriques nous détermine à en présenter la récapitulation. Quant aux démonstrations de ces formules, nous renvoyons à cet égard aux traités spéciaux, et particulièrement à notre *Cours de Mathématiques pures*, t. I, p. 361, etc., 3e édition, où elles sont toutes exposées.

*Le rayon étant un*, on a les équations suivantes :

$$\sin(A \pm B) = \sin A \cos B \pm \sin B \cos A, \qquad (1)$$

$$\cos(A \pm B) = \cos A \cos B \mp \sin A \sin B, \qquad (2)$$

$$\sin 2A = 2 \sin A \cos A, \qquad (3)$$

$$\cos 2A = 2\cos^2 A - 1 = 1 - 2\sin^2 A, \qquad (4)$$

$$2\cos^2 \tfrac{1}{2} A = 1 + \cos A, \qquad (5)$$

$$2\sin^2 \tfrac{1}{2} A = 1 - \cos A, \qquad (6)$$

$$\text{tang}(A \pm B) = \frac{\text{tang}\, A \pm \text{tang}\, B}{1 \mp \text{tang}\, A\, \text{tang}\, B}, \qquad (7)$$

$$\text{tang}\, \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left(\frac{1-\cos A}{1+\cos A}\right)} = \frac{1-\cos A}{\sin A} = \frac{\sin A}{1+\cos A}, \qquad (8)$$

$$\sin A \pm \sin B = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A \pm B) \cos \tfrac{1}{2}(A \mp B), \tag{9}$$

$$\cos A + \cos B = 2 \cos \tfrac{1}{2}(A + B) \cos \tfrac{1}{2}(A - B), \tag{10}$$

$$\cos B - \cos A = 2 \sin \tfrac{1}{2}(A + B) \sin \tfrac{1}{2}(A - B), \tag{11}$$

$$\sin^2 A - \sin^2 B = \sin (A + B) \times \sin (A - B), \tag{12}$$

$$\cos^2 A - \sin^2 B = \cos (A + B) \times \cos (A - B), \tag{13}$$

$$\operatorname{tang} A \pm \operatorname{tang} B = \frac{\sin (A \pm B)}{\cos A \cos B}, \tag{14}$$

$$\cot A \pm \cot B = \frac{\sin (B \pm A)}{\sin A \sin B}, \tag{15}$$

$$\frac{\sin A + \sin B}{\sin A - \sin B} = \frac{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B)}{\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B)}. \tag{16}$$

$$1 \pm \sin A = 2 \sin^2 (45^\circ \pm \tfrac{1}{2} A), \tag{17}$$

$$\frac{1 \pm \sin A}{1 \mp \sin A} = \operatorname{tang}^2 (45^\circ \pm \tfrac{1}{2} A), \tag{18}$$

$$\frac{1 \pm \sin A}{\cos A} = \operatorname{tang} (45^\circ \pm \tfrac{1}{2} A), \tag{19}$$

$$\frac{1 + \cos A}{1 - \cos A} = \cot^2 \tfrac{1}{2} A, \tag{20}$$

$$\frac{1 - \sin A}{1 - \cos A} = \frac{\sin^2 (45^\circ - \frac{1}{2} A)}{\sin^2 \frac{1}{2} A}, \tag{21}$$

$$\frac{1 + \sin B}{1 + \cos A} = \frac{\sin^2 (45^\circ + \frac{1}{2} B)}{\cos^2 \frac{1}{2} A}. \tag{22}$$

Ces dernières équ. servent principalement à transformer les expressions, pour les rendre propres au calcul logarithmique, parce qu'elles remplacent des sommes et différences par des produits et quotiens.

En désignant par $\pi$ la demi-circonférence dont le rayon est un, ou le *rapport de la circonférence au diamètre,* on a

$$\pi = 3,14159\ 26536, \quad \log \pi = 0,49714\ 98727.$$

Soit M le *module* ou le log. tabulaire de la base *e* des log. népériens, ou enfin le facteur constant qui, multipliant ces log.,

les change en ceux dont la base est 10, on a

$$M = 0,43429\ 44819,\quad \log M = \bar{1},63778\ 43113,$$

$$\log(1+z) = M(z - \tfrac{1}{2}z^2 + \tfrac{1}{3}z^3 - \tfrac{1}{4}z^4 \ldots.), \qquad (23)$$

$$\sin A = A - \frac{A^3}{2.3} + \frac{A^5}{2.3.4.5} - \text{etc.}, \qquad (24)$$

$$\cos A = 1 - \frac{A^2}{2} + \frac{A^4}{2.3.4} - \frac{A^6}{2\ldots6} + \text{etc.}$$

Soit pris un arc de longueur $a$ dans le cercle dont le rayon est R; si $(a'')$ est le nombre de secondes de cet arc, on a

$$R(a'') = \mu a,\quad \mu = \frac{648000''}{\pi} = \frac{1}{\sin 1''}, \qquad (25)$$

$$\log\mu = 5,31442\ 5133,\quad \text{compl.} = \bar{6},68557\ 4867 = \log\sin 1'';$$

en sorte que, *dans une formule algébrique où le rayon est pris* $= 1$, *et où entre un arc exprimé par sa longueur* a, *pour remplacer cet arc par son nombre de secondes, il suffit d'y substituer* a *sin* 1″ *pour* a, et $a$ désigne alors le nombre de secondes de l'arc dont $a$ était la longueur.

La *résolution des triangles rectilignes* est renfermée dans les formules suivantes; A, B, C sont les trois angles, $a$, $b$, $c$, les longueurs des côtés qui leur sont respectivement opposés; le rayon des tables est $= 1$.

1°. Si le triangle est rectangle, A étant l'angle droit, et $a$ l'hypoténuse,

$$\left.\begin{aligned} b &= a\cos C,\\ c &= b\,\text{tang}\,C,\\ a^2 &= b^2 + c^2; \end{aligned}\right\} \qquad (26)$$

2°. Si les angles sont quelconques,

$$\frac{\sin A}{a} = \frac{\sin B}{b} = \frac{\sin C}{c}, \qquad (27)$$

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \qquad (28)$$

$$a = \frac{b-c}{\cos\varphi},\quad \text{tang}\,\varphi = \frac{2\sin\frac{1}{2}A}{b-c}\sqrt{(bc)}, \qquad (29)$$

$$\left.\begin{array}{l} \text{tang}\, n = \dfrac{c-b}{c+b} \cot \frac{1}{2} A, \\ \frac{1}{2}(C+B) = m, \quad \frac{1}{2}(C-B) = n, \end{array}\right\} \quad (30)$$

$$\sin \tfrac{1}{2} A = \sqrt{\left[\frac{(p-b)(p-c)}{bc}\right]}, \quad 2p = a + b + c. \quad (31)$$

Imaginons des rayons visuels dirigés vers trois astres; ces lignes détermineront trois plans, ou un trièdre, dans l'espace, qui coupera en trois arcs la surface d'une sphère de rayon arbitraire, qui aurait son centre à l'œil du spectateur. Les trois points de rencontre de nos arètes avec la surface, ou les trois faces du trièdre, déterminent donc un triangle sphérique ABC (fig. 1), par leurs intersections avec la surface. Or, la plupart des problèmes que nous aurons à résoudre par la suite consistent à trouver certaines parties de ce triangle, lorsqu'on en connait trois. En effet, trois de ces parties suffisent, comme on sait, pour lier ensemble les trois points de l'espace ou les trois faces du trièdre. Ces problèmes trouvent leurs solutions dans les règles de la Trigonométrie. Voici les formules principales qu'on déduit de cette branche de l'analyse. (*V.* mon *Cours de Math. pures,* tome II, page 200.)

Désignons par A, B, C les trois angles d'un triangle sphérique (fig. 1); par $a$, $b$, $c$ les côtés qui leur sont opposés respectivement; on a

$$\frac{\sin A}{\sin a} = \frac{\sin B}{\sin b} = \frac{\sin C}{\sin c}, \quad (32)$$

ou *les sinus des angles, proportionnels aux sinus des côtés opposés.* C'est ce qu'on appelle l'*équation des quatre sinus.*

Le rayon étant un, on a cette équ. fondamentale,

$$\cos c = \cos a \cos b + \sin a \sin b \cos C, \quad (33)$$
$$= \cos (a-b) - 2 \sin a \sin b \sin^2 \tfrac{1}{2} C. \quad (34)$$

On a encore les formules

$$\cos C = \sin A \sin B \cos c - \cos A \cos B, \quad (35)$$
$$\sin a \cos c = \sin c \cos a \cos B + \sin b \cos C, \quad (36)$$
$$\sin a \cot c = \cos a \cos B + \sin B \cot C, \quad (37)$$
$$\sin a \cos B = \sin c \cos b - \sin b \cos c \cos A. \quad (38)$$

Il est inutile de dire que chacune de ces équ. en représente trois, qu'on trouve par un simple changement de lettres; par ex.,

$$\cos a = \cos b \cos c + \sin b \sin c \cos A,$$

et de même pour les autres.

Les équations suivantes servent *à résoudre tous les triangles sphériques rectangles;* A désigne l'angle droit, *a* l'hypoténuse (fig. 1).

| | |
|---|---|
| (*m*) ..... $\cos a = \cos b \cos c$, | (*q*) ..... $\text{tang}\, c = \text{tang}\, a \cos B$, |
| (*n*) ..... $\sin b = \sin a \sin B$, | (*r*) ..... $\cos B = \cos b \sin C$, |
| (*p*) ..... $\cos a = \cot B \cot C$, | (*s*) ..... $\cot B = \cot b \sin c$. |

On connaît dans le triangle ABC (fig. 1), outre l'angle droit A, deux des cinq autres élémens, et il faut choisir celle de ces équ. qui renferme ces données avec l'inconnue. Voici l'analyse des divers cas qui peuvent se présenter.

Les trois élémens (2 données et une inconnue) sont :

| | | | |
|---|---|---|---|
| L'hypoténuse *a* et | deux angles B, C; prenez l'équation | | (*p*) |
| | un angle B et | le côté *b* opposé | (*n*) |
| | | le côté *c* adjacent | (*q*) |
| | les trois côtés *a*, *b*, *c* | | (*m*) |
| Un côté *b* de l'angle droit et les angles B et C | | | (*r*) |
| Deux côtés *b*, *c* de l'angle droit et un angle B opposé | | | (*s*) |

On distribuera donc les lettres A, B, C aux sommets du triangle proposé, de manière qu'elles s'accordent avec les conditions énoncées dans ce tableau. Ces équ. suffisent pour résoudre tous les triangles sphériques rectangles; mais elles manqueraient de précision si l'inconnue était fort petite et donnée par un cos. ou par une cot.; ou bien si cette inconnue était voisine de 90°, et donnée par un sinus ou une tangente : on recourt alors aux équ. suivantes :

$$\text{tang}^2 \tfrac{1}{2} a = -\frac{\cos(B + C)}{\cos(B - C)},$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} B = \frac{\sin (a - c)}{\sin (a + c)},$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} c = \tang \tfrac{1}{2} (a + b) . \tang \tfrac{1}{2} (a - b),$$

$$\tang (45^\circ - \tfrac{1}{2} b) = \sqrt{\tang (45^\circ - x)}, \quad \tang x = \sin a \sin B,$$

$$\tang^2 \tfrac{1}{2} b = \tang \left(\frac{B - C}{2} + 45^\circ\right) \tang \left(\frac{B + C}{2} - 45^\circ\right).$$

*Résolution des triangles sphériques obliquangles.*

I. Étant donnés les trois côtés $a$, $b$, $c$, trouver l'un des angles? On emploie l'une des deux équ. suivantes,

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin (p - b) \sin (p - c)}{\sin b \sin c}, \qquad (39)$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin p . \sin (p - a)}{\sin b \sin c};$$

on a

$$2p = a + b + c.$$

II. Étant donnés deux côtés $a$, $b$ et l'angle compris C, 1°. trouver le 3$^e$ côté $c$? L'équation (33) se met sous la forme

$$\cos c = \cos a \cos b (1 + \tang a \tang b \cos C). \qquad (40)$$

2°. Trouver les deux angles A et B? On se sert des analogies de Néper,

$$\tang \tfrac{1}{2} (A + B) = \cot \tfrac{1}{2} C . \frac{\cos \tfrac{1}{2} (a - b)}{\cos \tfrac{1}{2} (a + b)}, \qquad (41)$$

$$\tang \tfrac{1}{2} (A - B) = \cot \tfrac{1}{2} C . \frac{\sin \tfrac{1}{2} (a - b)}{\sin \tfrac{1}{2} (a + b)}. \qquad (42)$$

III. Étant donnés les trois angles, trouver un côté?

$$2K = A + B + C,$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{- \cos K \cos (K - A)}{\sin B \sin C}, \qquad (43)$$

ou

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\cos (K - B) \cos (K - C)}{\sin B \sin C}. \qquad (44)$$

IV. Étant donnés deux angles A, B et le côté adjacent $c$, 1°. trouver le 3ᵉ angle C?

$$\cos C = \cos A \cos B (\tang A \tang B \cos c - 1). \quad (45)$$

2°. Trouver les deux autres côtés? On se sert des analogies de Néper,

$$\tang \tfrac{1}{2}(a + b) = \tang \tfrac{1}{2} c . \frac{\cos \frac{1}{2}(A - B)}{\cos \frac{1}{2}(A + B)}, \quad (46)$$

$$\tang \tfrac{1}{2}(a - b) = \tang \tfrac{1}{2} c . \frac{\sin \frac{1}{2}(A - B)}{\sin \frac{1}{2}(A + B)}. \quad (47)$$

V. De deux côtés et les angles opposés, étant donnés trois élémens, trouver le 4ᵉ? Prenez l'équ. (32) des quatre sinus.

VI. Excepté lorsqu'on donne trois côtés, ou bien trois angles, *il entre toujours parmi les données un angle* A *et le côté adjacent* $b$, outre une 3ᵉ partie. Ces problèmes se résolvent tous par les équ. suivantes et l'équ. (32),

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\tang \varphi = \tang b \cos A,$ | (1) | $\cot \theta = \tang A \cos b,$ | (2) |
| $c = \varphi + \varphi',$ | (3) | $C = \theta + \theta',$ | (4) |
| $\frac{\cos a}{\cos b} = \frac{\cos \varphi'}{\cos \varphi},$ | (5) | $\frac{\cos A}{\cos B} = \frac{\sin \theta}{\sin \theta'},$ | (6) |
| $\frac{\tang A}{\tang B} = \frac{\sin \varphi'}{\sin \varphi},$ | (7) | $\frac{\tang a}{\tang b} = \frac{\cos \theta}{\cos \theta'}.$ | (8) |

On abaisse de l'angle C (fig. 1) une perpendiculaire CD sur le côté opposé $c$, ce qui décompose le triangle proposé en deux triangles rectangles, qu'on résout séparément. Dans l'un, ACD, on connaît A et $b$; rien n'est plus facile que de trouver les autres parties, qui, jointes à la 3ᵉ donnée, servent à résoudre le second triangle rectangle BCD, et déterminent l'inconnue demandée. On appelle $\varphi$ et $\varphi'$ les deux arcs segmens de la base, $\theta$ et $\theta'$ les deux parties de l'angle C, et $\perp$ l'arc perpendiculaire CD.

Il faut noter que si la perpendiculaire CD tombait hors du triangle, $\varphi$ et $\varphi'$, $\theta$ et $\theta'$ seraient de signes contraires; c'est ce qui arrive quand les angles A et B à la base sont d'espèces dif-

férentes (l'un $<$, l'autre $> 90^\circ$). Lorsque l'on ignore si cette circonstance a lieu, le problème est susceptible de deux solutions.

Observez d'abaisser l'arc perpendiculaire de celui des deux sommets B ou C, qui ne divise pas en deux parties le 3ᵉ élément donné avec A et $b$.

Voici le détail des cas; les données sont A, $b$ et un autre arc.

1°. *Étant donnés deux côtés et l'angle compris*, $b$, $c$, A, l'équ. (1) fait connaître $\varphi$, (3) $\varphi'$, qui peut être négatif (ce que le calcul apprend), (5) $a$, (7) B, et l'équ. (32, p. 4) C, dont l'espèce est d'ailleurs connue.

On peut encore trouver le côté $a$ par les équ.

$$\sin \tfrac{1}{2} y = \cos \tfrac{1}{2} A \sqrt{\sin b \sin c},$$
$$\sin^2 \tfrac{1}{2} a = \sin \tfrac{1}{2}(b + c + y) \sin \tfrac{1}{2}(b + c - y).$$

2°. *Etant donnés deux angles et le côté adjacent* A, C, $b$, l'équ. (2) fait connaître $\theta$, (4) $\theta'$, qui peut être négatif (ce que le calcul apprend), (6) B, (8) $a$, enfin, l'équ. (32, p. 4) des 4 sinus donne $c$, qui est d'espèce connue.

3°. *Étant donnés deux côtés et un angle opposé*, $b$, $a$, A, l'équ. (1) donne $\varphi$, (5) $\varphi'$, (3) $c$, (7) et (32) B et C;

ou bien, (2) donne $\theta$, (8) $\theta'$, (4) C, (6) et (32) B et $c$.

Ce problème reçoit en général *deux solutions*. En effet, l'arc $\varphi'$ ou $\theta'$ étant donné par son cos., admet le double signe $\pm$; il y a donc deux valeurs pour $c$, et aussi pour C, à moins qu'on ne soit conduit à en rejeter une qui serait négative. $\varphi'$ et $\theta'$ entrent dans (6) et (7) par leurs sinus, d'où résultent deux valeurs de B; de même pour C et $c$.

4°. *Etant donnés deux angles et un côté opposé*, A, B, $b$, l'équ. (1) donne $\varphi$, (7) $\varphi'$, (3) $c$, (5) $a$, et l'équ. (32) des 4 sinus fait connaître C;

ou bien (2) donne $\theta$, (6) $\theta'$, (4) C, (8) et (32) $a$ et $c$.

Il y a encore ici deux solutions; car $\varphi'$ ou $\theta'$ est donné par un

sin., deux arcs supplémentaires satisfont à la question. Ainsi, $c$ dans (3), ou $a$ dans (8), reçoit deux valeurs; de même pour $a$ dans (5) et $c$ dans (4), etc.

On pourra recourir au *Cours de Mathématiques pures*, n° 607, pour l'analyse de ces cas, appelés *douteux*, parce qu'ils ont deux solutions; ils ne se rencontrent qu'autant que, parmi les données, il entre *un angle et le côté qui lui est opposé*, c'est-à-dire B avec $b$, ou A avec $a$. Quant à la valeur de l'arc perpendiculaire $\psi$, il est donné par l'équ.

$$\sin \psi = \sin A \sin b. \quad (9)$$

Observez que toutes ces équ. sont propres au calcul des log., et que, dans chacun de ces cas, on n'a besoin d'employer que des équ. des n°s, soit pairs, soit impairs; on préfère celui de ces deux systèmes d'équ. qui conduit à des calculs plus simples, selon les circonstances.

Lorsque le triangle est isocèle, $B = C$, $b = c$, il faut abaisser l'arc perpendiculaire du sommet A, et les équ. deviennent très simples; on trouve

$$\sin \tfrac{1}{2} a = \sin \tfrac{1}{2} A \sin b, \quad (10)$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} a = \text{tang } b \cos B, \quad (11)$$

$$\cos b = \cot B \cot \tfrac{1}{2} A, \quad (12)$$

$$\cot \tfrac{1}{2} A = \cos \tfrac{1}{2} a \sin B. \quad (13)$$

La connaissance de deux des quatre élémens A, B, $a$, $b$, qui forment le triangle isocèle, suffit pour faire trouver les deux autres.

*Quelques particularités sur les étoiles.*

Les étoiles qui brillent au firmament ont été appelées *fixes*, parce qu'elles sont en effet immobiles dans l'espace; elles conservent donc leurs distances mutuelles. Les arcs qui les joignent forment différentes figures géométriques que l'œil saisit aisément, et qui demeurent constamment les mêmes. Lorsqu'on jette les yeux au ciel, on reconnaît bientôt que les étoiles paraissent toutes changer de lieu d'un mouvement com-

mun ; mais ce ne sont pas ces astres qui se déplacent, c'est la Terre qui, tournant sur son axe d'occident en orient, cause cette illusion, par laquelle le ciel entier nous paraît tourner autour de nous de l'est à l'ouest. Nous voyons les étoiles se lever, monter, descendre et se coucher, comme le Soleil, la Lune et les planètes, parce que la rotation diurne de la Terre nous porte à attribuer à ces astres notre propre mouvement, en sens contraire.

L'illusion de la rotation du ciel étoilé nous offre les mêmes apparences que si l'on supposait toutes les étoiles attachées, chacune en un lieu fixe, sur une sphère d'un rayon immense, au centre de laquelle nous serions immobiles, tandis que la sphère tournerait en 24 heures autour de nous. Ce mouvement est parfaitement uniforme, et sa durée pour un tour entier est ce qu'on appelle le *jour sidéral*. (*V.* ci-après n° 7.) Le Soleil, la Lune et les planètes sont aussi entraînés par ce mouvement universel ; mais ces corps ne restent pas fixes, comme les étoiles, sur cette sphère mobile : ils y ont un mouvement propre, dirigé d'occident en orient. Le Soleil décrit sa circonférence entière en un an, la Lune en $27^j \frac{1}{3}$, etc.

Puisque les étoiles conservent les configurations géométriques qu'elles forment entre elles, il est bien facile de les reconnaître à ces figures, à leurs alignemens et à leur éclat ; car ces choses restent invariables, à quelque heure qu'on jette la vue sur le firmament, et quelle que soit la position générale de cette sphère étoilée. L'astronome doit être capable d'assigner à chacune des étoiles son nom, lorsqu'il la voit, et même d'en indiquer la place actuelle durant le jour et derrière les nuages.

Cet éclat des étoiles les a fait distinguer les unes des autres par *leurs grandeurs* : ce n'est pas qu'en effet il y en ait de plus grosses et de plus petites. Vues dans les lunettes à forts grossissemens, ce ne sont que des points étincelans, sans dimensions apparentes ; mais la vivacité de leur lumière s'exprime en disant qu'elles sont *primaires, secondaires, tertiaires*, etc., ou de 1^re^, 2^e^, 3^e^.... grandeur. Jusqu'à la 6^e^

grandeur, on peut les apercevoir à l'œil nu, quand le ciel est très serein et que la nuit est profonde; au-delà, il faut des lunettes pour les voir, et il en est, dit-on, qui sont de la millième grandeur, et même d'un éclat moindre encore. L'observateur ne s'occupe guère que des plus brillantes, excepté dans quelques cas; du reste, on comprend que la grandeur d'une étoile étant l'effet d'une sensation, il n'est pas rare que celle qui est primaire pour l'un ne soit que secondaire pour un autre.

Pour dénommer les étoiles, on a imaginé de les grouper, et de donner des noms à chaque groupe, appelé *constellation.* On dessine sur chaque constellation quelque animal, ou autre image tout-à-fait arbitraire, et l'on dénomme les étoiles par les places qu'elles y occupent. C'est ainsi qu'on dit la queue du Lion, le cœur du Scorpion, l'œil du Taureau, etc. Il n'y a aucune ressemblance entre les configurations formées par les étoiles et ces animaux, et il ne faudrait pas chercher à reconnaître au ciel les constellations, en s'imaginant y rencontrer des figures de ce genre. C'est une tradition de l'antiquité, qui, en choisissant ces symboles arbitraires, a cédé à des usages religieux et à des illusions astrologiques.

On a donné des noms propres à plusieurs étoiles d'un éclat remarquable; les autres sont dénommées comme il vient d'être dit, et, plus ordinairement encore, par une lettre grecque ou italique, ou par un chiffre. On comprendra donc aisément ce qu'on entend par ces désignations : α de la petite Ourse, β d'Orion, Aldébaran, Procyon, Sirius, etc. En jetant les yeux sur une carte du ciel, rien ne sera plus facile que de comprendre ce système de nomenclature. (*V.* les Planisphères de l'*Uranographie*.)

Voici les noms des étoiles de première grandeur :

*Sirius, l'épaule droite d'Orion, son pied gauche ou Rigel, l'œil du Taureau ou Aldebaran, la Chèvre, la Lyre ou Wega, Arcturus, le cœur du Scorpion ou Antarès, l'épi de la Vierge, le cœur de l'Hydre, Régulus ou le cœur du Lion, sa queue, Canopus, Fomalhaut et Acharnar.* D'autres

ajoutent à cette liste *Ataïr, Procyon, Castor, la queue du Cygne.* Il est nécessaire de savoir reconnaître ces étoiles, et d'autres encore La *Connaissance des Tems* se sert de sept principales pour les distances lunaires. Ne pouvant donner à ce sujet le développement dont il est susceptible, nous renvoyons, pour plus de détails, à l'*Uranographie;* nous nous bornerons ici à faire distinguer les constellations les plus remarquables.

Qu'on tourne le dos au midi durant une belle nuit, et l'on verra plusieurs constellations faciles à reconnaître, qui servent à distinguer les autres en s'alignant avec elles.

La *grande Ourse* est représentée fig. 3; elle est formée de six belles étoiles de seconde grandeur, et d'une autre de 3ᵉ. De ces sept étoiles, quatre forment un grand quadrilatère, $\alpha$, $\beta$, $\gamma$, $\delta$; les trois autres, qui se dirigent sur le prolongement d'une des diagonales, forment la queue $\epsilon$, $\zeta$, $\eta$. Cette belle constellation, qu'on appelle aussi le *Chariot,* est du nombre de celles qui ne se couchent pas dans nos climats, et qu'on peut voir dans toute nuit sereine, ainsi que les deux suivantes.

La *petite Ourse* est figurée presque comme la grande, mais sous de moindres dimensions (*V.* fig. 2) et avec un moindre éclat. Trois étoiles tertiaires $\alpha$, $\beta$ et $\gamma$, et quatre quartaires, la composent; $\beta\gamma\zeta\eta$ forment le quadrilatère, $\epsilon$, $\delta$, $\alpha$ la queue. Cette étoile $\alpha$ est surtout très importante à distinguer; car c'est la *polaire,* ainsi nommée, parce qu'elle est si voisine du pôle nord (elle en est à 1° 36′), qu'elle semble être le pivot immobile autour duquel la voûte céleste tourne, et le centre des cercles que décrivent toutes les étoiles.

Prolongez le côté $\alpha\beta$ du quadrilatère de la grande Ourse (fig. 3), celui qui est opposé à la queue, vous irez à la polaire, ce prolongement ayant à peu près pour longueur celle de la grande Ourse entière. Comme la polaire est la seule étoile remarquable dans cette partie du ciel, elle est fort aisée à reconnaître. Tous les cercles horaires viennent se croiser près d'elle; le pôle est sur l'arc qui va de la polaire à $\iota$ à la

queue de la grande Ourse, ou sur le prolongement de celui qui va de γ Cassiopée à la polaire.

*Cassiopée* (fig. 4) est de l'autre côté du pôle, par rapport à la grande Ourse; l'une à l'est, l'autre à l'ouest, ou bien, l'une est au-dessus de nos têtes, et l'autre près de l'horizon boréal. C'est un groupe d'étoiles de 3e et 4e grandeurs, qu'on reconnaît à sa figure en *y*, à queue courbée. Quelques personnes y veulent aussi trouver la figure d'une *chaise renversée :* αγκ et β, ainsi que plusieurs autres petites étoiles, forment le siége; le dos est imité par la courbe γδι. Une fois qu'on a vu cette constellation, il est impossible de l'oublier, et on la reconnaît tout de suite. Comme les étoiles tournent en $24^h$ autour du pôle, elles prennent diverses situations relatives, par rapport à l'horizon. La Chaise est debout, couchée ou renversée, selon les heures; mais lorsqu'on la regarde dans les soirées d'hiver, elle a cette dernière situation.

Toutes les constellations que nous allons décrire se voient au sud, ou à l'est, ou à l'ouest, selon l'heure et la saison; et ce n'est plus vers le nord qu'il faut tourner ses regards pour les apercevoir.

En s'éloignant du pôle, on rencontre trois constellations qui semblent n'en composer qu'une seule très étendue, parce que les étoiles s'y réunissent en une figure assez facile à saisir.

*Pégase* ou la *grande Croix*. L'arc qui de α et β de la grande Ourse a donné la polaire, étant prolongé d'une quantité égale, passe près de Cassiopée, et va traverser Pégase. C'est un grand carré αβαγ (fig. 5), formé de quatre étoiles secondaires, près duquel deux tertiaires ηζ sont sur une parallèle au côté αβ. Le carré de Pégase et celui de la grande Ourse sont des côtés opposés du pôle, et viennent passer au sud à $12^h$ d'intervalle l'un de l'autre.

Prolongez la diagonale αα de Pégase, vous rencontrez αβγ d'*Andromède*, trois étoiles secondaires, dont la 1re α fait partie du carré de Pégase; prolongez encore cette ligne, et vous arrivez sur α de *Persée*, aussi de 2e grandeur, située au milieu

d'un arc oblique $\beta\alpha\gamma\eta$. Voilà donc sept étoiles secondaires imitant la forme de la grande Ourse, savoir, un carré et une queue sur la diagonale prolongée; mais ici la queue est presque droite, terminée par l'arc de Persée, et les étoiles, moins proches du pôle que la grande Ourse, occupent aussi une étendue plus considérable.

Le *Cocher* (fig. 6) forme un grand pentagone irrégulier $\alpha\beta\theta\beta\iota$, où se trouvent trois belles étoiles en triangle isocèle $\alpha\beta\beta$. L'une d'elles, $\alpha$, s'appelle la *Chèvre*; c'est une des plus brillantes du ciel. A de certaines heures, elle rase l'horizon boréal; elle s'élève vers le zénith de Paris, 12 heures après. On remarque près d'elle un triangle isocèle très allongé $\iota\eta\zeta$, formé de trois petites étoiles quartaires, qui servent à distinguer la Chèvre de toutes les étoiles primaires. En prolongeant l'arc de Persée, on voit deux files de petites étoiles, l'une, vers l'orient, va à la Chèvre; l'autre au sud, formant d'abord une courbure opposée, se porte sur les *Pléiades*.

En prolongeant la queue courbe de la grande Ourse, on va sur le *Bouvier*, dont l'étoile $\alpha$ est *Arcturus*, de 1re grandeur.

La *Lyre* ou *Wéga* est une belle étoile primaire, opposée à la Chèvre par rapport au pôle; quand l'une est en haut sur nos têtes, l'autre est près de l'horizon nord. Au sud-est de Wéga est un triangle formé par trois étoiles tertiaires.

L'*Aigle* est au sud-est de la Lyre; on y remarque trois étoiles voisines, sur une même ligne droite, dont celle du milieu est de 1re grandeur: on la nomme *Altaïr* ou *Ataïr*.

Le *Cygne* est entre la Lyre et Pégase; il forme une grande croix de cinq étoiles, dont celle de la tête est secondaire.

Les douze constellations zodiacales que le soleil traverse successivement en une année sont énoncées par ces vers latins:

*Sunt Aries, Taurus, Gemini, Cancer, Leo, Virgo,*
*Libraque, Scorpius, Arcitenens, Caper, Amphora, Pisces.*

Elles ne sont pas toutes remarquables, et il suffit de reconnaître les principales; on trouve bientôt les autres, d'après leur

rang au ciel parmi cette série de constellations. On ne les voit que de l'est, au sud et à l'ouest.

Le *Bélier* a deux tertiaires voisines $\alpha\beta$, et une quartaire $\gamma$ un peu au-dessous du prolongement de la ligne de $\alpha\beta$.

Le *Taureau* (fig. 7) forme un grand V. L'étoile qui termine la branche orientale est primaire ; on la nomme *Aldébaran*. Les *Pléiades* sont un groupe d'étoiles petites et serrées au nord-ouest du Taureau.

Les *Gémeaux* forment au ciel un grand quadrilatère oblique et long. *Castor* et *Pollux* sont deux belles étoiles assez rapprochées, situées aux angles supérieurs.

Le *Lion* (fig. 8) imite un grand trapèze de quatre belles étoiles ; deux primaires à la base sont, *Régulus* à l'ouest, et la *Queue* à l'est ; les deux autres sont secondaires.

La *Vierge* a cinq étoiles tertiaires en V, dont les branches sont obliques et ouvertes à angle droit. L'*Épi* est un peu plus bas et au sud-est. C'est une belle étoile primaire.

La *Balance* a quatre étoiles, dont une assez belle, et trois tertiaires ; elles sont disposées en quadrilatère.

Le *Scorpion* s'élève très peu sur notre horizon ; il a une file d'étoiles tertiaires courbée en S. A la pointe supérieure est une belle primaire, *Antarès ;* plus haut, à droite, on voit des étoiles disposées en arc concave vers Antarès, et dont une est secondaire.

Le *Sagittaire* a un quadrilatère oblique, et un arc vertical vers l'ouest, croisé par une ligne droite, qui est l'image d'un arc et de sa flèche.

Le *Capricorne* est sous l'Aigle. Le *Verseau* a deux triangles très peu élevés au-dessus de leurs bases, qui sont disposés en une même ligne droite avec le Capricorne.

Les *Poissons* sont deux files sinueuses d'étoiles très petites et peu visibles, dont l'une se perd à la ceinture d'Andromède, et l'autre s'étend sous le carré de Pégase. A la jonction de ces deux files, vers le sud-est, est la tertiaire $\alpha$, la seule étoile remarquable de cette constellation.

*Orion* est situé un peu plus bas qu'Aldébaran, le Cocher

et les Gémeaux. C'est la plus belle de toutes les constellations; on la voit surtout briller au sud durant l'hiver et au premier printemps. Elle a quatre belles étoiles, dont deux, $\alpha$ et $\beta$ Rigel, sont primaires, et deux secondaires; elles forment un grand parallélogramme (fig. 9). Au milieu, on voit trois étoiles secondaires $\delta\epsilon\zeta$ sur une ligne droite oblique; c'est le *Baudrier :* et un peu plus bas une traînée d'étoiles $\sigma c\theta\nu\iota$; c'est l'*Epée*.

En prolongeant la ligne des trois étoiles du Baudrier vers le sud-est, ou la base du quadrilatère, on est conduit sur *Sirius*, la plus belle étoile du ciel.

Au-dessous des Gémeaux est le *petit Chien,* formé de deux étoiles rapprochées, l'une primaire, c'est *Procyon*, l'autre tertiaire. Procyon, Sirius et $\alpha$ d'Orion forment un grand triangle équilatéral.

L'*Hydre* est une immense file sinueuse d'étoiles sous le Lion et la Vierge. Le *cœur* de l'Hydre est une secondaire sur le prolongement du côté occidental $\gamma\alpha$ du trapèze du Lion.

*Fomalhaut* est une primaire située très bas sur le prolongement du côté occidental du carré de Pégase. Dans nos contrées, on ne la voit qu'en automne et près du sud.

### *Opérations numériques.*

Certaines formes de calculs reviennent si fréquemment dans les questions d'Astronomie, que nous croyons devoir donner d'avance quelques développemens, soit pour les abréger, soit pour en expliquer la théorie.

*Additions et Soustractions.* Il arrive souvent qu'on doit ajouter plusieurs nombres, puis en retrancher un ou plusieurs de leur somme. Il importe de s'exercer à conduire ces opérations de manière à n'en faire qu'une seule. Les exemples suivans suffisent pour montrer comment on doit gouverner ces calculs.

| | | |
|---|---|---|
| | | + 458,732 |
| + 43,257 | 318,645 | + 21,3584 |
| + 215,34 | − 157,39 | − 154,235 |
| − 89,625 | − 23,851 | − 221,47 |
| 168,972 | 137,404 | 104,3854 |
| 183°29′ 18″5 | $21^h$ 10′ 28″4 | 3.17054 |
| + 127.14.55,7 | − 7.54.19,7 | − $\bar{1}$.42119 |
| − 54.51.27,8 | − 8.16.52,9 | − $\bar{2}$.19235 |
| 255.52.46,4 | 4.59.15,8 | 5.55700. |

C'est surtout dans les calculs logarithmiques que la pratique dont nous parlons présente des avantages. Il ne faut recourir aux complémens arithmétiques pour changer les soustractions en additions, que dans certains cas particuliers. (*V.* n° 128.)

*Multiplication.* Lorsque les facteurs sont accompagnés de fractions décimales, ou ne sont que des nombres approchés, la règle prescrite pour faire la multiplication doit subir quelque modification. Soient deux facteurs approchés $a$ et $b$, ayant $x$ et $y$ pour erreurs, le vrai produit est

$$(a+x)(b+y) = ab + bx + ay + xy.$$

Négligeons le dernier terme $xy$, qu'on peut regarder comme une fort petite quantité. L'erreur du produit $ab$ est donc $bx + ay$. On affaiblit cette erreur en prenant l'un des facteurs approché par excès, et l'autre facteur approché par défaut; car alors $x$ et $y$ sont de signes contraires, et l'erreur $bx + ay$ devient une différence. Il convient donc, autant que faire se peut, de choisir pour $a$ et $b$ des facteurs qui se trouvent dans ce cas.

Mais, le plus souvent, on n'est pas maître de satisfaire à cette condition, et même on ignore si elle est remplie, parce que les nombres donnés $a$ et $b$ proviennent d'opérations qui ne laissent aucune instruction à ce sujet. Soit $a > b$; le terme $ay$, qui est le plus influent de l'erreur, s'affaiblit à mesure que $y$ diminue, c'est-à-dire quand $b$ est très approché. Ainsi *l'erreur que l'on commet en prenant* ab *pour produit est d'autant*

*moindre que le plus petit facteur b est plus approché*. Par exemple, pour

$$53,71 \times 1,02 = 54,7842;$$

si l'on néglige 0,71 au multiplicande, le produit sera $53 \times 1,02 = 54,06$; il est en erreur de 0,7242. Mais en négligeant seulement 0,02 au multiplicateur, le produit 53,71 est en erreur de 1,0742. Ainsi l'erreur est ici presque le double de celle du premier cas, quoique la partie négligée 0,02 soit beaucoup moindre dans le second.

En général, lorsqu'on veut multiplier deux nombres $a$ et $b$ qui sont affectés de fractions décimales, la règle prescrit d'y supprimer la virgule, ce qui donne les entiers A et B, et le produit AB. Ce produit est en erreur, comme ci-dessus, de $Bx + Ay$, quand $a$ et $b$ sont des valeurs approchées. Mais $x$ et $y$ sont toujours $< \frac{1}{2}$, car si la première décimale négligée est 5 au moins, on doit ajouter 1 au dernier chiffre du facteur. Faisons donc $x = y = \frac{1}{2}$; l'erreur a pour limite $\frac{1}{2}(A + B)$. Ainsi, pour multiplier $a$ par $b$, supprimez la virgule, ce qui donne les facteurs entiers A et B, et le produit AB. Cette quantité peut être en erreur d'au plus $\frac{1}{2}(A + B)$. Il est donc facile de distinguer les chiffres du produit qui sont certains, de ceux qui peuvent être inexacts.

Dans le produit $53,71 \times 1,02 = 54,7842$, si les facteurs sont approchés, comme leur demi-somme, suppression faite de la virgule, est composée de quatre chiffres, les quatre décimales peuvent être fautives. C'est ce qu'on reconnaît bientôt en supposant que les vrais facteurs sont

$$53,714 \times 1,0245 = 55,03.$$

D'après cela, on voit qu'il est bien inutile de chercher au produit de deux facteurs approchés, les chiffres dont on n'est pas certain, puisqu'on serait obligé de les supprimer ensuite; voici comment on doit alors opérer.

Pour chercher le produit $53,714 \times 1,0245$, où l'on ne peut compter sur l'exactitude des cinq chiffres placés à droite, il n'y a que deux chiffres décimaux dont on soit certain. On en cher-

chera trois, sauf à négliger ensuite le troisième; mais il faut prendre le plus petit facteur plus approché que l'autre. On multipliera donc 53,71 par 1,0245, ainsi qu'il suit : on commence l'opération par le chiffre de la gauche du multiplicateur.

| | | |
|---|---|---|
| 10,245 | | |
| 5,371 | | |
| 51,225, | produit par 5; | on conserve la place de la virgule. |
| 3,074 | ....... par 0,3; | on néglige le 5 à droite. |
| 717 | ....... par 0,07; | on néglige 45. |
| 10 | ....... par 0,001; | en négligeant 245. |
| 55,026, | produit demandé = 55,03. | |

Avant de négliger quelque partie à la droite du multiplicande, on cherche quelles sont les dixaines qu'on devrait reporter au produit suivant, si rien n'était négligé, afin de conserver cette retenue. Ainsi, dans la troisième multiplication partielle, où 7 est le facteur, avant de négliger 45 au multiplicateur, comme 4 fois 7 font 28, on doit retenir 2 (et même 3, attendu que 28 est plus voisin de 30 que de 20). On dira donc, 2 fois 7 font 14, plus 3 de retenue font 17, et l'on posera 7, etc.

Remarquez que nous avons déplacé la virgule dans les deux facteurs proposés : l'un a été rendu 10 fois plus grand, et l'autre 10 fois moindre, ce qui ne change pas le produit. Cela nous a permis de reconnaître aisément la place de la virgule dans le premier produit partiel, et par suite sa place dans les autres.

Dans les exemples que voici, on n'a pas pris ce soin, dont il est facile de se dispenser, puisqu'on peut trouver la place de la virgule en séparant dans l'un des produits partiels autant de décimales qu'il y en a dans le multiplicande et dans le multiplicateur. Dans l'exemple suivant, le produit complet aurait 16 chiffres décimaux; mais les 9 derniers pouvant être fautifs, on se contente d'en chercher 8. Or, le premier chiffre du multiplicateur est 7, qui vaut 0,007; il faut donc

commencer l'opération par la 5[e] décimale du multiplicande, et négliger ce qui se trouve à droite.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 43,02 3212 | | | |
| 0,007843287 | | | |
| 0,30117025, | produit par 0,007, | on supprime | 12 |
| 3441946 | ....... par 8, | ............ | 212 |
| 172097 | ....... par 4, | ............ | 3212 |
| 12907 | ....... par 3, | ............ | 43212 |
| 860 | ....... par 2, | ............ | 243212 |
| 344 | ....... par 8, | ............ | 0243212 |
| 30 | ....... par 7, | ............ | 30243212 |
| 0,33745209, | produit cherché. | | |

*Autres exemples.*

| | | |
|---|---|---|
| 17,49 | 0,358 | 0,02873 |
| 0,0325 | 0,02873 | 0,358 |
| 0,5247 | 0,00716 | 0,00862 |
| 350 | 286 | 144 |
| 87 | 25 | 22 |
| 0,5684 | 1 | 0,01028 |
| | 0,01028 | |

*Division.* La recherche du quotient d'un nombre divisé par un autre conduit à des conséquences analogues aux précédentes. Pour bien comprendre cette théorie, observons que ce n'est jamais la multitude des chiffres du dividende qui est gênante, puisque chacun est descendu à son tour près du reste d'une division partielle : c'est donc la complication du diviseur qu'il faut éviter. Voyons dans quel cas on peut négliger une petite partie $x$ du diviseur, sans altérer le quotient, dans l'ordre d'approximation que le problème exige. Soit D le dividende, et $d+x$ le diviseur : en divisant l'un et l'autre par $d$, on a

$$\frac{D}{d+x} = \frac{D}{d} : \left(1+\frac{x}{d}\right) = \frac{D}{d} \times \left(1+\frac{x}{d}\right)^{-1}$$
$$= \frac{D}{d}\left(1-\frac{x}{d}+\frac{x^2}{d^2}\ldots\right) = \frac{D}{d} - \frac{Dx}{d^2} + \ldots.$$

Or, supposons que l'on soit en droit de négliger $x$ au diviseur (ou que le quotient soit le premier terme $\frac{D}{d}$), lorsqu'on veut le quotient à moins de $\frac{1}{m}$ près. Il faudra que $\frac{Dx}{d^2}$ soit assez petit pour être de l'ordre des quantités négligeables, dans le cas supposé; ainsi, il faut, pour qu'on puisse négliger $x$ au diviseur, qu'on ait

$$\frac{Dx}{d^2} < \frac{1}{m}, \quad \text{ou} \quad Dmx < d^2.$$

Soit proposé, par exemple, de faire cette division,

$$\frac{5,4331327}{4,54293} = 1,19595\ldots$$

Voyons si, en se contentant d'approcher à un millième, on peut réduire le diviseur à 4,5. On a ici $m = 1000$, $d = 4,5$, $D = 5,433,\ldots$ $x = 0,04$ (ce serait $x = 0,04293$; mais comme on n'a besoin que de faire la vérification d'une inégalité pour reconnaître si elle a lieu, un calcul approché suffit). On trouve $Dmx = 5433 \times 0,04 = 217,32$, résultat qui surpasse visiblement $d^2$ ou $(4,5)^2$. Ainsi l'inégalité n'est pas vérifiée. Mais prenons $d = 4,54$, et nous trouverons qu'elle l'est, puisque $Dmx = 5433 \times 0,003 = 16$ environ, qui est $< (4,54)^2$. On divisera donc 5,433... par 4,54, et l'on trouvera 1,196, comme cela est en effet.

Observez que plus le dividende D, la partie négligée $x$ et le dénominateur $m$ de la fraction $\frac{1}{m}$ sont petits, par rapport à $d$, et plus l'inégalité approche d'être satisfaite.

Voici le procédé de calcul qu'on suit, dans les divisions, lorsque le diviseur est composé d'un grand nombre de chiffres. L'exemple suivant, qu'on vient de traiter, nous servira à l'expliquer :

```
543313,27 { 454293
89020     { 1,1959
 43591
  2705
   434  etc...
```

Après avoir trouvé le premier chiffre 1 du quotient, au lieu d'abaisser, près du reste, le 2 du dividende, on supprime le dernier chiffre à droite du diviseur (c'est 3), et opérant à l'ordinaire, on trouve 1 au quotient, et 43591 au reste; on supprime de nouveau le dernier chiffre du diviseur (c'est 9), et l'on continue l'opération en suivant la même marche, etc. : seulement, dans chaque multiplication du diviseur par chaque chiffre du quotient, on a soin de tenir compte des dixaines qu'il aurait données au produit, pour les retenir et les joindre au produit suivant. Ainsi, lorsqu'après avoir supprimé le 9 du diviseur, on a trouvé le quotient 9, comme 9 fois 9 font 81, on retient 8, et l'on dit 9 fois 2 font 18, et 8 font 26, qui, retranchés de 31, donne le reste 5; on pose 5, etc.

Ce procédé s'explique aisément, lorsqu'on remarque que la suppression du chiffre à droite, tant au dividende partiel qu'au diviseur, rend l'un et l'autre 10 fois moindres, ce qui ne change pas le quotient, ou du moins l'erreur n'est de nature qu'à influer sur les chiffres éloignés qu'on trouvera; car il faudrait, pour que l'erreur fût nulle, que le chiffre négligé fût zéro des deux parts.

*Racine carrée.* Lorsqu'on veut avoir plus de 4 à 5 chiffres à la racine, les calculs se compliquent beaucoup; mais on les abrège en cherchant d'abord, par la méthode ordinaire, plus de la moitié des chiffres dont la racine est composée, puis les autres chiffres se trouvent en divisant le reste de l'opération par le double de la racine trouvée. En effet, soit N le nombre proposé dont on demande la racine, et $a$ la partie à gauche déjà trouvée de cette racine, $x$ le nombre qui la complète; on a

$$\sqrt{N} = a + x, \quad \text{d'où} \quad N = (a + x)^2 = a^2 + 2ax + x^2;$$

donc $$\mathrm{N} - a^2 = 2ax + x^2 = 2a\left(x + \frac{x^2}{2a}\right),$$
$$\frac{\mathrm{N} - a^2}{2a} = x + \frac{x^2}{2a}.$$

Or, $\mathrm{N} - a^2$ est le reste obtenu, et $2a$ le double de la partie trouvée à la racine. Si $2a$ est formé d'au moins le double du nombre de chiffres dont $x$ est composé, le dernier terme $\frac{x^2}{2a}$ est $< 1$, et négligeable quand on ne cherche que les entiers; et l'on sait que l'extraction des racines ramène toujours les choses à cet état. Donc $x$ est le quotient du reste obtenu, divisé par le double de la racine trouvée.

Il y a une observation à faire sur la nature des unités qui composent $\mathrm{N} - a^2$, $a$ et $x$; car si la racine a 9 chiffres, dont on ait déjà trouvé 5, il faut concevoir quatre zéros à la droite de ces 5 chiffres, pour que $a$ soit sous la forme qui lui est propre : de même, $\mathrm{N} - a^2$ a 8 zéros. On peut donc, dans la division par $2a$, omettre les 4 zéros de $2a$, et n'en placer que 4 à la droite du reste, c'est-à-dire *autant qu'on cherche encore de chiffres pour compléter la racine*.

Voici un exemple :

| | |
|---|---|
| 54.4 6.31.15.89.67.69 | 7379 |
| 5 4.6 | 143 × 3 |
| 1 1 73.1 | 1467 × 7 |
| 1 46 21.5 | 14749 × 9 |
| 13 47 4. | |

Après avoir trouvé les 4 premiers chiffres 7379 de la racine, et le reste 13474, pour obtenir les trois autres chiffres, on divise ce reste, suivi de 3 zéros, par 14758, double de la racine.

| | |
|---|---|
| 134740.00 | 14758 |
| 1918 0 | 913 |
| 442 20. | |

Ainsi la racine cherchée est 7379913.

Au lieu d'ajouter 3 zéros au reste, on aurait dû y adjoindre les trois chiffres suivans 896 du nombre proposé.

Soit demandé la racine de 2 avec 8 décimales. Il faudrait

placer 16 zéros à la suite de 2, ou du moins descendre 8 fois des zéros par couples, près de chaque reste. Voici le détail du calcul par le procédé ci-dessus :

| | | |
|---|---|---|
| | 2 | 1,4142 |
| | 10.0 | 24×4 |
| | 40.0 | 281×1 |
| | 11 90.0 | 2824×4 |
| | 60 40.0 | 28282×2 |
| 1er Reste.......... | 3 83 6 | |
| Dividende.......... | 38 360.000 | 28284 |
| | 10 076 0 | 1356 |
| | 1 590 80 | |
| | 176 600 | $\sqrt{2} = 1,41421356.$ |

Dans la dernière division qu'on fait pour trouver la partie qui complète la racine, il ne faut pas oublier qu'on doit trouver au quotient autant de chiffres qu'on a ajouté de zéros au reste pour former le dividende. S'il n'en était pas ainsi, pour donner aux chiffres du quotient la valeur qui leur appartient, il faudrait placer à gauche un nombre de zéros propre à compléter le nombre de chiffres dont il s'agit. Dans l'exemple suivant, où le quotient doit avoir 3 chiffres, parce qu'on a mis 3 zéros à droite du reste, comme on ne trouve que 56 pour quotient, on écrit 056.

Cherchons $\sqrt{1968,747}$ avec 5 décimales :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 19.68,74.70 | 4437 | 50 100.0 | 8874 |
| | 3 6.8 | 84×4 | 5.730 0 | 56 |
| | 3 27.4 | 883×3 | 405 6 | |
| | 62 57.0 | 8867×7. | Prenez 056. | |
| Reste | 50 1 | | | |

$$\sqrt{1968,747} = 44,37056.$$

---

# PREMIÈRE PARTIE.

## NOMBRES DONNÉS DANS LA CONNAISSANCE DES TEMS, LEUR SIGNIFICATION ET LEUR USAGE.

1. On donne à la première page:
1°. L'année de la période julienne;
2°. Celle de la fondation de Rome;
3°. Celle de Nabonassar;
4°. Celle des Olympiades;
5°. Celle des Turcs;
6°. Le nombre d'or, l'épacte, le cycle solaire, l'indiction, la lettre dominicale, les fêtes mobiles et les quatre-temps.

Pour exposer ici les procédés qui font connaître toutes ces quantités, il faudrait donner un traité du calendrier; d'ailleurs, ces nombres sont étrangers aux calculs astronomiques, dont les théories font spécialement l'objet du présent ouvrage. Nous nous contenterons de renvoyer à notre *Uranographie* (4e édition, p. 457) les personnes qui désireraient des développemens à ce sujet.

2. L'*obliquité apparente de l'écliptique* fera plus tard le sujet de nos recherches. (*V.* nos 77 et 296.)

3. Il en faut dire autant de l'*ascension droite du Soleil moyen*. (*V.* n° 104.)

4. On trouve à la page seconde l'explication des signes de convention dont les astronomes font usage pour représenter les planètes, les signes du zodiaque, les nœuds de la Lune, etc. Tout cela n'exige aucune explication.

5. Viennent ensuite les prédictions d'éclipses de Soleil et de Lune. Les développemens de cette théorie sont intimement liés à l'usage qu'on en fait pour trouver la longitude des lieux. Nous croyons ne pas pouvoir séparer ces deux sujets; nous les traiterons donc ensemble plus tard. (*V.* n° 193.)

L'annuaire ou calendrier est divisé en douze mois; pour

chacun de ces mois on emploie douze pages. Nous allons passer le tout en revue, et indiquer le sens qu'on doit attribuer aux nombres qui sont consignés à chaque page d'un mois dans les colonnes consécutives.

### I. *Première page de chaque mois.*

6. Il n'est nécessaire de donner aucune explication pour les deux premières colonnes, qui se rapportent *aux dates et aux jours de la semaine.* On n'y a pas joint les noms des saints, ni ceux des fêtes; on a jugé, avec raison, que ces détails, étrangers à l'Astronomie, occuperaient une colonne qui serait plus utilement employée pour la science, en lui donnant une autre destination. Pendant quelque temps, on avait indiqué les saints et les fêtes dans la *Connaissance des Tems;* mais on a reconnu l'inconvénient de cette pratique, et l'on y a renoncé : on se contente de marquer en tête de l'*Annuaire* (à la page 1) les dates des fêtes mobiles.

7. *Lever et coucher du Soleil et de la Lune.*

Quatre colonnes font connaître les heures de ces phénomènes pour Paris. Ces heures sont celles du lever du centre de l'astre, ou de son coucher, en temps solaire vrai ou apparent, en ayant égard à la réfraction et à la parallaxe. Tout ceci exige quelques explications.

8. Les astronomes se servent pour diviser le temps de trois espèces d'heures :

1°. Les *heures sidérales,* comptées chaque jour de 0 à 24, à partir de l'instant où le point équinoxial ♈ passe au méridien supérieur, jusqu'au retour de ce même point. Cette durée est limitée par la révolution apparente des étoiles fixes; elle est constante à jamais, parce que la rotation diurne de la Terre sur son axe se fait d'un mouvement rigoureusement uniforme : c'est ce qu'on appelle le *temps sidéral.* Les pendules des observatoires sont ordinairement réglées sur les étoiles.

*L'ascension droite d'un astre, en temps, est l'heure sidérale de son passage au méridien.*

2°. Les *heures solaires vraies ou apparentes*, comptées aussi de 0 à 24, depuis midi, instant où le centre du Soleil traverse le méridien, jusqu'à son retour à ce plan. Cette durée de 24 heures constitue ce qu'on appelle le *jour astronomique* de temps vrai ou apparent.

Comme la marche du Soleil n'est point uniforme, que d'ailleurs cet astre ne parcourt pas l'équateur céleste, mais l'écliptique, les jours solaires ne sont pas égaux entre eux. Les heures vraies sont donc aussi inégales; car quoiqu'on soit convenu de partager en 24 la durée qui sépare deux midis consécutifs, comme la durée totale change avec les dates, les parties ou heures sont aussi un peu plus longues à certaines époques qu'à d'autres. Les heures de temps vrai sont indiquées par un bon cadran solaire.

3°. Les *heures solaires moyennes*, comptées aussi de 0 à 24, sont données par un Soleil fictif, qu'on imagine se mouvoir annuellement sur l'équateur avec une vitesse uniforme. Cet astre est d'accord, à certaines époques convenues, avec le véritable Soleil, le devance un peu à d'autres, où en est devancé. Sa vitesse diurne, constante sur l'équateur, lui fait décrire ce cercle dans l'année tropique, ce qui donne un peu moins d'un degré de marche vers l'est, chaque jour (59′ 8″ $\frac{1}{3}$. *V.* n°s 73 et 262). Cet astre fictif est appelé *Soleil moyen*; ses retours au méridien déterminent le *temps moyen*: le jour est formé de 24 heures constamment égales et régulières toute l'année. (*V.* l'*Uranographie*, p. 73, où cette théorie est expliquée, et le n° 31 ci-après.)

9. Comme l'uniformité des mouvemens est la condition essentielle des pièces d'horlogerie, on comprend qu'elles doivent être réglées de manière à marquer le *temps moyen*. Les pendules, montres, chronomètres, horloges, sont en effet composés pour cet objet. Cependant on peut, par un mécanisme très ingénieux, parvenir à hâter ou ralentir l'aiguille des minutes, de manière à lui faire suivre la marche du Soleil vrai. Ces pendules, appelées *à équation*, indiquent donc à la fois le temps vrai et le temps moyen, à l'aide de

deux aiguilles de minutes. On peut comparer les indications de ces pièces avec celles d'un bon cadran solaire; mais cet appareil compliqué est inutile à l'astronome, qui ne fait cas que de l'exacte précision des mouvemens, et l'on sent que la combinaison des rouages est ici une cause permanente d'irrégularités.

Ainsi les pendules à équation ne sont qu'une sorte d'exception. Les chronomètres, les pendules, indiquent le temps moyen, qui est leur régulateur général; et même aujourd'hui on ne se sert plus du temps solaire vrai à Paris, à Londres et en d'autres lieux : les horloges publiques y sont réglées sur le temps moyen. C'est donc toujours à ce temps qu'il faut rapporter les durées écoulées.

Dans les usages de la société, on ne compte les heures que de 0 à douze, de midi à minuit, après quoi on recommence de 0 à 12, de minuit à midi, et ainsi de suite. Le *jour civil* a encore 24 heures; mais on en forme deux périodes. Il diffère en outre du jour astronomique par son origine; car il commence à minuit, tandis que l'origine de ce dernier est à midi. Le jour civil compte ses 24 heures d'un minuit au suivant. La première période de $12^h$, de minuit à midi, s'appelle *le matin*; la 2ᵉ est *le soir*. Ainsi, quand on dit que le Soleil se lève le 21 avril à $5^h$ du matin *temps civil*, un astronome dit que le lever arrive le 20 avril à $17^h$, parce que, pour lui, le 20 avril commence à midi, et ne finit qu'à midi du 21, temps civil.

10. Ces trois espèces de durées sont employées dans la *Connaissance des Tems*, selon des circonstances que nous indiquerons dans la suite; mais le plus souvent on s'y sert du temps solaire vrai. Les levers et les couchers sont rapportés à ce temps (*).

(*) Comme maintenant les horloges publiques ne marquent plus que le temps moyen, il serait à désirer que la *Conn. des Tems* s'en servît, dans certain cas, de préférence au temps vrai. Il y a quelques années encore les usages civils étaient réglés sur le Soleil vrai; mais puisqu'avec raison on l'a

Comme les astronomes ont sans cesse besoin de convertir l'un de ces temps en l'autre, nous indiquerons dans la suite (nº 108) les procédés à suivre pour opérer ces conversions.

11. Les prédictions de lever et coucher ne sont vraies que pour Paris, ce qui les rend d'une importance médiocre, d'autant plus que l'on n'attend aucune précision de ces indications, qui ne sont faites qu'à une minute près. Cette partie de l'*Annuaire* n'a aucun intérêt pour le reste de la terre. D'ailleurs, un habitant de Paris, qui ne voit jamais l'astre à l'horizon, ne peut songer à régler sa montre sur l'instant de ce phénomène. Les heures données dans la *Conn. des Tems* ne servent guère qu'à apprendre si l'astre est levé ou couché à un instant où il se passe quelque évènement céleste pour Paris, tel qu'une éclipse, pour juger si elle sera visible en cette ville.

12. On sait que la réfraction élève, en apparence, les astres au-dessus de leur lieu véritable; près de l'horizon, cet effet va jusqu'à 33′ de degré, et même, selon M. Bessel, jusqu'à 36′. Nous voyons donc lever un astre un peu plus tôt qu'il ne nous apparaîtrait sans la réfraction : cette durée peut se calculer. Dans la *Conn. des Tems* on a tenu compte de cet effet, en sorte qu'on y lit l'heure civile du *lever apparent* du centre de l'astre, tel qu'on pourrait l'observer d'un lieu découvert. Ce sera plus tard le sujet de nos recherches. (*V.* ci-après, nº 219.)

Tout ceci doit s'entendre du lever et du coucher du Soleil et de la Lune. La parallaxe de ce dernier astre est si grande, qu'on ne peut manquer d'y avoir égard; et comme elle tend à abaisser la Lune au-dessous de son lieu réel, et

---

remplacé par le Soleil moyen, le temps vrai n'est plus d'usage qu'accidentellement.

Pour éviter les erreurs causées par la confusion des trois espèces de temps, il serait convenable que les têtes de colonnes de la *Conn. des Tems* indiquassent celle dont on y fait usage. Ainsi, on devrait y marquer

*Lever du centre du Soleil en temps civil vrai*,

et en faire autant pour les autres colonnes.

surpasse beaucoup la réfraction, nous ne voyons au contraire la Lune à l'horizon que quand elle est élevée au-dessus de ce plan. (*V.* n° 90.)

13. On n'a pas indiqué l'heure du lever le jour du premier quartier, ni celle du coucher le jour du dernier quartier; en voici la raison. Le retard du passage de la Lune au méridien est, en termes moyens, de $24^h\,50'\,\frac{1}{2}$; ce retard est aussi celui des levers et couchers, toute compensation faite de la marche en déclinaison. Il y a donc, dans la lunaison, un jour civil où la Lune ne se lève point, et un autre où elle n'a pas de coucher. On trouve, par exemple, en janvier 1830:

| Janv. | Lever. | Coucher. | Janv. | Lever. | Coucher. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | $11^h\,26'$ M. | $11^h\,57'$ S | 15 | $11^h\,17'$ S. | $10^h\,29'$ M. |
| 2 | 11.55 | ——— | 16 | ——— | 10.54 |
| 3 | 0.26 S. | 1. 5 M. | 17 | 0.17 M. | 11.20 |
| 4 | 1. 0 | 2.23 | 18 | 1.17 | 11.48 |
| 5 | 1.39 | 3.33 | 19 | 2.17 | 0.19 S. |
| | etc. | etc. | | etc. | etc. |

Le 17, la Lune se lève à 17′ après minuit, ce qui équivaut au 16, à $12^h\,17'$ temps astronomique; et comme elle s'était levée le 15, 43′ avant minuit, il s'était écoulé, d'un lever à l'autre, $25^h$: en sorte que dans l'intervalle de ces deux minuits, c'est-à-dire dans la durée du jour civil du 16 juillet, la Lune ne s'est pas levée; c'était l'époque du dernier quartier.

Pareillement, le coucher de la Lune qui vient après celui du 1er janvier (à $11^h\,57'$ du soir), arrive le 3 à $1^h\,5'$ du matin, c'est-à-dire le 2, à $13^h\,5'$ temps astronomique. Le retard du coucher a été de $25^h\,8'$ à cette époque du premier quartier, et c'est dans cet intervalle que se sont trouvés compris les deux minuits qui limitent le 2 en temps civil; il n'y a donc point de coucher ce même jour.

Du reste, le retard, soit des levers, soit des couchers, d'un jour à l'autre, varie avec la déclin. de la Lune et les inégalités de la marche de cet astre (*v.* n° 219), tantôt plus, tantôt moins; mais, à chaque lunaison, il y a toujours une date où l'on trouve un jour sans lever, et une autre où il n'y a pas de

coucher, ce qui arrive quand ce phénomène se trouve tomber d'abord un peu avant minuit, puis le lendemain un peu après.

Cette exposition explique le renversement qu'on doit faire, depuis le 1er jusqu'au dernier quartier, dans l'ordre de lecture des heures du lever et du coucher de la Lune, pour les énoncer comme ils arrivent successivement; car il faut, dans ce cas, lire le nombre de la seconde colonne avant celui du lever, pour que les phénomènes suivent leur ordre d'avènement.

Ainsi, en janvier 1830, on voit que la Lune se lève le 1er à $11^h\,26'$ du matin, et se couche le même jour, à $11^h\,57'$ du soir. Le 2, l'astre se lève à $11^h\,55'$ du matin (ou $5'$ avant midi), mais ne se couche que le lendemain matin (en temps civil), à $1^h\,5'$ de nuit. Le 3, il se lève $26'$ après midi, et il se couche le 4 à $2^h\,23'$ du matin; et ainsi de suite, en continuant de lire le nombre de la 2e colonne avant celui de la 1re, lequel se rapporte au lever suivant. On arrive ainsi à la date du 15, et l'on trouve que la Lune se lève à $11^h\,17'$ du soir, et se couche le 16, à $10^h\,54'$ du matin. Ce jour, elle ne se lève pas, et le plus prochain lever se fait le lendemain matin, $17'$ après minuit; le coucher arrive le même jour 17 à $11^h\,20'$ du matin, etc. L'ordre direct de lecture est rétabli.

14. *Longitude du Soleil.*

La longitude d'un astre L (fig. 11) est un arc AI d'écliptique AC, qui est compté depuis le point vernal ♈, tel qu'il se trouve placé chaque jour solaire; car on sait que la précession et la nutation font sans cesse varier ce point ♈ d'une petite quantité. L'autre limite de la longitude est le pied de l'arc LI, mené par l'astre, perpendiculairement à l'écliptique. Quand il s'agit du Soleil, cet arc perpendiculaire LI est nul (*), parce que le Soleil I ne sort pas de l'écliptique, en sorte que sa

(*) A proprement parler, les perturbations produisent une petite latitude, mais elle est si faible, qu'on n'en tient pas compte; elle ne dépasse guère 1". On trouve cette latitude dans les tables de M. Schumacher, exemple digne d'être imité.

longitude est sa distance AI au point ♈. On sait que le Soleil marche sans cesse de l'ouest à l'est sur l'écliptique, décrivant chaque jour un arc d'environ un degré (n° 73); ainsi, pour cet astre, la latitude est nulle, et la longitude va croissant à chaque instant. Dans la *Conn. des Tems*, cet arc est exprimé, pour chaque midi vrai, en *signes* (ou arcs de 30°), et en degrés, minutes et secondes (*).

La longitude du Soleil se tire des tables de Delambre, en tenant compte de toutes les perturbations et de l'aberration de la lumière. Nous exposerons plus tard la formation et l'usage de ces tables, n° 258.

Ainsi, on trouve à la date du 22 juin 1830, dans la colonne intitulée *longitude du Soleil*, $3^s 0° 28' 39''$ : cela signifie que cet astre a déjà traversé trois signes, savoir : *Aries*, *Taurus* et *Gemini*, et qu'il vient d'entrer dans le *Cancer*; il a donc un peu dépassé le solstice d'été. En consultant une carte céleste, telle que celle qu'on trouve dans l'*Uranographie*, on reconnaîtra que le Soleil nous paraît occuper au ciel un point situé près des pieds des Gémeaux; car les signes du Zodiaque, par l'effet de la précession des équinoxes, sont actuellement transportés chacun dans la constellation qui est à l'ouest de celle dont ce signe emprunte le nom.

15. La longitude AI du Soleil va sans cesse en croissant : on la tire des *Tables astronomiques*. (*V.* n° 258.) Cet arc sert aux astronomes à calculer les nombres de la seconde page de la *Connaissance des Tems*, ainsi qu'on va l'expliquer; car la longitude du Soleil est la base fondamentale des recherches de ce genre. Du reste, elle n'a guère d'usages directs, si ce n'est pour prédire les éclipses (n° 193), et dans les calculs des distances lunaires, pour la détermination des longitudes terrestres (n° 175).

Comme on pourrait désirer faire la vérification des données contenues dans la seconde page de la *Connaissance des Tems*,

(*) Il serait à désirer qu'on y trouvât encore les dixièmes de seconde, ce qui serait facile, puisque les calculs sont faits aux centièmes.

ou les obtenir avec une plus grande approximation, nous exposerons les procédés qui servent à les déduire de la longitude.

16. La longitude n'est donnée que pour chaque midi vrai ou apparent à Paris : lorsqu'on la demande pour une autre heure, il faut faire une interpolation analogue à celle qu'on emploie pour trouver le logarithme d'un nombre intermédiaire à ceux de la table, c'est-à-dire qu'on doit partager la différence entre deux longitudes consécutives proportionnellement à la durée écoulée depuis midi.

Soit $h$ l'heure proposée; prenez la différence $v$ entre les arcs de longitude qui répondent aux deux midis successifs entre lesquels tombe cette heure $h$, et posez cette proportion :

*Si* $24^h$ *donnent* v, *combien* h *heures donnent-elles?*

$$24 : v :: h : x; \quad x = \frac{vh}{24}. \qquad (1)$$

17. Observez qu'en multipliant les deux termes de la fraction $\frac{1}{24}$ par $2\frac{1}{2}$, on a $\frac{1}{24} = \frac{2\frac{1}{2}}{60}$, d'où $x = \frac{2\frac{1}{2} \cdot v}{60}$, en faisant $h = 1$, pour obtenir la marche du Soleil en longitude pendant une heure.

Ainsi, pour avoir le *mouvement horaire* du Soleil, ajoutez $v$ à lui-même et à sa moitié; puis, au lieu de diviser par 60, changez les degrés en minutes, les minutes en secondes et les secondes en tierces.

Si, par exemple, la différence $v$ est $57' 14''$, voici le calcul qui donne $143'' 5'''$ pour la marche en une heure; en divisant ensuite les 14 dixaines par 6 pour extraire les minutes entières, on trouve $2' 23'' 5'''$; enfin, divisant $5'''$ par 60 pour réduire en décimales de secondes (savoir 5 par 6, etc.), on trouve c'est le mouvement horaire demandé.

$$\begin{array}{r} 57' \; 14'' \\ 57 . 14 \\ \frac{1}{2} \ldots 28 . 37 \\ \hline 143'' \;\; 5''' \\ = 2' \, 23'',08 : \end{array}$$

18. Une fois ce mouvement horaire connu, il ne reste plus qu'à le multiplier par la durée des $h$ heures écoulées depuis midi. Ordinairement cette durée est donnée en heures, minutes

et secondes; on réduit ces fractions en décimales, et l'on opère à l'ordinaire.

Par exemple, on demande la longitude du Soleil le 3 juin 1830 à $6^h 54' 18''$ du soir, temps vrai de Paris, ou $6^h 54',3 = 6^h,905$. Je trouve dans la *Connaissance des Tems*,

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3 juin, longit. = | $2^s 12° 19' 43''$ | | |
| 4 ............ = | 2.13.17. 6 | Differ. $v$ = | 57′ 23″ |
| 143″46 (*V.* page 19.) | | | 57.23 |
| 6,905 | | | 28.41,5 |
| 860,76 | | Mouv. hor. = | 143″27‴5 |
| 129,11 | | A mult. par | $6^h$,905 |
| 71 | | | |
| 990,58 | = 16′ 30″,58 | | |
| Long. le 3 .. | 2.12.19.43 | | |
| Long. demandée. | $2^s 12° 30' 13''$,58. | | |

On peut encore opérer par les parties aliquotes.

| | |
|---|---|
| | 2′ 23″ 46 |
| A multiplier par.. | $6^h 54' 18''$ |
| $6^h$. . ........... | 14′ 20″ 76 |
| 30′. .............. | 1.11,73 |
| 20′. .............. | 47,82 |
| 4′. ............. | 9,56 |
| 15″ (le 16e). ...... | 0,59 |
| 3″. ............. | 0,12 |
| Mouv. demandé.... | 16.30,58, en $6^h 54' 18''$. |

Les deux procédés que nous venons d'exposer conduisent également au résultat. L'appareil de chiffres est assez grand, mais les opérations sont faciles, et l'on ne peut guère s'y tromper. Les calculs ont été poussés jusqu'aux centièmes de seconde pour en montrer la marche; mais on les abrège en se bornant aux dixièmes, ce qui est très suffisant; car la longitude du Soleil n'étant donnée qu'à la seconde, l'interpolation ne peut même faire trouver exactement la longitude aux dixièmes près.

19. On préfère ordinairement opérer par logarithmes, ainsi qu'il suit. On réduit les facteurs de l'équation (1) en secondes,

savoir $h$, $\nu$ et $24^h$; et d'abord $24^h = 86400''$,

$$\log 24^h = 4.9365137 \quad \text{compl.} = \bar{5}.0634863,$$

le — placé au-dessus du 5, iudique que cette caractéristique est seule négative et doit être retranchée, au lieu d'être ajoutée, et réciproquement.

Quant à la réduction de $h$ et $\nu$ en secondes, aucun calcul n'est nécessaire, parce qu'il se trouve tout fait dans l'une des colonnes des tables de Callet. Chaque page destinée à donner *les log. des nombres* présente, à la gauche de celle des *nombres*, deux colonnes où l'on indique les arcs qui, réduits en secondes, produisent ces nombres; le log. de ce nombre est le même que celui de l'arc exprimé en secondes, sauf à *prendre* 3 *pour caractéristique, quand l'arc est dans la première colonne de la page, et* 4 *lorsqu'il est dans la deuxième.*

Par exemple, au nombre 2485, répond dans la deuxième colonne à gauche, l'arc 6° 54′ 10″; les 6° se lisent en tête de la colonne, les 54′ plus bas, en gros caractères, puis les secondes de 10 en 10. Ainsi, pour réduire en secondes l'arc 6° 54′ 18″, on aura 24858″; et pour avoir le log. de cet arc, on prendra celui de ce nombre, à la manière accoutumée. Mettant 4 pour caractéristique, il vient 4.3954662 pour le log. de l'arc 6° 54′ 18″ exprimé en secondes. Les trois premiers chiffres 395 se prennent, comme on sait, hors ligne, et les quatre derniers dans la colonne qui porte en tête les unités 8. Et si l'arc eût été 6° 54′ 18″,47, on aurait cherché la partie proportionnelle additive 82 provenue de 0,47, dans la petite table des *différences*, qui donne les dixièmes de la différence logarithmique: on aurait donc eu pour log. de l'arc proposé = 4.3954744 = log 24858″,47.

Bien que l'on puisse trouver dans la colonne des nombres l'arc réduit en secondes, lorsqu'on n'en veut que le log., il n'est nullement nécessaire d'y lire ce nombre de secondes; on n'a besoin que de chercher l'arc dans la deuxième colonne, et son log. dans la table, là où il se trouve être en correspondance avec l'arc.

Pareillement, au nombre 3443, répond l'arc 0° 57′ 23″, dans la 1^re colonne ; on lit encore 0° en tête, les 57′, en haut, un peu au-dessus de 0°; puis les secondes sont indiquées de 5 en 5 dans la colonne, de manière qu'on lit 20″, et que les 23″ sont trois lignes plus bas. On voit donc que l'arc 0° 57′ 23″ exprimé en secondes vaut 3443″, et que le log. se trouve dans la colonne 0 des log., savoir log. 3443″=log. 0°57′23″=3.5369370.

Et si l'on avait 0° 57′23″,47, on prendrait les quatre derniers chiffres dans la colonne 4, et pour le 7, on chercherait la partie proportionnelle relative à 0,7 : enfin, on ferait comme pour le nombre 3443″,47, savoir, log = 3.5369963.

On voit pourquoi la caractéristique n'est que 3, quand l'arc est pris dans la 1^re colonne, tandis qu'elle est 4 dans la 2^e.

Réciproquement, quand le log. est donné, on trouve, dans la colonne des nombres, l'arc correspondant exprimé en secondes, et dans la 1^re ou la 2^e colonne (suivant que la caractéristique est 3 ou 4) cet arc en degrés, minutes et secondes. Il est inutile d'en donner des exemples, cette opération étant l'inverse de la première.

D'après cela, voici le calcul de l'exemple précédent, en se servant des log. et sans chercher le mouvement horaire :

| | |
|---|---|
| $h = 6^h 54' 18''$ ....... | 4.3954662 |
| $\mu = 0° 57' 23''$ ....... | 3.5369370 |
| Comp. log $24^h$ ..... | 5.0634863 |
| Nombre = 990″,58 .. | 2.9958895. |

Divisant 99 par 6 pour extraire les minutes entières, on trouve 16′ 30″,58, comme ci-devant.

Observez que dans cet exemple, si la caractéristique eût été 3 ou 4, on n'aurait pas eu besoin d'écrire le nombre de secondes de l'arc et d'en extraire les minutes et les degrés entiers, parce que l'on aurait trouvé directement cet arc dans la 1^re ou la 2^e colonne de la table (*).

(*) La table ne s'étend que depuis l'arc de 17′ jusqu'à 30° ; mais on peut encore s'en servir hors de ces limites, car,

1°. Si l'arc est < 17′, outre qu'il est bien aisé de multiplier les minutes par

Si, au lieu d'un arc, on a une durée exprimée en heures, minutes, etc., pour en trouver le log. en secondes de temps, tout ce qu'on vient dire s'applique exactement : en effet, l'heure se divise en 60′ comme le degré, etc.; c'est ce qui a été fait dans l'exemple précédent.

Nous aurons, par suite, de nombreuses occasions d'employer ce procédé, qui est très expéditif.

20. Lorsque la longitude du Soleil est demandée, pour une heure évaluée sous un autre méridien que celui de Paris, il faut chercher l'heure vraie comptée au même moment en cette ville, et opérer pour cet instant. Or, pour avoir cette heure de Paris, il faut, à celle qu'on donne, *ajouter la différence des méridiens en temps :* une longitude terrestre à l'est de Paris est censée affectée du signe —; ainsi, l'addition se change alors en soustraction. En général, toute station à l'est de Paris compte midi avant cette ville, et le chronomètre qu'on aurait mis à l'heure de Paris, retarderait sur le méridien de cette station. Le contraire arrive pour les lieux situés à l'ouest de Paris.

Quelle est la longitude du Soleil le 30 octobre 1830, à $5^h 40'$ du soir au méridien de Strasbourg? La longit. de cette ville est $-21'38''$ de temps, parce qu'elle est orientale; ainsi, en retranchant, on a $5^h 18' 22''$ pour l'heure correspondante de Paris, ou $5^h,306$. Voici le calcul par nos deux procédés.

---

6, pour en faire des dixaines de secondes, et, par suite, d'avoir l'expression de l'arc en secondes, les premières pages de la table des log. de Callet (Chiliade I) donnent les minutes en tête des colonnes, et les secondes, de 10 en 10, se trouvent au-dessous. La caractéristique n'est plus alors que 2. Ainsi, pour 13′ 24″, le log. est 2.9052605, qui répond au nombre 804″. Cette partie de la table ne convient plus dès que l'arc a des fractions décimales de seconde.

2°. Si l'arc passe 30°, on change les ° en ′, les ′ en ″, etc.; et, comme cela revient à diviser cet arc par 60, on ajoute à son log. celui de 60, qui est $\log 60 = 1.7781513$. Par exemple, pour 36° 54′ 22″,8, je prends le

$$\begin{aligned}\text{log. de } 0°36'54'',38\text{, qui est} \ldots\ldots\ldots\ldots &= 3.3452523\\ \log 60 &= 1.7781513\\ \hline \log 36°54'22'',8 &= 5.1234036.\end{aligned}$$

Le 30 octobre 1830, longit. ⊙ à midi vr. = 7ˢ 6° 33′ 50″.
Diff. en $24^h$, $v = 1° 0′ 2″$.

1ᵉʳ *Procédé.*

1° 0′ 2″.
1. 0.2 Mouv. hor.
0.30.1
2′ 30″ 5‴ = 150″,08
5,306
750,40
45,02
90
13′ 16″ 32 = 796,32.

2ᵉ *Procédé.*

| | |
|---|---|
| 1° 0′ 2″...... | 3.5565437 |
| $5^h$ 18′ 22″...... | 4.2810788 |
| comp. $24^h$...... | 5.0634863 |
| 796″,35. ...... | 2.9011088 |
| ou............ | 13′ 16″,35 |
| A midi = | 7.6.33.50 |
| Long ⊙ = | 7.6.47. 6,35 |

21. La dernière colonne de la première page de la *Conn. des Tems* donne l'âge de la Lune à chaque date du mois, en comptant 1 le jour civil de la nouvelle Lune vraie, si elle arrive avant midi, et le lendemain, si elle vient après midi. Ainsi en oct. 1830, la néoménie arrive le 16 après midi; on ne compte pour 1ᵉʳ jour de la Lune que le 17, depuis minuit du matin jusqu'au minuit du soir (temps civil). En septembre, la nouvelle Lune est le 17 à $2^h$ 38′ du matin; c'est donc ce 17 d'un minuit à l'autre qui est donné pour le 1 de la Lune.

Les autres dates lunaires s'en suivent, la lunaison se trouvant avoir à peu près, tantôt 30, tantôt 29 jours, alternativement. Ces dates ne sont pas employées en Astronomie : on ne les donne guère que pour l'usage des almanachs; le public attache de l'importance à les connaître, soit pour savoir si la Lune éclairera certaine nuit, soit pour donner carrière aux prédictions d'événemens politiques ou atmosphériques, que les préjugés populaires attribuent aux influences de cet astre.

22. On lit, au bas de la 1ʳᵉ page, les dates des phases lunaires, et l'heure de temps vrai où elles arrivent. Voici comment on trouve ces nombres. A la néoménie, il y a conjonction; à la pleine Lune, opposition; le 1ᵉʳ et le dernier quartier sont les quadratures : cela signifie qu'en comparant la longitude du Soleil à celle de la Lune, on les trouve égales lors de la *néoménie,* différentes de 180° à la *pleine Lune,* de 90° au 1ᵉʳ *quar-*

*tier*, de 270° au *dernier quartier*. Il s'agit donc d'avoir l'heure vraie où l'une de ces circonstances arrive. C'est ce que nous exposerons après avoir donné le moyen de connaître la longitude de la Lune à une époque désignée. (*V.* n° 86.)

*Seconde page de chaque mois.*

23. En correspondance avec chaque date, on lit des nombres rangés en trois colonnes, dont nous allons expliquer le sens.

Soit ACBE (fig. 11) l'écliptique, cercle céleste que le Soleil nous semble parcourir en une année; ARDBO l'équateur céleste : les plans de ces cercles font entre eux un angle A qu'on appelle *obliquité de l'écliptique ;* nous désignerons cet angle par $\omega$, selon l'usage reçu de tous les astronomes. Les points A et B d'intersection sont les équinoxes : A est le point vernal ♈, origine de toutes les longitudes et de toutes les ascensions droites, comptées de ♈ vers SICBE pour les 1res, et vers RDBO pour les autres, en faisant le tour entier, ou de 0° à 360°. Le Soleil étant supposé situé en S, AS est sa longitude; abaissant l'arc SR perpendiculaire à l'équateur AR, AR est l'ascension droite; l'arc SR est la déclinaison. Nous désignerons ainsi ces arcs coordonnés, $l = AS$, $Æ = AR$, $D = SR$.

En résolvant le triangle sphérique ASR, qui est rectangle en R, et dont l'angle $A = \omega$, les formules ordinaires de la Trigonométrie (équ. $q$ et $n$, page 3) donnent

$$\text{tang}\, Æ = \text{tang}\, l \cos \omega, \ldots \qquad (2)$$

$$\sin D = \sin l \sin \omega \ldots \qquad (3)$$

Ces équations reviennent à celles-ci :

*tang. asc. dr. vr.* = *tang. long. vr.* × *cos. obliq. appar.*

*sin. déclin. vr.* = *sin. long. vr.* × *sin. obliq. appar.*

Les mots *vrai*, *apparent*, dont nous nous servons ici, signifient qu'il s'agit de la position du Soleil vrai, et que l'obliquité $\omega$, qui entre dans ces équ., est celle qui a réellement lieu en tenant compte de la *nutation*. (*V.* ci-après, n° 77.)

24. On comprend comment on tire, de la longit. du Soleil vr. chaque jour à midi vr., son asc. dr. et sa déclin. La 1re s'exprime toujours en temps sidéral, en évaluant cet arc à raison de 15° par heure. Ce qui a été dit n° 8 suffit pour comprendre que cette asc. dr. est l'heure que doit marquer une pendule à midi vr., quand elle est réglée sur le temps sidéral.

Tant que la longitude est $< 6$ signes, l'asc. dr. est $< 180°$ ou $12^h$, et la déclin. est positive ou boréale, parce que le Soleil est au-dessus de l'équateur ARB : c'est ce qui a lieu au printemps et en été. Quand l'astre arrive en A ou en B, aux équinoxes, la déclin. est nulle; la longitude est 0 ou 180°, ainsi que l'asc. dr. Enfin, dès que la longitude surpasse 180° ou 6 signes, l'asc. dr. est $> 12^h$, et la déclin. négative ou australe, ce qui a lieu depuis l'équinoxe d'automne jusqu'à celui de printemps, pendant les 6 mois d'automne et d'hiver.

Aux solstices, la longitude est 90° en été, 270° en hiver, ou 3 signes et 9 signes; l'asc. dr. est $3^h$ ou $9^h$; la déclin. est égale à l'obliquité $\omega$ : c'est la plus grande valeur que puisse prendre la déclinaison solaire.

25. Au lieu de donner l'asc. dr. du Soleil en temps sidéral, la *Conn. des Tems* indique le compl. de cet arc à $24^h$, sous le titre de *Distance de l'équinoxe au Soleil*. Ce n'est point l'arc AR qu'on entend par cet énoncé, mais l'arc RDOA, en faisant le tour de l'équateur, pour achever le reste de ce cercle et revenir en A. Par la suite, nous désignerons par $\odot\Upsilon$ cette distance du Soleil à l'équinoxe; ainsi on a l'équation

$$\odot\Upsilon = 24^h - Æ.$$

26. D'après cela, il est clair que l'on peut toujours substituer $\odot\Upsilon$ à Æ dans les calculs, et réciproquement, pourvu qu'on prenne l'arc substitué en signe contraire : car les $24^h$ qu'il faudrait ajouter ou retrancher, selon les occasions, sont sans importance, puisqu'on est en droit de le faire toutes les fois que le calcul le rend nécessaire. C'est au reste ce dont on jugera mieux par la suite.

On a préféré donner, dans la *Conn. des Tems*, la distance du

Soleil à l'équinoxe à son ascension droite, qui en est le compl. à $24^h$, parce que, d'après la règle ordinaire des complémens arithmétiques, au lieu de soustraire l'asc. dr., il faut ajouter ☉♈; or, c'est là ce qu'on se trouve conduit à faire, lorsqu'on cherche l'heure moyenne ou vraie du passage d'une étoile au méridien (n° 114); et l'on a pensé que l'addition était plus commode à faire qu'une soustraction (*).

27. Les équ. du n° 23 sont employées par les calculateurs de la *Conn. des Tems* pour déterminer les nombres des colonnes intitulées *asc. dr. et déclin. du Soleil*. On ne pourrait être conduit à appliquer ces formules qu'autant qu'on soupçonnerait quelque erreur dans cet ouvrage, ou pour obtenir ces arcs avec plus de précision qu'il n'en donne; mais dans ces cas, il faudrait d'abord trouver la valeur actuelle de l'obliquité $\omega$ de l'écliptique (n° 77), pour le jour proposé : la longitude du Soleil est connue; ainsi, il ne resterait plus qu'à faire le calcul par logarithmes.

Par exemple, le 2 octob. 1836, la longitude du Soleil à midi vr. est $= 6^s 8° 45' 30''$; l'obliquité $\omega = 23° 27' 33'',6$; on demande l'asc. dr. et la déclin. de cet astre. Voici le calcul (**) :

---

(*) Dans la *Conn. des Tems*, on appelle cet arc *distance de l'équinoxe au Soleil;* il me semble préférable de l'intituler *compl. à $24^h$ de l'asc. dr.* ☉ *en temps sid.*, ou *compl. du temps sid. à midi vr.* : cet énoncé serait plus significatif. Au reste, on ferait mieux de donner l'asc. dr. du Soleil, ou le *temps sidéral à midi vr.*; car s'il est plus commode d'employer son compl. à $24^h$ dans un cas, c'est le contraire dans un autre. Dès qu'on doit retrancher l'asc. dr. ☉, il faut ajouter l'arc ☉♈ ; mais, réciproquement, il faut ajouter l'asc. dr. ☉ quand on devrait retrancher ☉♈. Après tout, ce n'est que pour remplacer, dans quelques cas, la soustraction par l'addition, qu'on a cru devoir préférer la distance ☉♈ à l'asc. dr. du Soleil; ce n'était pas la peine de changer un usage généralement adopté des astronomes, pour une cause aussi légère.

(**) Dans les tables de logarithmes, celui du rayon est 10,0000000. Pour se servir de ces tables et les appliquer aux formules dans lesquelles le rayon est appelé d'une lettre R, il suffit donc de faire log R = 10.

Mais le plus ordinairement, pour simplifier les calculs algébriques, on y prend le rayon égal à l'unité, ou R = 1; alors il faut, lorsqu'on veut y appliquer les tables de logarithmes, user de l'un de ces deux moyens :

| | |
|---|---|
| $\cos\omega$..... 9.9625316 | $\sin\omega$..... 9.5999900 |
| tang $L$.... 9.1877001 | $\sin l$..... 9.1826062 — |
| tang Æ... 9.1502317 | sin D. ... 8.7825962 — |

Dans la valeur de $l$, on ôte les 6ˢ, et l'on prend seulement $l = 8^\circ\ 45'\ 30''$; mais on ajoute 180°, ou $12^h$, à l'asc. dr. obtenue, et l'on prend D négatif, ou la déclin. australe. On a donc

$$Æ = 188^\circ\ 2'\ 39'',43, \qquad D = -3^\circ\ 28'\ 30'',87.$$

Pour réduire l'asc. dr. en temps, on prend le rapport de 15° par heure, c'est-à-dire qu'on divise par 15, ou plutôt, on multiplie par 4, et l'on change les degrés en minutes, les ′ en ″, etc..., ainsi qu'il sera expliqué plus tard, n° 72. On obtient donc

$$Æ = 12^h\ 32'\ 10'',63, \qquad \text{compl.} = \odot\Upsilon = 11^h\ 27'\ 49'',37.$$

1°. *Faire en sorte que le rayon des tables soit un*, *en retranchant* 10 *de tous les log.*, ce qui donne ordinairement une caractéristique négative : les log. ont alors pour partie entière $\bar{1}$ au lieu de 9, $\bar{2}$ au lieu de 8.... Les opérations à faire sur ces parties négatives sont aussi aisées que sur les positives, et l'on acquiert aisément l'habitude que cette pratique exige. C'est ainsi que sont disposés tous les calculs numériques de l'*Uranographie*. (*V.* cet ouvrage.) Nous n'aurons pas recours, dans ce qui suit, à ce procédé.

2°. Le second moyen consiste à distribuer le facteur R et ses puissances partout où il en est besoin, pour que la formule soit *homogène*, c.-à-d. composée de termes qui aient mêmes *dimensions*. Voici comment il faut entendre cette expression. S'il s'agit d'un monome, la *dimension* est le nombre des facteurs du numérateur, moins celui du dénominateur. Pour les polynomes, le numérateur de la fraction doit être homogène, et il faut aussi que le dénominateur le soit ; on retranche la dimension du dénominateur de celle du numérateur, et le reste est la dimension du polynome. Enfin, si la quantité est affectée d'un radical, il faut diviser la dimension de cette quantité par le degré du radical.

On comprend qu'on doit diviser par R les seconds membres des équ. (2) et (3), pour qu'ils n'aient qu'une seule dimension, comme le premier membre. Ainsi, il faut retrancher 10 de la somme des log.

Ces puissances de R s'ajoutent de mémoire, et sans rien écrire. La suite nous en donnera de nombreux exemples.

7

C'est ce compl. à $24^h$ qui est inscrit dans la *Conn. des Tems*, mais avec une moindre approximation.

28. Les dist. ⊙♈ et les déclin. sont accompagnées d'une colonne de *différences entre ces nombres consécutifs;* c'est la variation éprouvée par ces arcs en $24^h$ vraies, ou *la marche diurne* en asc. dr. et en déclin. Nous allons bientôt en montrer l'usage.

Il faut observer que l'asc. dr. du ⊙ augmente sans cesse, et que par conséquent son compl. à $24^h$ va en diminuant; ainsi la dist. ⊙♈ décroît toujours. La colonne différence exprime donc la quantité variable dont ces dist. ⊙♈ décroissent chaque jour.

Quant à la déclin., depuis l'un des équinoxes ♈ jusqu'à l'autre ♎, elle est boréale; elle devient australe depuis ce dernier jusqu'au $1^{er}$. La déclin. croît depuis la longitude 0 jusqu'à 90°, pour décroître de 90° à 180°, restant toujours positive, au printemps et en été. Au-delà, elle devient négative ou australe, en automne et en hiver; elle recommence à croître depuis la longitude 180° jusqu'à 270°, et diminue ensuite jusqu'à 360°.

**Il faut faire attention à ces changemens dans tout ce qui sera dit par la suite.**

29. La distance ⊙♈ et la déclin. ne sont données que pour l'heure de midi vrai de Paris; si l'on veut l'obtenir pour une autre heure, ou un autre lieu, il faut opérer précisément comme on l'a fait n$^{os}$ 16 à 20, en se servant de l'équation (1), page 33, c'est-à-dire en répartissant la marche diurne proportionnellement au temps écoulé depuis midi. L'exemple suivant indiquera la marche du calcul.

On demande l'asc. dr. et la déclin. ⊙ le 5 août 1830, à $10^h 22'$ du soir, t. vr. de Brest. La longitude de cette ville est $26' 16''$ en temps, à l'ouest de Paris; ajoutons, il vient $10^h 48' 16''$ pour l'heure comptée à Paris à l'instant désigné. Il s'agit donc de faire le calcul pour cette heure, après le midi vrai du 5 août, à Paris. On trouve dans la *Conn. des Tems*, à cette date,

| | Dist. ⊙♈. | Déclin. bor. |
|---|---|---|
| | $15^h\ 0'\ 11'',6$ | $17°\ 4'\ 22''$ |
| Diff. en 24[illegible]...... | — $3'\ 50'',5$ ......... | — $16'\ 18''$. |

On suit l'un des deux procédés suivans, exposés p. 33 et 36.

1^er^ *Procédé.*

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | 3′ 50″ 5 | | 16′ 18″ | |
| | 3.50,5 | ... | 16.18 | ... |
| Moitié..... | 1.55,25 | 10^h^806 | 8. 9 | 10,806 |
| Par heure.. | 9″ 36‴ 25 = | 9″ 604 | 40.45 = | 40″ 75 |
| | | 97,254 | | 432,24 |
| | | 6,484 | | 7,56 |
| | | 43 | | 54 |
| | — 1′ 43″ 8 = | 103″ 781 | — 7′ 20″ 3 = | 440,34 |
| | 15. 0.11,6 | | 17. 4.22,0 | |
| | 14.58.27,8 = ⊙♈ | | + 16.57. 1,7 = D. | |

On a retranché les variations obtenues, parce que ⊙♈ et D vont en décroissant.

2^e^ *Procédé.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| 3′ 50″,5 = 230″,5... | 2.36267 | 16′ 18″.... | 2.99034 |
| 10^h^ 48′ 16......... | 4.58990 | ..................... | 4.58990. |
| Comp. de 24^h^.... | $\bar{5}$.06349 | ..................... | $\bar{5}$.06349 |
| 103″,8... | 2.01606 | 440″,3... | 2.64373. |

30. Quelquefois l'heure proposée est un peu avant midi de Paris; il est alors plus facile de calculer la marche de l'astre pendant cette durée, et de l'apliquer en sens contraire, au lieu de la rapporter au midi précédent.

Ainsi, pour avoir la dist. ⊙♈, 1^h^ 11′ 44″ avant midi du 5 août 1830, on a

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Mouvement en 1^h^ = | 9″ 604, | ou bien | 3′ 50″,5....... | 2.36267 |
| 1^h^ 11′ 44″....... = | 1,195 | | 1^h^ 11′ 44″.... | 3.63387 |
| | 9,604 | | Comp. 24^h^... | $\bar{5}$.06349 |
| | 960 | | 11″,48........ | 1.06003 |
| | 864 | | comme ci-contre. | |
| | 48 | | | |
| A ajouter à ⊙♈.. | 11″ 476; | parce que cet arc croît en rétrogradant. | | |
| | 15.0.11,6 | | | |
| | 15.0.23.08 = ⊙♈ demandé (*). | | | |

(*) Dans les Éphémérides de M. Schumacher, au lieu de donner la diffé-

Les centièmes de seconde sont inexacts, puisque l'arc ☉♈ n'est donné qu'aux dixièmes ; pour la déclin., les dixièmes seraient fautifs, par la même raison. Dans les observations, les dixièmes de seconde sont très douteux ; mais dans les calculs on les conserve toujours, sauf à les négliger après coup, pour ne pas augmenter les erreurs d'observations, de celles qui proviennent des calculs (*).

31. La dernière colonne de la seconde page est formée de l'*équation du temps* et de ses différences diurnes ; elle porte le titre de *temps moyen à midi vrai*, parce qu'en effet c'est l'heure que doit marquer une pendule réglée sur le temps moyen, à l'instant où le centre du Soleil vrai est au méridien.

Rappelons ici les principes qui déterminent le temps moyen. On substitue, par la pensée, au véritable Soleil, dont la course annuelle se fait sur l'écliptique, avec une marche inégale, un Soleil fictif qui parcourrait l'équateur en un an, par un mouvement uniforme. Voici comment la situation de cet astre hypothétique est déterminée à chaque instant.

Imaginez un mobile qui parcourrait uniformément l'écliptique dans la durée de l'année tropique, partant en même temps que le Soleil vrai de l'apogée et du périgée de cette orbite. Dans l'intervalle, ce mobile devancera ou suivra l'astre, pour que, conservant sans cesse une vitesse constante, il remplisse la condition imposée. Chaque jour sidéral, il aura décrit le même arc, et son lieu, distant de l'é-

---

rence entre les déclin. d'un midi à l'autre, on lit le log. de cette différence, ou plutôt log $\mu$, $\mu$ désignant la somme des variations de déclin. en deux jours, savoir, le jour proposé et la veille. Ce nombre $\mu$, d'après la remarque de M. Gauss, peut être considéré comme le double de la marche diurne en déclin., ou le mouvement en $48^h$, et log $\mu$ sert à trouver la déclin. pour une heure donnée. Il serait bon d'imiter cette pratique.

(*) Ce serait faire une chose très utile que de donner dans la *Conn. des Tems* les asc. dr. du Soleil aux centièmes de seconde, et les déclin. aux dixièmes. C'est ainsi que les tables de MM. Schumacher, Encke, etc., sont composées.

quinoxe ♈ d'un arc appelé *longitude moyenne*, différera plus ou moins de celui du Soleil, selon l'époque de l'année.

Concevez maintenant un Soleil fictif, appelé *Soleil moyen*, qui décrirait uniformément l'équateur en un an, de manière à se trouver éloigné du point ♈ d'un arc précisément égal à celui de notre mobile, lequel décrit uniformément l'écliptique, savoir,

*Longitude moyenne* = *asc. dr.* ☉ *moyen.*

Ce sera ce Soleil imaginaire qui déterminera le temps moyen; chaque jour il sera midi moyen à l'instant où ce Soleil passera au méridien. Dans les mesures de la durée, on substitue ce Soleil fictif au véritable, lorsqu'on veut avoir des temps égaux pour des arcs décrits égaux; c'est ce qui arrive à nos pièces d'horlogerie, dont la marche est uniforme. Le temps sidéral et le temps moyen le sont l'un et l'autre; mais celui-ci, qui s'éloigne peu du temps vrai dans ses plus grands écarts, est regardé comme plus convenable pour mesurer les durées qu'on veut accorder avec les besoins de la vie, parce que les travaux de l'homme sont réglés spécialement sur le Soleil vrai. (*V.* l'*Uranographie*, n[os] 72 et 388, où ces notions sont développées avec plus d'étendue.)

32. D'après cela, on est convenu d'appeler *équation du temps* l'excès de l'heure moyenne sur l'heure vraie :

*Equ. du temps* = *heure moyenne* — *heure vraie*. (4)

Les astronomes appellent du nom d'*équation* les petites quantités qu'il faut ajouter à celles qui résultent d'une irrégularité hypothétique, pour les ramener à celles qui existent en effet. Cette partie régulière est toujours facile à calculer, à raison de son uniformité; et la correction qu'elle doit subir pour se trouver d'accord avec les phénomènes est cherchée à part, pour l'appliquer, sous le titre d'*équation*, au résultat primitif, qui n'est qu'une première approximation.

On peut encore dire que

*Equ. du temps* = *asc. dr. vr.* ☉ — *asc. dr. moy.* (5)

En traitant des tables solaires, nous montrerons comment on peut obtenir les deux termes du 2[e] membre, dont la diff. est l'équation du temps. Nous dirons seulement ici que pour trouver, par l'observation, l'équation du temps, il suffit d'obtenir l'asc. dr. vr. en temps, et d'en retrancher l'asc. dr. moy., toujours facile à calculer (n° 106). C'est cette différence qui est donnée dans la dernière colonne de la 2[e] page du mois. L'équation du temps est toujours exprimée en temps moyen.

33. Observez que si le Soleil vrai précède celui dont le mouvement est uniforme, décrivant l'équateur, le Soleil vrai avance, et l'équation du temps est négative ; si au contraire le Soleil vrai retarde, l'équation est positive. C'est ce qui résulte de l'équation (4).

Dans la *Conn. des Tems,* on a jugé à propos de remplacer ces nombres négatifs par leur complément à $12^h$. Ainsi, le 2 août 1830, on trouve que l'équation du temps est $5' 57'',3$ ; cela signifie que la pendule de temps moyen marque $5' 57'',3$ à midi vrai de Paris, ou que le Soleil moyen avance d'autant sur le véritable. Et le 2 novembre, on lit $11^h 43' 43'',7$ pour l'heure de la pendule moyenne à midi vrai de Paris, ce qui indique $16' 16'',3$ de retard du temps moyen sur le Soleil vrai ; en sorte que l'équation du temps est $-16' 16'',3$ (*).

34. Concluons de là que la 3[e] colonne indique l'équ. du temps toutes les fois qu'elle est positive (sa valeur numérique surpasse $0^h$ de $0'$ à $16'$) ; mais lorsque cette équ. est négative, on lui substitue son compl. à $12^h$ (le nombre indiqué est alors

(*) Il me paraît tout aussi simple d'indiquer les équ. du temps négatives, que d'en donner le compl. à $12^h$ ; une soustraction de nombres très peu composés est tout aussi facile à faire qu'une addition ; et d'ailleurs ce compl. n'évite la soustraction que dans certains cas, pour la faire reparaître dans d'autres où elle n'aurait pas lieu, en se servant des nombres négatifs. Toutes les éphémérides étrangères sont rédigées ainsi que nous le demandons, et l'on n'a pas trouvé qu'elles fussent d'un usage plus difficile que les nôtres ; elles ont au moins l'avantage de l'uniformité théorique.

entre $11^h$ et midi), en sorte qu'il faut, pour avoir cette équ., retrancher ce nombre de $12^h$, et prendre la différence avec le signe —.

35. Si l'on veut vérifier par le calcul le nombre indiqué dans la 3<sup>e</sup> colonne de la 2<sup>e</sup> page, il faut donc, d'après l'équ. (5), prendre l'asc. dr. vraie dans la 1<sup>re</sup> colonne, et en retrancher l'asc. dr. moy., que nous enseignerons à calculer plus tard (n° 106).

C'est ainsi que le 14 novembre 1830, on a pour midi vrai à Paris,

| | | |
|---|---|---|
| Asc. dr. vr... | = | $15^h 16' 49'' 40$ |
| — Asc. dr. moy. | = — | 15.32.17,08 |
| Éq. du temps. | = — | 15.27,68 |
| Temps moy. à midi vr. | = | 11.44.32,32 = compl. à $12^h$. |

Ce procédé de calcul est aussi usité pour trouver, au contraire, l'asc. dr. moy., lorsqu'on connaît l'asc. dr. vr. et l'équ. du temps. (*V.* ci-après, n° 104.)

36. L'équation du temps sert à traduire l'heure de temps vrai en temps moyen, et réciproquement, d'après l'équ. (4).

Il suit de ce qu'on vient de dire qu'*on peut toujours substituer le temps moyen à midi vrai à l'équation du temps;* mais il faut observer que lorsque cette première quantité est entre $11^h$ et $12^h$ (le Soleil vrai retarde sur le moyen), comme l'équation du temps en est alors le compl. à $12^h$, pris en —, savoir,

*Equ. du temps* = *temps moy. à midi* — $12^h$,

il faut retrancher $12^h$ du résultat si l'on a ajouté, et ajouter $12^h$ si l'on a retranché l'équ. du temps.

37. Comme la *Conn. des Tems* ne donne l'équ. du temps que pour midi vrai ou apparent au méridien de Paris, si l'on veut l'obtenir à une autre heure, il faut *interpoler*, c'est-à-dire répartir la différence diurne proportionnellement au temps écoulé, comme on l'a fait n°s 16 et 29.

Par exemple, un phénomène a été vu le 29 novembre 1830, l'heure vraie étant . . . . . . . . . . 13$^h$23′17″6

| | |
|---|---|
| Temps moyen à midi vrai. . . . . . . . . | 11.48.27,4 |
| Corr. pour 13$^h$23′,6. . . . . . . . . | + 11,9 |
| Somme — 12$^h$; heure moy. de l'observ. . . . . . . | 13.11.56,9. |

Voici le calcul de correction pour 13$^h$,39 :

| | | |
|---|---|---|
| Var. diurne. . . . . 21″3 | | 13,39 (*V.* p. 33.) |
| 21,3 | | 0,888 |
| Moitié. . . . . . 10,7 | | 10,712 |
| En 1 heure. . . . . . 53‴3 = 0″,888 | | 1,071 |
| | | 107 |
| | Corr. pour 13$^h$,39. . . . . . . . | 11,890. |

38. Au bas de la seconde page du mois, la *Conn. des Tems* donne l'arc qui exprime la grandeur du demi-diamètre du Soleil, le 1 et le 16; mais cet arc étant indiqué, à la 7$^e$ page du mois, pour des époques plus rapprochées, nous ne nous en occuperons pas ici. (*V.* n° 51.)

*Troisième et quatrième pages du mois.*

39. On trouve la longitude de la Lune, sa latitude, son asc. dr. et sa déclinaison pour chaque jour à midi et minuit vrais de Paris. Les deux premières coordonnées sont tirées des tables lunaires de Burckhardt, qui sont aussi exactes que le permet l'état actuel de l'Astronomie. La position d'un astre quelconque sur la voûte céleste est déterminée par l'un ou l'autre de ces deux systèmes d'arcs coordonnés.

Soit L la Lune ou tout autre astre (fig. 11). Si l'on abaisse l'arc LI perpendiculaire à l'écliptique ACB, LI sera la latitude, et AI la longitude comptée du point vernal ♈, actuellement en A. La situation de l'astre L est donc fixée par ces deux arcs $AI = l$, $LI = \lambda$. Si l'on mène l'arc $Lr$ perpendiculaire à l'équateur ARD, $Lr$ est la déclinaison, et $Ar$ l'asc. dr., $Lr = D$, $Ar = Æ$. Les longitudes et asc. dr. lunaires sont toujours croissantes de 0 à 360°, et positives; les latitudes et déclin. sont boréales ou australes, c.-à-d. positives ou négatives, selon que l'astre est au-dessus ou au-des-

sous de l'écliptique pour la 1$^{re}$, de l'équateur pour la 2$^{e}$. S'il est situé en L' entre ces plans, la latitude L'l' est australe, et la déclin. L'r boréale.

C'est à partir du *nœud ascendant* de la Lune, point où l'orbite de cet astre croise l'écliptique quand la Lune monte vers la région boréale, que les latitudes deviennent croissantes et boréales. Lorsque l'astre a atteint son *maximum* de distance à ce plan, environ 5° 8' d'écartement ou de latitude, la Lune s'en rapproche, et la latitude décroît, puis devient nulle *au nœud descendant*, et enfin australe et croissante jusqu'à — 5° 8', etc.

40. Nous donnerons plus tard l'exposé des procédés par lesquels on tire la longitude et la latitude de la Lune des tables de Burckhardt; mais une fois ces deux coordonnées déterminées, la recherche de l'asc. dr. et de la déclin. n'est qu'un objet de calcul : c'est un simple problème de Trigonométrie sphérique. Soient $l$ la longitude d'un astre, $\lambda$ sa latitude, Æ son asc. dr., D sa déclin., $\omega$ l'obliquité de l'écliptique; on donne $l$, $\lambda$ et $\omega$, et il s'agit de trouver Æ et D.

Le problème inverse se rencontre plus fréquemment; on donne au contraire l'asc. dr. Æ et la déclinaison D d'un astre et l'on se propose d'en trouver la longitude $l$ et la latitude $\lambda$. En effet, on ne peut observer directement ces dernières coordonnées, tandis qu'il est très facile de mesurer les premières; en sorte que le problème inverse dont il s'agit ici, se rencontre toutes les fois qu'on veut déduire la longitude et la latitude d'un astre, de l'observation: voici comment on opère.

On observe au quart de cercle mural le passage de l'astre au méridien, et l'on en obtient la hauteur, ainsi que l'heure du passage. Cette heure, exprimée en temps sidéral, est l'asc. dr. de l'astre, puisque, quand le cercle L$r$ se confond avec le méridien du lieu, l'arc d'équateur A$r$ est le temps sid. écoulé depuis que le point ♈ a traversé ce plan. (*V.* n° 8.) Quand la pendule n'est pas réglée sur les étoiles, ce temps sidéral est toujours facile à trouver par le calcul (n$^{os}$ 109).

D'un autre côté, corrigez la hauteur observée de l'astre L de la réfraction et de la parallaxe (n^os 67 et 93). Soit *pzn* le méridien (fig. 20), *nr* l'horizon, *z* le zénith, *ck* l'équateur, *p* le pôle de ce cercle, *pr* est la latitude du lieu, qu'on suppose connue. La hauteur vraie de l'astre *s*, quand il est au méridien, est l'arc *sen* vertical : *cn* est le complément de *pr*; c'est ce qu'on nomme la *colatitude* du lieu, ou le complément de la latitude; d'où l'on voit que si l'on retranche cette colatitude *cn* de la hauteur *sn*, le reste est la déclin. $D = sc$. Et si l'astre est en $s'$ sous l'équateur, la déclin. est l'arc $s'c$, qui est au contraire $= cn - s'n =$ colatitude — hauteur $= D$; mais comme alors la déclin. est australe ou négative, on peut encore poser

$$D = \text{hauteur} - \text{colatitude du lieu}.$$

Voilà donc l'asc. dr. Æ et la déclin. D de l'astre connues par l'observation, et il s'agit d'en déduire sa longitude *l* et sa latitude $\lambda$; tandis que, dans le premier cas, on supposait ces derniers arcs connus par le secours des tables astronomiques, et qu'on se proposait d'en tirer les premiers.

La solution de ces questions consiste à traiter le triangle sphérique P*p*L (fig. 12), où l'astre est en L, et où DR♈ est l'équateur, dont le pôle est en P, et CI♈ l'écliptique qui a son pôle en *p*. L'angle I♈R $= \omega$ de ces deux plans est censé connu. Or, le plan *p*PCD qui passe par les deux pôles est perpendiculaire à la fois aux plans de l'équateur DA et de l'écliptique CA; A est le pôle du cercle *p*PCD, et situé à 90° de tous ses points. Ainsi, l'angle $A = \omega$ a pour mesure l'arc CD, ou, ce qui équivaut visiblement, l'arc $Pp = \omega$, puisque $PD = pC = 90°$.

Dans notre triangle sphérique P*p*L, on a donc $Pp = \omega$, *p*L complément de la latitude LI, PL complément de la déclin. LR, ou $pL = 90° - \lambda$, $PL = 90° - D$: de plus, l'angle *p* est mesuré par l'arc CI d'écliptique, et l'angle CPL l'est par l'arc DR d'équateur, puisque *p* et P sont les pôles des cercles CA, DA; ainsi $\quad CPL = 90° - Æ$,

$$\text{angle } p = 90° - l, \quad LPp = 90° + Æ.$$

Les équ. 32, 33 et 38, page 4 donnent donc

$$\sin\lambda = \cos\omega \sin \mathrm{D} - \sin\omega \cos \mathrm{D} \sin \text{Æ}, \qquad (1)$$

$$\sin \mathrm{D} = \cos\omega \sin\lambda + \sin\omega \cos\lambda \sin l, \qquad (2)$$

$$\cos\lambda \cos l = \cos \mathrm{D} \cos \text{Æ}, \qquad (3)$$

$$\cos\lambda \sin l = \sin\omega \sin \mathrm{D} + \cos\omega \cos \mathrm{D} \sin \text{Æ}. \qquad (4)$$

Lorsque l'on connaît D et Æ, la 1[re] équ. donne $\lambda$, et la 3[e] $l$; réciproquement, si $\lambda$ et $l$ sont donnés, la 2[e] fait connaître D, et la 3[e] Æ.

Mais comme ces formules ne se prêtent pas facilement aux logarithmes, on préfère les suivantes.

I. *Connaissant* Æ *et* D, on obtient ainsi $l$ et $\lambda$:

$$\tan\varphi = \cot \mathrm{D} \sin \text{Æ}, \qquad (5)$$

$$\sin\lambda = \frac{\sin \mathrm{D} \cos(\omega + \varphi)}{\cos\varphi}, \qquad (6)$$

$$\tan l = \frac{\tan \text{Æ} \sin(\omega + \varphi)}{\sin\varphi}. \qquad (7)$$

En mettant tang $\varphi$ tang D pour sin Æ dans (1), on trouve (6); en divisant (4) par (3), on obtient (7).

La 1[re] de ces équ. sert à déterminer l'arc auxiliaire $\varphi$ que l'on introduit, *avec son signe*, tel que le donne le calcul, dans les deux autres équations.

Par exemple, le 15 octob. 1829, on a pour l'asc. dr. et la déclin. apparentes d'Aldébaran

$$\text{Æ} = 4^h\,26'\,10'',6 = 66^\circ\,32'\,39'',0, \quad \mathrm{D} = +16^\circ\,9'\,29'',23.$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| cot D. .......... | 0.5379999 | (*V.* n° 77.) | $\omega =$ | 23° 27′ 32″5 |
| sin Æ. .......... | 9.9625432 | | $\varphi =$ | 72.28.19,9 |
| tang $\varphi$.......... | 0.5005431 | | $\omega + \varphi =$ | 95.55.52,4 |
| sin D.......... | 9.4444962 | tang Æ.... | | 0.3626142 |
| cos ($\omega + \varphi$)....... | 9.0142456 — | sin.($\omega + \varphi$). | | 9.9976690 |
| cos $\varphi$.......... | — 9.4788097 | sin $\varphi$....... | — | 9.9793530 |
| sin $\lambda$.......... | 8.9799321 — | tang $l$. .... | | 0.3809302 |
| | $\lambda = -5^\circ\,28'\,45'',1$ | | | $l = 67^\circ\,24'\,49'',6.$ |

II. *Connaissant* l *et* λ, *on trouve* Æ *et* D, à l'aide d'un arc auxiliaire $\psi$, savoir:

$$\text{tang}\,\psi = \cot\lambda \sin l, \qquad (8)$$

$$\text{tang}\,Æ = \frac{\text{tang}\,l.\sin(\psi-\omega)}{\sin\psi}, \qquad (9)$$

$$\sin D = \frac{\sin\lambda.\cos(\psi-\omega)}{\cos\psi}. \qquad (10)$$

Ces équations pourront servir à vérifier les nombres de la 4^e^ page de chaque mois, comme nous l'avons fait pour le Soleil n° 27 (*).

Par exemple, le 1^er^ octobre 1830, on a pour la Lune, à midi,

$$l = 11^s\,26°\,3'\,58'', \quad \lambda = -1°26'\,19'', \quad \omega = 23°\,27'\,33'',6.$$

Voici le calcul : on prend pour sin $l$ et tang $l$ ceux de $-3°\,56'\,2''$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| cot λ.............. | 1.6000879 — | | $\psi$ = 69°.53′ 39″,4 |
| sin $l$........... | 8.8363582 — | | $\omega$ = 23.27.33,6 |
| tang $\psi$......... | 0.4364461 + | | $\psi-\omega$ = 46. 26. 5,8 |
| tang $l$....... | 8.8373826 — | sin λ........ | 8.3997751 — |
| sin ($\psi-\omega$)... | 9.8600937 + | cos ($\psi-\omega$). | 9.8383312 + |
| sin $\psi$........ | — 9.9726933 + | cos $\psi$....... | — 9.5362472 + |
| tang Æ..... | 8.7247830 — | sin D...... | 8.7018591 — |
| Æ = — 3° 2′ 14″,55; | | D = — 2° 53′ 6″,5. | |

La valeur de $l$ montre qu'il faut prendre pour Æ, qui doit toujours être positif, le suppl. à 360°, savoir Æ = 356°57′45″,45. La déclin. est australe comme la latitude.

41. La marche propre de la Lune est 13 fois plus rapide que

(*) Comme ici le rayon est R = 1, il faut sous-entendre que le 2^e^ membre de l'équ. (8) doit être divisé par R pour devenir homogène, ou de 1^re^ dimension ; aussi retranche-t-on 10 au log. de tang $\psi$ ci-après. Les deux autres équ. ne nécessitent aucun changement pour y appliquer les tables de log., parce qu'elles sont homogènes. On fera une remarque semblable pour les équ. antérieures 5, 6 et 7. (*V.* page 41).

celle du Soleil, et beaucoup plus irrégulière : c'est pour cela qu'on donne les lieux lunaires de 12 en $12^h$. Si l'on a besoin de les obtenir pour une autre époque que midi ou minuit, il faut interpoler, en répartissant l'intervalle où tombe l'instant proposé en parties proportionnelles aux durées. En prenant le $12^e$ de la diff. entre deux arcs successifs, on a la marche en $1^h$. Comme $\frac{1}{12} = \frac{5}{60}$, il faut multiplier cette diff. par 5, et changer les ° en ′, les ′ en ″, etc. Ainsi, la diff. pour $12^h$ étant supposée de 6° 32′ 48″, 5 fois ce nombre = 32° 44′, et le *mouvement horaire* est 32′ 44″.

Soit demandé, par exemple, l'asc. dr. de la Lune le 23 octobre 1830, à $6^h 5'$ t. vr. de Paris? On trouve dans la *Conn. des Tems*

Le 23 à midi Æ ☾ = 283° 35′ 13″ } Differ. 6° 32′ 48″.
A minuit. . . . . . . . . = 290. 8. 1 }

Je pose cette proportion : si $12^h$ donnent 6° 32′ 48″, combien $6^h 5'$ ?

| 1er *Procédé.* | | 2e *Procédé.* | |
|---|---|---|---|
| 5 fois 6° 32′ 48″ donnent | 32° 44′ | 6° 32′ 48″. . . . . . | 4.37232 |
| ou . . . (*) mouv. hor. = | 32′ 733 | $6^h$ 5′. . . . . . . . . . | 4.34044 |
| à multiplier par. . . . . . | 6,0833 | comp. $12^h$. . . . . | $\bar{5}$.36452 |
| | 196,398 | 3° 19′ 7″,5. . . . . | 4.07728 |
| | 2,618 | | |
| (*) Pour div. par 60, | 98 | Mouv. d'asc. dr. = | 3° 19′ 7″5 |
| on change les ° en ′, etc. | 10 | Æ à midi. . . . | 283.35.13,0 |
| | = 199,124 | à $6^h$ 5′. . . . . . . . | 286.54.20,5. |

Mouv. d'asc. dr. . . . . = 3° 19′ 7″,5, comme ci-contre.

On fait pour la déclin., la longit. et la latitude, un calcul exactement semblable. On commet ici une petite erreur, car on y suppose que la Lune se meut uniformément durant les $12^h$ d'intervalle, dans le sens de l'arc coordonné qu'on cherche : cette supposition est assez exacte pour la plupart des problèmes qu'on veut résoudre. Cependant elle est inadmissible dès qu'on exige de la précision. La marche de la Lune est sujette à des

irrégularités si grandes, que l'on ne peut négliger d'en tenir compte, ce que ne fait pas notre proportion. Mais ce sujet a trop d'étendue pour être traité ici; nous nous réservons d'en faire un chapitre séparé, n° 78.

42. La troisième page de chaque mois, dans la dernière colonne, indique le temps vrai astronomique (d'un midi à l'autre) du passage du centre de la Lune au méridien de Paris. Nous expliquerons plus tard (n° 120) la théorie qui sert à trouver ces nombres.

On remarquera que le jour de la nouvelle Lune, le nombre est remplacé par le signe ☌ qui désigne la *conjonction* avec le Soleil. Si cette phase arrivait à midi vrai de Paris, la Lune passerait au méridien de cette ville en même temps que le Soleil : or, c'est ce qui arrive très rarement. Le passage, lors de la néoménie, se fait un peu avant ou après midi. Comme chaque passage retarde sur le précédent de $50'\frac{1}{2}$, en terme moyen, il y a un jour dans chaque lunaison où la Lune ne passe point au méridien, attendu que ce jour elle y entre un peu avant midi, et le lendemain un peu après midi. Les 17 et 19 août 1830, par exemple, la Lune est au méridien de Paris à $23^h 56'$ et à $0^h 43'$, ou, ce qui revient au même, à $4'$ avant le midi du 18, et à $43'$ après le midi du 19. Ainsi, dans la durée du jour astronomique de midi 18 à midi 19 août 1830, la Lune ne passe pas au méridien de Paris. La conjonction arrive le 18 à midi $2'$, instant où le Soleil et la Lune ont la même longitude.

43. Pour trouver l'heure du passage de la Lune au méridien d'un autre lieu que Paris, la diff. des méridiens étant L en temps, prenez la différ. $k$ des heures des deux passages consécutifs entre lesquels est le jour proposé, et faites cette proportion : si $24^h$ donnent $k$ pour différ., L heures donneront

$$y = \frac{Lk}{24} = \frac{2\frac{1}{2}.Lk}{60}.$$

C'est ce qu'il faut ajouter à l'heure du passage à Paris, pour avoir celle qui convient au méridien proposé. On retranche,

quand L est négatif, c'est-à-dire quand la longitude du lieu est orientale.

Ainsi, pour avoir l'heure du passage à Pétersbourg le 27 août 1830, comme cette ville est à $1^h 51' 54''$ de longitude à l'orient de Paris, $L = -1^h 52'$. La *Conn. des Tems* donne

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 26 août.... | $5^h 54'$ | Differ. $k = 48'$ | | $68'$ |
| 27........ | $6.42$ | | | $1,867$ |
| On trouve | $-1.29''$ | | | $48,0$ |
| Heure demandée | $6.40.31.$ | | | $38,4$ |
| | | | | $2,8$ |
| | | | A retrancher | $89''2.$ |

Ce procédé, qui n'est qu'approximatif, suffit au calcul de l'heure de la marée. Nous en donnerons un autre plus précis n° 120.

*Cinquième et sixième pages du mois.*

44. Les parallaxes du Soleil, de la Lune et des planètes sont d'une si grande importance en Astronomie, et celle de la Lune est si considérable, à raison de la grande proximité de ce satellite, que le calcul en est aussi indispensable que fréquent. La *Conn. des Tems* facilite ces opérations; il est seulement à regretter qu'on n'y trouve pas les dixièmes de seconde. Pour comprendre l'usage de ces nombres, il serait nécessaire d'exposer la théorie des parallaxes; mais ce sujet est trop étendu pour être mis ici. Nous en ferons la matière d'un chapitre séparé. (*V.* n° 90.) Nous expliquerons alors ce qu'on doit entendre par la *parallaxe*, et quel est l'usage de cet arc dans les calculs. Qu'il nous suffise de dire ici que la parallaxe varie avec la hauteur de l'astre, et qu'elle est la plus grande possible quand celui-ci est à l'horizon (le lever ou le coucher). Cet arc change aussi avec la distance de l'astre; et comme cette distance varie assez rapidement pour la Lune, sa parallaxe horizontale change aussi. Nous dirons (n° 91) comment cet arc étant donné, on peut calculer la parallaxe de l'astre situé à une hauteur connue au-dessus de l'horizon.

Les deux premières colonnes de la 5e page du mois donnent la *parallaxe horizontale* de la Lune à midi et à minuit, temps vrai de Paris ; on l'obtient pour les autres heures par l'interpolation, comme précédemment (nos 16 et 41).

Quelle est, par exemple, la parallaxe horizontale de la Lune le 7 août 1830 ; sachant que l'on compte au même moment $6^h 44'$ de temps vrai à Paris. On trouve dans la *Conn. des Tems*

7 août, parall. horiz. 59′ 31″ à midi,
59.35 à minuit.

La différ. 4″ donne cette proportion : si $12^h$ donnent 4″, combien $6^h,7$ ? On obtient 2″,2 ; ainsi, en ajoutant à 59′ 31″, on a 59′ 33″,2 = H pour la parallaxe horizontale de la Lune à cet instant : c'est-à-dire que si l'observateur est transporté au centre de la Terre, avec son horizon parallèle, et que la Lune soit dans ce plan, mais en conservant sa distance au centre de la Terre, il la verra élevée de 59′ 33″,2.

Les valeurs de la parallaxe horizontale données dans la *Conn. des Tems,* sont tirées des tables astronomiques ; elles dépendent de la distance où se trouve actuellement la Lune, car plus elle est loin de la Terre, et plus le demi-diamètre de ce globe semblerait petit à un habitant de la Lune : ainsi, la parallaxe décroît à mesure que le rayon vecteur augmente. Nous y reviendrons plus tard (n° 92).

Cette parallaxe lunaire de la *Conn. des Tems* est relative aux habitans de l'équateur terrestre ; elle porte ce titre : *parallaxe horizontale équatoriale.* Nous expliquerons bientôt le sens qu'il faut attacher à cette expression, et comment, de cette parallaxe horizontale, on peut déduire celle qui convient à toutes les latitudes. (*V.* n° 95.)

45. La seconde colonne de la cinquième page du mois contient le *demi-diamètre horizontal de la Lune* à midi vrai de Paris, pour le spectateur qui est placé au centre de la Terre.

Plus nous sommes proches de la Lune, et plus son volume apparent est grand ; c'est-à-dire plus l'angle optique sous lequel

nous l'apercevons est ouvert. Le diamètre varie avec le rayon vecteur de l'astre, et par conséquent avec la parallaxe horizontale H. Ces deux élémens sont en rapport constant, donné par l'équ.

*Demi-diamètre apparent* ☾ $= 0,2725.\text{H}$.

C'est cette expression que l'on donne toute calculée dans la *Conn. des Tems;* on la tire des tables lunaires, et on l'inscrit dans la colonne qui s'y rapporte. Le coeff. 0,2725 est à très peu près $= \frac{3}{11}$, en sorte que l'on a demi-diam. ☾ $= \frac{3}{11}$ H. D'ailleurs log 0,2725 $= \bar{1}.4353665$.

Quand l'astre est au périgée de son orbite, le demi-diamètre est le plus grand; cet arc est alors $= 16'45'',535$; à l'apogée, il est le plus petit et $= 14'40'',955$; enfin, à la moyenne distance, on l'a trouvé de $15'33'',5$.

Comme la parallaxe de la Lune varie avec la distance de cet astre à la Terre, et que le demi-diamètre change aussi pour demeurer en rapport constant avec cette parallaxe, les astronomes ont calculé les relations qui existent entre ces changemens. Ils ont trouvé que la parallaxe horizontale moyenne est $= 57'0'',9$; c'est ce qu'ils appellent la *constante de la parallaxe;* qu'au périgée, elle est $= 61'24''$, et à l'apogée, $= 53'48''$; mais toujours le diamètre de la Lune est les $\frac{6}{11}$ de sa parallaxe horizontale.

46. Comme la réfraction produite par la présence de l'atmosphère élève, en apparence, d'autant plus les objets qu'ils sont plus rapprochés de l'horizon, cet effet, exercé sur le disque lunaire, est un peu plus grand sur le bord inférieur que sur le supérieur. Ce disque, au lieu de nous paraître exactement circulaire, ainsi que cela serait sans la présence de l'atmosphère, prend une figure un peu aplatie dans le sens vertical, et nous offre l'image d'une ellipse dont le grand axe est horizontal, et diffère d'autant moins du petit axe que l'astre est plus élevé vers le zénith. Voilà pourquoi la *Conn. des Tems* donne le demi-diamètre *horizontal,* qui n'est pas influencé par cette cause.

Ce demi-diamètre est celui qu'on trouve à midi vrai à Paris, car la distance de la Lune à la Terre changeant sans cesse, il est indispensable de préciser l'instant où l'on en donne la valeur. On obtient ce demi-diamètre pour toute autre heure par interpolation, comme n° 44. Comme l'aplatissement du sphéroïde terrestre est très petit, il n'exerce aucune influence sensible sur la grandeur apparente du disque lunaire, et il est permis de regarder la Terre comme sphérique, quand on veut calculer le diamètre de la Lune. Nous allons avoir égard aux changemens qui sont dus à la place de l'observateur sur cette sphère.

47. Lorsque la Lune s'élève sur l'horizon, son diamètre apparent augmente; en voici la raison : la distance de l'astre L (fig. 14) au centre C de la Terre est d'à peu près 60 rayons terrestres, $CL = 60$ fois CI. Comme l'angle L du triangle LCO n'est guère que de $1°$, la ligne LO est presque égale à LC; Ainsi, deux observateurs placés, l'un en O, l'autre en I, voient la Lune, le 1er à son horizon, le 2e à son zénith; mais O voit l'astre plus loin que I et plus petit d'un 60e; le diamètre lui paraît être moindre d'environ 30″. Ces 30″ se répartissent, suivant une loi que nous allons indiquer, sur toutes les positions de la Lune, selon les hauteurs où on la voit, depuis l'horizon jusqu'au zénith.

Soit L (fig. 15) le disque de la Lune, vu des points O et C, selon les angles $LCM = R$, $LON = R'$. Dans les triangles rectangles LCM, LON, on a $\sin LCM = \frac{LM}{CL}$, $\sin LON = \frac{LN}{OL}$ : ainsi, $\sin R : \sin R' :: OL : CL$.

Mais dans le triangle LOC, on a $OL : CL :: \sin C : \sin O$, ou plutôt $:: \sin Z : \sin Z'$, en nommant Z et Z′ les angles formés par LC, LO, avec la ligne COz. Ainsi, on trouve

$$\sin R : \sin R' :: \sin Z : \sin Z',$$

ou même

$$R : R' :: \sin Z : \sin Z',$$

en remplaçant les sinus de R et R′ par ces petits arcs. En effet, même pour la Lune, R n'atteint jamais 17′ : or,

sin 17′ = 0,004945080, et arc 17′ = 0,004945100; la différence 0.00000002 est tout-à-fait insensible. A plus forte raison, peut-on remplacer le rapport des sinus par celui des arcs.

Maintenant, si C est le centre de la Terre et O un point de la surface, z est le zénith, Z et Z′ sont les distances zénithales de l'astre vu du centre et de la surface, qu'on nomme l'une *vraie* et l'autre *apparente;* R et R′ sont les demi-diamètres vrai et apparent, et notre proportion détermine la relation entre ces variables.

Soit L′ (fig. 14) la Lune, CO la Terre; on a

$$R' = R \cdot \frac{\sin Z'}{\sin Z},$$

$$R' - R = \left(\frac{\sin Z' - \sin Z}{\sin Z}\right).$$

Telle est l'augmentation $x$ qu'éprouve le demi-diamètre R, lorsqu'au lieu d'être vu du centre C de la Terre, on le voit d'un point O de sa surface, la distance zénithale étant Z′; mais l'équ. (9), page 2, change cette expression en

$$x = \frac{2R}{\sin Z} \sin \tfrac{1}{2}(Z' - Z) \cos \tfrac{1}{2}(Z' + Z).$$

Désignons par $p$ l'angle L′, qu'on nomme la *parallaxe de hauteur* (n° 91); on a dans le triangle L′CO, $Z = Z' - p$, d'où

$$x = \frac{2R}{\sin (Z' - p)} . \sin \tfrac{1}{2} p . \cos (Z' - \tfrac{1}{2} p).$$

Développons et faisons $\sin p = p$, $\cos p = 1$, attendu que cet angle $p$ est toujours fort petit,

$$x = \frac{Rp \cos (Z' - \frac{1}{2} p)}{\sin (Z' - p)} = \frac{Rp (\cos Z' + \frac{1}{2} p \sin Z')}{\sin Z' - p \cos Z'}$$

Mais on sait (n° 45) que $\frac{R}{H} = 0,2725$; ainsi la parallaxe ho-

rizontale $H = 3,6697\,R = nR$, en faisant la constante.... $n = 3,6697$. D'un autre côté, on a $p = H \sin Z'$ (nº 91), ou $p = nR \sin Z'$; donc

$$x = \frac{nR^2 \sin Z' (\cos Z' + \frac{1}{2} nR \sin^2 Z')}{\sin Z' - nR \cos Z' \sin Z'}$$
$$= \frac{nR^2 (\cos Z' + \frac{1}{2} nR \sin^2 Z')}{1 - nR \cos Z'}.$$

En développant en série le dénominateur à la puissance $-1$, on trouve cette formule, qui est exacte au 4ᵉ ordre près,

$$x = AR^2 \cos Z' + \tfrac{1}{2} A^2R^3 \cos^2 Z' + \tfrac{1}{2} A^2R^3,$$
$$A = 0,00001779133, \quad \log A = \bar{5}.2502084.$$

R et $x$ sont ici exprimés en secondes, et l'on a $A = n \sin 1''$,

$$R' = R + x.$$

On conçoit maintenant qu'à un instant donné le demi-diamètre apparent R′ surpasse le vrai R, d'autant plus que Z′ est moindre, c'est-à-dire que l'astre est plus élevé sur l'horizon du lieu.

Comme on ne peut voir que l'un des bords de la Lune, il faut toujours corriger les observations qu'on en fait du demi-diamètre apparent R′, et cette formule est employée à cet usage. Dans la détermination des longitudes par la méthode des distances de la Lune au Soleil ou aux étoiles, cette augmentation $x$ ne peut être négligée. (*V.* nº 179.)

Le plus souvent, on supprime les deux derniers termes de la formule, dont les valeurs réunies ne dépassent pas 0″,33.

Voici une application de ce genre de calculs : le 15 octobre 1829, à 9ʰ 14′ de t. moy., ou 9ʰ 28′ de t. vrai, le demi-diamètre de la Lune est R = 16′ 4″,75; on a alors Z′ = 72° 59′ 53″,3 près Paris.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | 0,5........ | $\bar{1}.69897$ | |
| A........ | $\bar{5}.25021$ | $A^2$........ | $\overline{10}.50042$ | ..... $\bar{1}.15263$ |
| $R^2$........ | 5.96883 | $R^3$........ | 8.95324 | |
| cos Z'...... | 9.46598 | $\cos^2 Z'$.... | 8.93196 | |
| | 0.68502 | | $\bar{2}.08459$ | |

1er terme.. 4",842, 2e... 0",012, 3e... 0",142.

$$\begin{aligned} R &= 16' 4'' 75 \\ x &= \quad 4,842 \\ &\quad + 0,012 \\ &\quad + 0,142 \\ R' &= 16.9,75. \end{aligned}$$

48. On réduit ordinairement cette valeur de $x$ en table, pour éviter l'embarras de la calculer chaque fois qu'on en a besoin. C'est notre table IX, où l'on entre avec le demi-diamètre vrai R, vu du centre de la Terre, tel qu'on le tire de la *Conn. des Tems,* et avec la hauteur actuelle de la Lune. Ce dernier arc est dans la 1re colonne, l'autre est dans les suivantes; il faut descendre dans celle de ces dernières qui porte en tête le demi-diamètre vrai R, jusqu'à la ligne horizontale qui répond à la hauteur : le nombre qu'on y trouve est l'augmentation $x$ de R.

Si, par exemple, la hauteur du centre est 48°, et le demi-diamètre vrai R = 15' 30", la table donne 11",63 en correspondance avec ces nombres; il faut donc ajouter 11",63 à R, pour avoir le demi-diamètre apparent, qu'on trouve être R' = 15' 41",63.

Si le demi-diamètre R ne se trouve en tête d'aucune des colonnes, on interpole à l'ordinaire (*v.* n° 41) entre les deux nombres qui répondent aux deux demi-diamètres entre lesquels se trouve celui qu'on donne. Quand au contraire c'est la hauteur donnée qui n'est pas dans la table, on fait l'interpolation entre deux nombres de la colonne où est R. Et enfin, si le demi-diamètre et la hauteur donnés ne sont pas contenus dans la table, ces arcs tombent entre les valeurs qui s'y trouvent; il faut interpoler comme cela se pratique

dans les *tables à double entrée*, c.-à-d. en insérant des parties proportionelles tant dans le sens horizontal que dans le sens vertical. On n'emploie guère ces sortes de tables que lorsque les nombres qui s'y trouvent diffèrent très peu l'un de l'autre, de manière que le calcul d'interpolation puisse, pour ainsi dire, se faire à vue.

Par exemple, si le demi-diamètre est 15′ 51″, et la hauteur de l'astre 44° 21′, on interpolera ainsi qu'il suit. Voici la partie de la table qui sert d'élémens au calcul :

| | | 15′ 30″ | 16′ 0″ |
|---|---|---|---|
| 42° | | 10″48 | 11″,17 |
| 45 | | 11,07 | ...... |
| etc. | | ..... | ...... |

Comme les titres de colonnes sont 15′ 30″ et 16′ 0″, qui diffèrent de 30″, et que les deux nombres 10″,48 et 11″,17, qui sont sur la ligne de 42°, diffèrent de 0″,70, on posera cette proportion, comme dans les tables à simple entrée : si 30″ donnent 0″,70 de différ., combien donneront 21″ d'excès (sur 15′ 30″)? savoir, 30″ : 0″,70 :: 21″ : $x =$ 0″,49. D'un autre côté, comme les hauteurs 42° et 45° de la table diffèrent de 3°, et que les nombres correspondans 10″,48 et 11″,07 diffèrent de 0″,59; qu'enfin, la hauteur donnée 44° 21′ surpasse 42° de 2° 21′, on fera cette autre proportion : si 3° de diff. en hauteur donne 0″,59 de diff. dans le sens vertical, combien 2° 21′ ? ou 3° : 0″,59 :: 2° 21′ : $x =$ 0″,46. Ajoutant ces deux résultats, parce que les nombres vont en croissant dans les deux directions, il vient 0″,49 + 0″,46 = 0″,95. Cette somme doit être ajoutée au nombre 10″,48, qui répond, dans la table, à 42° et 15′ 30″, termes de départ. Ainsi la correction est 11″,43, et le demi-diamètre apparent devient 16′ 2″,43, au lieu de 15′ 51″ qu'on trouve dans la *Conn. des Tems*.

49. Les autres colonnes des pages 5e et 6e du mois donnent

la situation des planètes. Ces astres font rarement le sujet des observations en mer; leurs positions sont données par les tables de M. Bouvard pour Jupiter, Saturne et Uranus: on se sert des tables de M. de Lindenau pour Mercure, Vénus et Mars. Nous exposerons plus tard l'usage et la formation de ces tables. (*V.* l'*Uranographie*, nº 353) (*). Elles font connaître la longitude et la latitude *héliocentriques* (vues du centre du Soleil); on en tire ensuite, par le calcul, les longitude et latitude *géocentriques* (vues du centre de la Terre). Ce sont ces dernières coordonnées qui ont pour nous de l'importance, parce qu'elles servent de base à nos opérations.

L est une planète (fig. 11), ASCB l'écliptique, ARDBO l'équateur. En abaissant les arcs LI, L*r* perpendiculaires à ces deux plans, AI sera la longitude, et LI la latitude, A*r* l'asc. dr. et L*r* la déclin. Nous avons déjà montré, pour la Lune (nº 40), comment on tire ces dernières coordonnées des premières par le calcul. La *Conn. des Tems* les donne dans des colonnes particulières, ainsi que l'heure du passage au méridien. Le calcul s'en fait comme on l'a dit nº 40.

Toutes ces quantités sont calculées pour midi vrai à Paris; on les obtient pour les autres jours et heures par interpolation.

Les longitudes sont exprimées en signes, degrés;... les latitudes et déclin., en degrés;... les asc. dr., en temps sidér. **Tous ces arcs sont rapportés au point vernal ♈, qui est en A, en ayant égard à la nutation, à la précession et à l'aberration.**

**Les heures du lever et du coucher à Paris sont exprimées en**

---

(*) Les planètes Mars, Vénus, Jupiter et Saturne sont si brillantes, qu'on les voit quelquefois en plein jour, et les marins pourraient les observer plus facilement que plusieurs des étoiles dont ils font usage; mais il faudrait que les positions de ces planètes fussent calculées avec plus de précision qu'on ne le fait dans la *Conn. des Tems*. Les Éphémérides de M. Encke contiennent des améliorations importantes, qu'il convient de ne pas faire attendre aux Français, et les observations planétaires méritent qu'on perfectionne les élémens de leurs calculs.

temps civil vrai (nº 11) ; on s'en sert pour reconnaître si l'astre est sur l'horizon de Paris à une heure désignée.

L'heure du passage au méridien est exprimée en temps vrai astronomique. La déclin. est pour midi vrai à Paris.

Comme les mouvemens de Mercure sont très rapides, on donne la position de cette planète de 3 en 3 jours ; l'intervalle n'est que de 6, 8, 10 et 15 jours pour les autres planètes. Les nombres obtenus pour ces époques n'étant pas fort différens, suffisent aux besoins, parce que l'interpolation peut combler l'intervalle. Pourtant, on pourrait désirer que ces nombres eussent plus de précision. Dans les Éphémérides de Berlin, les arcs sont donnés de 2 en 2 jours pour Mercure et Vénus, et de 4 en 4 jours pour Mars, Jupiter et Saturne ; l'approximation est poussée jusqu'aux 10ᵉˢ de seconde d'arcs et aux 100ᵉˢ de seconde de temps. Dans cet ouvrage, on trouve les log. des rayons vecteurs et des distances à la Terre avec 7 décimales. Les heures des passages au méridien sont données aux dixièmes de minute.

Le signe ☌ est employé pour indiquer une *conjonction ;* Mercure et Vénus en ont deux, l'une *supérieure* ou au-delà du Soleil, l'autre *inférieure* ou en-deçà. La longitude de la planète est alors la même que celle du Soleil. (*V.* nº 86.) Les dates de ces phénomènes sont indiquées, aussi bien que celles des *élongations* orientales et occidentales, c.-à-d. les époques où ces planètes sont à la plus grande distance angulaire du Soleil, ou à la *station.*

Le signe ☍ dénote une *opposition.* La longitude des planètes supérieures diffère alors de 180° de celle du Soleil. Dans les quadratures, indiquées par le caractère □, les longit. des deux astres diffèrent de 90° ou de 270°.

50. Pour montrer sur un exemple l'usage de cette partie de la table, cherchons le lieu de Vénus le 6 juin 1830, à midi vrai de Paris. En ne rapportant ici que les données les plus utiles, on trouve dans la *Conn. des Tems :*

| Jours. | Asc. dr. | Longit. géocent. | Latit. géocent. | Déclin. | Pass. mérid. |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1ʰ 37′ | 0ˢ 25° 14′ | 2° 15′ A. | 7° 41′ A. | 21ʰ 2′ |
| 7 | 2. 1 | 1. 1.35 | 2.25 | 9.46 | 21. 1 |

Comme en 1 jour les variations sont

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 4′ | 1° 3′,5 | 1′,7 | 20′,8 | — 0′,2 |

En interpolant, on formera la ligne suivante :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6 | 1.57 | 1ˢ 0° 31′,5 | 2.23,3 | 9.25,2 | 21. 1 |

On en conclut donc que Vénus passe au méridien de Paris à 21ʰ 1′, c.-à-d. le 7 au matin, à 9ʰ 1′ temps vrai, ou bien à 1ʰ 57′ de temps sidéral, puisque l'asc. dr. est 1ʰ 57′; seulement, il faut observer que c'est l'asc. dr. à midi vr., et non pas à l'instant du passage : et comme cette asc. dr. varie, il faudrait interpoler pour l'obtenir à l'heure vr. où l'astre entre au méridien.

*Septième page du mois.*

51. On trouve au haut de cette page un petit tableau qui donne, de 6 en 6 jours, cinq nombres astronomiques, savoir :

1°. et 2°. *Le temps vrai que le demi-diamètre du Soleil met à traverser le méridien, et la grandeur de cet arc.* Lorsque cet astre est à la distance moyenne, les observations ont fait connaître cet arc, ou le demi-diamètre ⊙ = 16′ 1″,45 = 16′,02417. Quand l'astre est au périgée, cet arc = 16′ 17″,8 ; à l'apogée, il est = 15′ 45″,5. Dans les autres positions, il décroît comme le rayon vecteur augmente.

Dans les tables de Delambre, sur lesquelles la *Conn. des Tems* est composée, on se sert d'une valeur du demi-diamètre ⊙ à la distance moyenne = 16′,02825, un peu différente de la précédente ; et comme cet arc varie en raison inverse du rayon vecteur R, dans toute autre position, il est

$\frac{16',02825}{R}$. Ce rayon sera donné ci-après ; il est donc facile de calculer la 2e colonne.

Quant à la 1re, en divisant cet arc par cos. déclin. ☉, et réduisant en temps, on a son angle horaire, ou le temps que l'astre emploie à traverser le méridien. Si l'on veut cette durée en temps sidéral, il faut ajouter 0",2. (V. n° 73.)

3°. *Le mouvement horaire du Soleil en longitude.* Nous avons déjà donné, n° 17, un moyen de calculer cette quantité. Voici une formule générale, sur laquelle on construit une table qui donne de suite ce nombre. Le Soleil moyen décrit chaque jour un arc d'écliptique = 0°,985647283 (n° 73); d'où l'on voit que, par heure moyenne, il parcourt l'arc 0°,0410686 = $m$, mouvement horaire moyen. R étant sa distance à la Terre, la marche du Soleil vrai est, par heure,

$$= \frac{\sqrt{1-e^2}}{R^2} \times m,$$

en faisant $e = 0{,}01685$, excentricité de l'écliptique. On trouve qu'en posant $Q = 147'',8260$, on a, en secondes d'arc,

$$\textit{mouv. hor. vrai} = \frac{Q}{R^2}, \quad \log Q = 2{,}1697508.$$

4°. *Le logarithme de la distance* R *du Soleil, ou de son rayon vecteur* R, tel qu'on le tire des tables de Delambre.

Cette valeur de R nous a déjà été nécessaire pour les calculs ci-dessus; elle sert encore, entre autres choses, à trouver la parallaxe horizontale du Soleil, quand on la demande avec une extrême précision, et qu'on veut tenir compte des changemens qu'y causent les variations de distances solaires. Les derniers travaux de M. Encke ont donné pour *parallaxe moyenne horizontale du Soleil* $\varphi = 8'',5776$. On a pour le rayon vecteur R,

$$\textit{parallaxe horizontale} \odot = \frac{\varphi}{R};$$

mais le plus ordinairement on regarde cette quantité comme constante et $= \varphi$, c.-à-d. qu'on suppose R = 1.

5°. *Le lieu du nœud ascendant de l'orbite lunaire* sur l'écliptique, ou sa longitude en signes, degrés... On sait que les nœuds de l'orbite lunaire rétrogradent sur l'écliptique d'environ $19^{\circ} \frac{1}{3}$ tous les ans (*v.* n° 270, et l'*Uranographie*, n°s 60 et 103), et qu'ils en achèvent le tour entier en 18 ans 7 mois et demi : ce mouvement a d'ailleurs des inégalités périodiques, que les tables astronomiques font connaître. En terme moyen, la marche est de 3′ 10″,64 par jour moyen. Comme plusieurs problèmes exigent la connaissance de la position de ces points à tous les instans, notre colonne indique la longitude du nœud ascendant ☊; l'autre nœud ☋ est à 6 signes de distance.

L'interpolation se fait aisément; pour les 6 jours d'intervalle, la différence est de — 19′, et l'on peut la prendre de — 3′ 11″ par jour. D'ailleurs, cette longitude n'est pas donnée jusqu'aux secondes. Ainsi, pour

Le 1er sept. 1830, elle est $5^s\,10^{\circ}\,8'$;

Le 2, on a $5^s\,10^{\circ}\,5'$; le 3, $5^s\,10^{\circ}\,2'$; le 4, $5^s\,9^{\circ}\,59'$....

52. *Les éclipses des satellites de Jupiter* sont indiquées pour le méridien de Paris, en temps moyen, d'après les tables de Delambre. On a marqué par une astérisque * celles qui sont visibles en cette ville, c.-à-d. qui arrivent à une heure de nuit où la planète est sur l'horizon. Les autres éclipses ne peuvent y être aperçues; mais comme on les verra peut-être de quelque autre lieu du globe qui aurait alors la planète en vue pendant la nuit, ces prédictions servent à préparer à l'observation dont on a l'heure de Paris : car en retranchant la différence des méridiens en temps (une longitude orientale a le signe —), on obtient l'heure approchée du lieu.

On assure qu'avec une bonne lunette de 3 à 4 pieds de foyer, lorsque le navire n'est pas agité, on peut faire l'observation de ces éclipses en mer : on en conclut donc la longitude exacte du lieu, en ne supposant qu'une connaissance médiocrement approchée de cet arc, telle qu'on l'a pu obtenir par l'*estime*. (*V.* n° 182.) Nous allons donner quelques détails sur ces phénomènes.

*Huitième page du mois.*

53. *Les configurations des satellites de Jupiter* sont données pour tous les jours du mois, à une heure marquée en haut de la page ; on prévoit la place de ces petits astres, à d'autres heures, d'après les considérations suivantes.

Transportez-vous par la pensée sur Jupiter ; que votre tête se dirige vers les régions du pôle boréal, et vous aurez le spectacle des quatre satellites tournant autour de vous d'occident en orient (de droite à gauche), sens suivant lequel se meuvent autour du Soleil tous les corps planétaires. Les temps de leurs révolutions sont très différens.

Le 1er satellite, celui qui est le plus près de Jupiter, accomplit sa révolution en $1^j,769\ldots$, ou $42^h\,28'\,48''$;

Le 2e en $3^j,551\ldots$ ou $85^h\,18'$;

Le 3e en $7^j,155\ldots$ ou $7^j\,4^h$;

Enfin le 4e, qui est le plus éloigné de Jupiter, en $16^j,689$.

Ces premières données ne suffisent pas pour calculer les époques des retours des éclipses, à cause des inégalités dont nous ne tenons pas compte ici, non plus que du temps nécessaire pour que la lumière nous arrive, temps qu'on nomme *équation de la lumière*. On sait, en effet, que la lumière met $16'\,26''$ à traverser l'écliptique, et que, suivant le lieu où se trouve la Terre dans cette orbite, il faut plus ou moins de temps pour que la lueur d'un satellite nous arrive. C'est même cette différence de temps qui a fait reconnaître à Roëmer que la lumière n'avait pas une propagation instantanée, et qui a permis d'en mesurer la vitesse. Les tables d'éclipses, par Delambre, tiennent compte de toutes ces conditions.

Jupiter projette derrière son globe une ombre conique très allongée. C'est quand un satellite entre dans ce cône d'ombre qu'a lieu son *immersion ; l'émersion* arrive lorsqu'il en sort : dans le premier cas, la lumière de ce petit astre cesse de nous arriver, l'éclipse commence ; dans le 2e, elle finit, et le satellite redevient visible. L'heure précise de ces phénomènes est indiquée à la 7e page, en temps moyen à Paris. Comme la

position de l'observateur sur le globe terrestre n'a aucune influence sur cet instant, la parallaxe n'y fait rien; tous les habitans de la Terre qui peuvent voir l'éclipse l'aperçoivent dans le même instant physique : l'heure de chaque lieu est seule différente, et c'est précisément cette différence entre les heures qui est celle des longitudes.

Pour qu'une éclipse de satellite de Jupiter soit visible, il faut que la planète soit élevée d'au moins 8° sur l'horizon, et que le Soleil soit à plus de 8° au-dessous; car, sans cela, les brumes de l'atmosphère, ou la lueur crépusculaire, empêchent de voir les satellites.

Les satellites de Jupiter nous semblent être de petits points brillans, tous quatre rangés en une ligne droite, à peu près parallèle à l'écliptique; mais celui qui nous paraît être le plus voisin de la planète, en est souvent, au contraire, le plus éloigné: c'est un effet purement optique, résultant de la manière dont ces corps sont placés dans leurs orbites inégales et envoient leur lumière à nos yeux. On ne peut donc reconnaître, à la seule inspection, quel est le satellite n° 1, quel est le n° 2, etc., parce que leurs distances apparentes à Jupiter ne peuvent nous donner l'idée de leurs distances réelles. Il convient d'avoir le tableau de leurs situations relatives, à l'égard de la planète, pour pouvoir conclure, de ces configurations, quel est celui de ces corps sur lequel il faut porter son attention, c'est-à-dire celui qui est indiqué comme devant s'immerger dans l'ombre de la planète, ainsi que l'indique la prédiction faite page 7 de chaque mois de la *Conn. des Tems*.

54. Ces *configurations*, données à la page 8 de chaque mois, sont tirées des tables de Delambre. (*V.* la *Conn. des Tems* de 1793.) On peut aussi les obtenir par des constructions graphiques; ce qui suffit très bien pour des déterminations dont la précision n'est pas de nature à exiger une grande rigueur. On décrit un cercle pour représenter l'orbite d'un satellite, et l'on y marque le lieu qu'il y occupe à un instant déterminé, soit d'après une table de ses mouvemens, soit d'après l'époque de l'une de ses éclipses. Comme sa vitesse de circulation autour de

Jupiter est connue (*v.* l'*Uranographie*, page 561), on peut assigner la place où il se trouve sur ce cercle à un autre moment, et de jour en jour. On sait aussi la position relative où se trouve la Terre, et par suite celle du diamètre de l'orbite qui se dirige vers nous; et l'on en conclut, si le satellite nous paraît près ou loin de cette ligne, à droite ou à gauche, et dans quel sens nous le voyons aller : car il procède, comme nous l'avons dit, de droite à gauche pour le spectateur placé dans la planète, à son pôle boréal. En en disant autant des autres satellites, pour chacun desquels il faudra tracer un cercle semblable, on a leurs positions relatives apparentes. Le satellite qui est dans le diamètre dirigé vers la Terre est en conjonction avec Jupiter, soit en-deçà, soit au-delà; il est en coïncidence avec lui, passe devant ou derrière; et dans les instans voisins, il nous semble le plus rapproché de la planète. Lorsqu'il est à l'élongation, une parallèle à ce même diamètre est tangente à l'orbite, et il nous semble le plus éloigné du disque de Jupiter. Cela explique comment les distances angulaires de cette planète à ses satellites ne peuvent rien apprendre sur sa distance réelle, à l'observateur qui les regarde de la Terre; et si le satellite qui nous semble le plus rapproché de Jupiter, n'est pas réellement le plus éloigné.

Pour éviter les longueurs des constructions graphiques, on a un instrument sur lequel sont tracés quatre cercles concentriques, pour représenter les orbites des quatre satellites; des alidades mobiles autour du centre suivent les progrès de leurs mouvemens, Jupiter étant censé au centre, et l'on conclut, à l'inspection, les configurations de ces corps.

Comme on ne donne, dans la 8ᵉ page, que les configurations pour une heure désignée, on a soin d'y indiquer par un point, mis du côté droit ou gauche du chiffre qui désigne un satellite, le sens où sa marche nous semble dirigée : on peut donc prévoir le lieu où il sera à une autre heure voisine.

Ainsi le 1 sept. 1830, à 8 heures du soir, on indique :

2. 4. ○ .1 3.

Le cercle blanc, placé dans la colonne du milieu, représente le

disque de Jupiter; les satellites 2 et 4 nous paraissent du côté gauche, quand on les voit dans une lunette qui renverse les objets, telle qu'est celle dont tous les astronomes se servent : 1 et 3 semblent être à droite; 1, 2 et 4 marchent dans le sens où nous jugeons qu'ils se rapprochent de la planète; 3 s'en éloigne, au contraire. Il ne faut pas oublier que nous n'entendons parler ici que des mouvemens apparens de ces corps vus dans la lunette, qui les montre en sens opposés de ce qu'ils paraissent à l'œil nu.

*Le point est toujours placé du côté du rond qui figure la planète, quand le satellite paraît s'en rapprocher, et de l'autre côté, dans le cas contraire.*

Il arrive quelquefois qu'un satellite n'est pas visible à l'heure indiquée en tête de la page, soit parce qu'il est éclipsé, soit parce qu'il est derrière ou devant le corps de la planète : alors on ne trouve pas son nº marqué parmi les autres; mais on est instruit de ces circonstances ainsi qu'il suit. L'éclipse est annoncée p. 7, et l'on reconnaît aisément si l'heure dont il s'agit est comprise entre celles de l'immersion et de l'émersion. Un cercle noir, accompagné d'un chiffre, marque qu'il y a éclipse, ou que le satellite est caché derrière le globe de Jupiter; désignation qui suffit pour distinguer ces deux cas l'un de l'autre. D'ailleurs, si le satellite est placé au-devant de la planète, on l'indique par un cercle blanc, près de la marge, affecté du nº du satellite. Alors, avec de fortes lunettes, on peut voir l'ombre de ce corps se projeter, comme un point noir, sur le disque éclairé de Jupiter : un observateur qui serait situé sur cette tache verrait une éclipse de Terre.

Ainsi le 1er août 1830, à 9 heures du soir, on trouve cette configuration indiquée :

●2  4.  1.  .3 ○

cela signifie que les satellites 1, 3 et 4 sont vus à la gauche de Jupiter, 1 et 4 s'en approchant, 3 s'en éloignant; que 2 est éclipsé, ou bien est caché derrière la planète : et en remontant à la p. 7, on apprend que c'est le 1er cas qui a lieu.

Le 16 juillet, on lit

1 ○     4. ·     3. ○     · 2 ○

Ainsi, le 3ᵉ et le 4ᵉ satellites sont seuls visibles; 1 et 2 sont situés devant la planète, l'un à gauche, l'autre à droite.

55. Il est aisé de conclure de ces différentes indications quel est le vrai mouvement actuel d'un satellite, puisque tous procèdent d'occident en orient pour l'habitant de Jupiter. Si je lis qu'un satellite est vu à droite, et par conséquent situé du côté gauche, et qu'il se rapproche, j'en inférerai qu'il est dans le quart de son orbite qui, situé à notre gauche, est le plus voisin de nous; qu'il s'avance vers le disque, et doit bientôt le traverser par-devant. Si le point eût été placé de l'autre côté du chiffre, l'astre aurait encore été à gauche, mais dans le quadrans le plus éloigné de nous, tendant vers l'élongation, etc...

56. Il est maintenant bien facile de distinguer quel est, parmi les satellites qu'on voit, celui qui va s'immerger, et sur lequel il faut porter toute son attention; car l'éclipse est prédite, p. 7, et, par les configurations, on sait donner à chacun son nom, c.-à-d. l'affecter du n° qui le distingue, d'après la place relative qu'il occupe. Cette place peut, en effet, être fixée, pour toutes les heures, par le sens du mouvement qu'il se trouve avoir à l'heure désignée.

Relativement à l'immersion, il faut remarquer que l'on n'entend pas par ce mot l'instant où le satellite devient invisible en se cachant derrière le globe planétaire, mais celui où il entre dans son cône d'ombre, ce qui est tout autre chose. On doit donc examiner d'abord de quel côté de Jupiter ce cône est dirigé à notre égard.

Soient S le Soleil (fig. 13), J la planète. L'axe du cône d'ombre projetée est le prolongement de la droite SJ, qui joint les centres des deux astres; l'orbite de la Terre est A$t$BT, cinq fois moins éloignée que J du Soleil S. Le satellite $s$ circule autour de J, dans le sens indiqué par une flèche. D'abord, l'éclipse ne peut avoir lieu que dans la partie de l'orbite qui est au-delà de Jupiter, où la marche nous

paraît dirigée de droite à gauche, dans le sens où elle a lieu en effet.

Si la Terre est vers A, Jupiter sera près de la conjonction, passera au méridien presque en même temps que le Soleil, et nous cachera son cône d'ombre; nous ne pourrons voir ni les éclipses, ni même Jupiter, qui sera caché par le Soleil ou par l'éclat du jour. Dans les jours voisins, tant avant qu'après la conjonction, la même chose aura lieu, parce que la planète sera plongée dans les feux du Soleil, dont la lumière ne permet pas de faire des observations de ce genre; et comme il est inutile d'indiquer alors des éclipses que personne ne peut voir sur la Terre, la *Conn. des Tems* n'en marque aucune, non plus que les configurations : c'est ce qui arrive du 18 novembre 1829 jusqu'au 18 janvier 1830. Voilà environ 2 mois où les éclipses et les configurations ne sont pas indiquées. Comme les conjonctions de Jupiter avec le Soleil ne se reproduisent que tous les 399 jours, il y a des années où la *Conn. des Tems* n'offre presque pas de ces lacunes; telle est l'année 1830.

Quand la Terre est en B, Jupiter est en opposition, passe à minuit au méridien, et cache son cône d'ombre; il n'est pas possible de voir les éclipses; mais pendant les jours voisins, l'observation est facile.

Lorsque la Terre est vers T, après l'opposition, le cône d'ombre est du côté gauche de la planète; c'est donc de ce côté qu'il faut attendre, soit l'immersion, soit l'émersion d'un satellite. Nous le voyons à la gauche du disque avant qu'il entre dans l'ombre, et aussi après qu'il en est sorti; cependant, comme le corps de la planète nous cache la région droite de son ombre, nous ne pouvons voir que l'émersion du 1er et du 2e satellite (et même du 3e, si ce n'est quand Jupiter est en quadrature). Cette émersion se fait, aussi bien que l'immersion, vers la gauche ou l'orient, le satellite courant dans le sens qui paraît l'écarter du disque de la planète. Quant au 4e satellite, comme son orbite est plus étendue, il entre au cône d'ombre en des points assez éloignés pour qu'on puisse

voir l'immersion et l'émersion, du moins si elles arrivent dans un temps de nuit favorable.

Toutes ces circonstances ont lieu après l'opposition, c'est-à-dire quand le Soleil et Jupiter nous paraissent ensemble tellement situés, que Jupiter se lève et se couche après le Soleil, et passe au méridien le soir avant minuit.

Mais si la Terre est placée vers *t*, avant l'opposition, le Soleil se lève à l'époque où la planète descend vers le couchant; celle-ci passe au méridien depuis minuit jusqu'à midi; l'ombre de Jupiter est projetée du côté droit, ou vers l'occident. La portion orientale du cône est cachée par le disque; on ne peut voir les émersions du 1<sup>er</sup> et du 2<sup>e</sup> satellite (ni même celles du 3<sup>e</sup>, si ce n'est à la quadrature). Les immersions sont seules visibles; ce sont elles qu'on peut observer du côté droit ou occidental de Jupiter, le satellite marchant dans le sens qui paraît le rapprocher du disque de cette planète.

Ainsi, tant que Jupiter passe au méridien le soir avant minuit, on ne peut voir que les émersions des deux ou trois premiers satellites, et il faut les attendre du côté oriental, le satellite marchant vers cette région et s'écartant de la planète sur le côté gauche; mais si Jupiter passe au méridien après minuit, c'est au contraire l'immersion qu'on pourra voir, et elle aura lieu du côté occidental, le satellite se rapprochant de la planète. Pour le 4<sup>e</sup> satellite, les deux phases sont visibles tant avant qu'après l'opposition, et du côté de Jupiter où l'ombre et la marche viennent d'être indiquées.

Dans les lunettes qui renversent les objets, ces apparences arrivent des côtés opposés.

57. Lorsqu'on s'est préparé à voir une immersion, la lumière du satellite s'affaiblit peu à peu, jusqu'à l'instant où elle disparaît totalement. L'observation présente une incertitude de quelques secondes, parce que la force de la vue de l'observateur, la fatigue que son organe ressent par une longue attention, la bonté de la lunette, la pureté de l'air, contribuent à rendre le résultat plus ou moins exact. Il n'est pas rare qu'après qu'on a cessé de voir le satellite, il re-

paraisse tout à coup, parce qu'il n'était pas encore éclipsé, et qu'on ne l'avait perdu de vue qu'à cause des circonstances qui viennent d'être énumérées. Aussi, quand on observe une immersion, faut-il encore compter les secondes quelque temps après la disparition du satellite, en continuant de l'observer, pour s'assurer si l'on n'est pas trompé par un prestige.

Le moment de l'émersion est encore plus douteux, parce qu'on ne peut pas juger le lieu précis où le petit astre montrera sa lueur croissante.

Aussi, les observations d'éclipses de satellites ne peuvent-elles donner les longitudes terrestres avec une grande précision; cependant, comme elles sont faciles à faire, et qu'elles ne nécessitent aucun calcul, ce procédé est précieux pour la Géographie, qui est si peu avancée, qu'on est loin de dédaigner des moyens médiocrement exacts, surtout s'ils sont d'une facile application. Nous donnerons plus tard (n° 206) un exemple de ce genre de calcul.

*Pages neuf, dix, onze et douze du mois.*

58. Nous exposerons plus tard (n° 175) comment on peut déterminer la longitude terrestre d'un lieu, en mesurant la distance de la Lune, soit au Soleil, soit à un autre astre. La méthode des *distances lunaires* est d'une fréquente application en mer, et cette partie de la *Conn. des Tems* est spécialement destinée à ces sortes de calculs. On y trouve les distances de la Lune au Soleil et à quelques étoiles voisines de l'écliptique. Ces distances sont données de 3 en 3 heures, et pour les dates du mois où elles peuvent être observées de quelque endroit du globe.

Ce sont des *distances vraies,* c'est-à-dire telles que les verrait un observateur transporté au centre de la Terre, s'il n'y avait pas d'atmosphère; ces distances sont donc exemptes de parallaxe et de réfraction. Les heures sont solaires de temps vrai à Paris. Voici comment on calcule ces distances.

Soient $l$ le centre de la Lune (fig. 16), $s$ celui du Soleil ou

d'une étoile, *ls* l'arc de distance ou de grand cercle qui les joint, *pzm* le méridien, *p* le pôle de l'équateur, *z* le zénith de Paris, et, par conséquent, *zp* la *colatitude* ou le complément de la latitude ($zp = c = 41° 9' 46''$). Les arcs *ps*, *pl* sont les compl. $d'$ et $d$ des déclinaisons connues des deux astres; *mpl*, *mps* sont leurs angles horaires actuels. Nous ferons la différence de ces angles $=$ angle $lps = p =$ diff. des asc. dr.

Or, le triangle sphérique *lps*, où l'on connaît deux côtés $d$, $d'$ et l'angle compris $p$, étant résolu par rapport à la distance inconnue $ls = \Delta$, on a (équ. 33, p. 4)

$$\cos \Delta = \cos d \cos d' + \sin d \sin d' \cos p,$$

ou

$$\cos \Delta = \cos d \cos d' \left(1 + \text{tang}\, d\, \text{tang}\, d' \cos p\right).$$

On peut rendre cette équ. propre au calcul des logarithmes, sans que l'opération soit sensiblement abrégée. On pose

$$\text{tang}\, \varphi = \text{tang}\, d \cos p,$$

$$\cos \Delta = \frac{\cos d . \cos (d' - \varphi)}{\cos \varphi}.$$

La 1[re] équ. donne l'arc auxiliaire $\varphi$, qui, introduit avec son signe dans la 2[e], fait connaître $\Delta$.

Appliquons cette théorie à un exemple :

Quelle est, le 6 novembre 1830, la distance vraie des centres du Soleil et de la Lune, à midi vrai de Paris? La *Conn. des Tems* donne

| | | |
|---|---|---|
| Æ☉ $= 221° 7' 11''$, | $D' = 15° 55' 42''$ A, | $d' = 105° 55' 42''$, |
| Æ☾ $= 123.32. 1$, | $D = 16.49.44$ B, | $d = 73.10.16$. |
| $p = 97.35.10$. | | |

Voici le détail de l'opération, dans les deux systèmes d'équ. :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| tang $d$....... | 0.5193205 (*) | | cos $d$..... | 9.4616702 |
| tang $d'$....... | 0.5445580 — | | cos $d'$.... | 9.4384392 |
| cos $p$. ....... | 9.1206269 — | | | |
| 1,529344...: | 0.1845054 + (*).. | 2,529344........ | | 0.4030079 |
| | | | cos $\Delta$ (*).. | 9.3031173, |

(*) On retranche 10 de chacun de ces log., parce que le 1[er] terme de la valeur cos $\Delta$ doit avoir R pour diviseur, et le second terme, $R^2$. (*V.* la note page 41.)

ou bien

| | | | |
|---|---|---|---|
| tang $d$ ...... | 10.5193205 | cos $d$ ...... | 9.4616702 |
| cos $pl$ ...... | 9.1206269 — | cos $(d'-\phi)$. | 9.8035820 — |
| tang $\phi$ ...... | 9.6399174 — (*) | cos $\phi$ ...... | — 9.9621355 |
| $\phi =$ | — 23° 34′ 46″ | cos $\Delta$ ...... | 9.3031167 — |
| $d' =$ | 105. 55. 42 | | $\Delta = 101° 35' 36''$. |
| $d' - \phi =$ | 129. 30. 28. | | |

Ces deux calculs conduisent à la même valeur de log. cos $\Delta$.

On peut encore rapporter les astres à l'écliptique; alors le point $p$ (fig. 16) est le pôle de ce cercle, $pl$, $ps$ sont les complémens des latitudes des deux astres, et l'angle $lps = p$ = la diff. de leurs longitudes.

59. On commence donc par chercher pour midi vrai de Paris, et de 3 en 3 heures, les asc. dr. et déclin., ou bien les longit. et latit. de la Lune; on en fait autant pour le Soleil et les principales étoiles : il faut corriger les données de ces dernières, de la précession, de la nutation et de l'aberration. (*V.* ci-après, n° 75.) Quand on ne fait pas l'évaluation de $\Delta$ pour midi, il faut obtenir l'asc. dr. ☾, en tenant compte des diff. secondes. (*V.* n° 78.) Cela fait, on en conclut les valeurs de $d$, $d'$ et $p$, et, par le calcul de l'équ. du n° 58, celle de $\Delta$, qu'on inscrit dans sa colonne, à son ordre de date. C'est ainsi que sont construites les pages de la *Conn. des Tems* que nous considérons ici.

60. Les étoiles qui servent à ces opérations sont au nombre de neuf, savoir, *α Bélier, Aldébaran, Pollux, Régulus, l'Epi, Antarès, Ataïr, Fomalhaut,* et *Markab* ou *α Pégase*. Les tables font connaître les longit., latit., ou les asc. dr. et déclin. de ces astres, et il est facile de faire l'application de notre théorie.

Mais comme le calcul qui sert à trouver la longitude du lieu, d'après une distance lunaire mesurée, exige qu'on connaisse aussi les hauteurs de ces astres, il faut qu'on puisse

(*) Il en faut dire autant pour tang $\phi$. Observez que $d$ étant $> 45°$, le log. de sa tang. a 10 pour caractéristique, au lieu de 0, qui est dans la table.

les voir nettement, en même temps que l'horizon de la mer, lorsqu'on veut trouver la longitude d'un navire ; or, c'est ce qui est assez rare : pendant la nuit, on ne voit pas l'horizon, et le jour, les étoiles sont invisibles. Ce n'est que dans le crépuscule qu'on peut tirer parti de cette théorie, quand on veut observer des étoiles (*).

On préfère donc se servir des distances du Soleil à la Lune, toutes les fois que ces astres sont ensemble sur l'horizon. La différ. $p$ de leurs asc. dr, ou de leurs longit. ne doit pas sortir de certaines limites, pour que l'observation soit possible. Trois jours avant et après la nouvelle Lune, on ne peut pas prendre la distance de la Lune au Soleil, parce que ces astres sont trop rapprochés; ils sont au contraire trop éloignés pour être visibles ensemble 3 jours avant et après la pleine Lune. Ainsi, $p$ doit être $> 34°$ et $< 125°$, pour qu'on trouve $\Delta$ dans la *Conn. des Tems.*

61. Quant aux valeurs de $\Delta$ pour les heures intermédiaires, on les trouve par interpolation, comme n° 16 (**); et même, si l'on veut tenir compte des différ. secondes, on le fera comme n° 81.

*V.* l'application qui sera faite ci-après, n° 177.

*Phénomènes et observations,* p. 152 à 157.

62. A la fin de l'*Annuaire,* on donne en 6 pages, et aux diverses dates de chaque mois, les phénomènes astronomiques les plus remarquables, tels que les suivans :

1°. Les commencemens de saisons, et les époques où le

(*) C'est par cette raison que les marins désirent depuis long-temps qu'on leur donne les valeurs de $\Delta$ pour Vénus, Mars, Jupiter et Saturne, qui souvent sont visibles en plein jour. Ces distances seraient extrêmement utiles, tandis que celles de $\alpha$ Bélier et de l'Épi ne le sont jamais. On attend avec impatience que la *Conn. des Tems* satisfasse à ce besoin des navigateurs.

(**) M. Mathieu a composé une table d'interpolation : c'est celle de la p. 164 de la *Conn. des Tems*, qui est pour 12 heures d'intervalle (*v.* n° 81), afin d'abréger le calcul des différences secondes. On peut l'employer ici.

Soleil entre dans chaque signe du zodiaque, c.-à-d. quand sa longitude devient $0^s$, $1^s$, $2^s$, etc. Cet instant s'obtient par l'interpolation de la longitude donnée page 1re de chaque mois. On voit, par exemple, en septembre 1830,

Le 23, longit. ☉ = 5.29.55. 4, à midi vrai.
Le 24.......... = 6. 0.53.53

Differ. = 58′ 49″, en 24 h.

C'est dans l'intervalle du 23 au 24 que la longitude est juste de $6^s$, et que, l'automne commençant, le Soleil entre dans la Balance. Pour assigner l'heure où ce passage arrive, on prend le mouvement horaire (p. 33), qui est 2′ 27″,04, et l'on pose

Si 2′ 27″,04 donnent $1^h$, combien 4′ 56″ ?

Ces 4′ 56″ sont ce qui s'en faut que la longitude du 23 soit juste $6^s$. On peut encore poser

Si 58′ 49″ donnent $24^h$, combien 4′ 56″ ?

Voici ces deux opérations :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 h......... | 3.55630 | 24 h......... | 4.93651 |
| 4′ 56″....... | 2.47129 | ....................... | 2.47129 |
| 2′ 27,04......— | 2.16744 | ......... 58′ 49″......— | 3.54765 |
| | 3.86015 | | 3.86015. |

Le nombre correspondant est $2^h$ 0′ 46″,9. Ainsi l'automne commence le 23 septemb. 1830, à $2^h$ 1′ du soir; ce qui s'accorde avec ce qu'on lit dans la *Conn. des Tems*.

63. 2°. On trouve aussi les instans des éclipses des principales étoiles par la Lune, leurs *appulses,* ainsi que celles des planètes, le tout *en temps vrai de Paris*. Nous allons donner quelques explications sur ce sujet.

Il n'arrive qu'une fois chaque mois qu'on puisse voir le disque entier de la Lune, c'est à l'instant de l'opposition. Le plus souvent une partie plus ou moins étendue est obscure. Depuis la nouvelle jusqu'à la pleine Lune, c'est précisément ce bord obscur qui occulte l'étoile : il est situé du

côté oriental; et comme la marche de l'astre se dirige toujours vers l'est, par son mouvement propre dans l'orbite, c'est ce bord obscur qui s'approche de l'étoile, l'atteint et la cache : tel est le moment de l'immersion. L'émersion arrive au contraire du côté lumineux du disque, et l'on voit l'étoile en sortir à la fin de l'éclipse.

Mais après la pleine Lune, c'est au contraire le bord obscur qui est situé du côté de l'occident; la Lune passe au méridien après minuit: l'immersion se fait par le bord éclairé qui est à gauche, et l'émersion par le bord obscur. L'occultation se fait encore par le bord est, et l'étoile reparaît sur le bord ouest. Toute la différence, c'est que le premier est obscur avant la pleine Lune, et que le second l'est après.

L'immersion ne présente aucune difficulté à l'observation; on voit les deux astres se rapprocher de plus en plus, et l'étoile disparaît enfin. Mais il n'en est pas de même de l'émersion; comme il faut se rendre attentif à l'instant où l'étoile reparaît, si l'on ne sait pas de quel point du disque elle va sortir, on est exposé à manquer l'observation, attendu que plus la lunette est douée d'un fort grossissement, et moins est étendue la portion du bord lunaire contenue dans le champ. On trouve dans la *Conn. des Tems* la différence entre les latitudes du centre de la Lune et de l'étoile; et quoique la parallaxe influe sur la situation de ce point de sortie, cependant cette donnée suffit pour porter l'attention sur la partie du disque où l'étoile va reparaître.

En général, les occultations sont difficiles à observer avec précision; cela est même tout-à-fait impossible en mer, si ce n'est par un calme parfait, à cause des mouvemens du navire. L'immersion est ordinairement plus certaine que l'émersion.

On a quelquefois remarqué l'étoile projetée sur le disque lunaire pendant 1 à 4 secondes après son occultation. Quoique plusieurs astronomes nient que ce phénomène ait lieu, il n'en est pas moins véritable; c'est surtout Aldébaran qui le présente plus fréquemment. Quant à la cause de cet effet, elle est très incertaine; on pense que les dentelures du bord lunaire peu-

vent produire ce phénomène. On peut apercevoir l'étoile, quoiqu'elle soit déjà derrière ce bord, quand les creux situés entre les montagnes laissent encore passer sa lumière. (*V.* un Mémoire de M. South, parmi ceux de la Société astronomique de Londres.)

64. 3°. On indique encore les *appulses*, phénomène qui montre l'étoile rasant le bord en haut ou en bas, sans être éclipsée. Comme les étoiles qui sont très proches de la Lune peuvent être éclipsées pour un observateur, sans l'être pour un autre, selon la place qu'il occupe sur le globe terrestre; ces annonces sont très utiles. La parallaxe lunaire est si grande, qu'il arrive souvent qu'une étoile est éclipsée pour un peuple sans l'être pour un autre.

De toutes les méthodes d'obtenir la longitude d'un lieu, les occultations of. ·nt la plus exacte; mais comme la parallaxe y joue un grand rôle, il reste à faire un calcul assez délicat: nous l'exposerons plus tard (n° 204). Mais comme l'observation n'exige que du soin et une bonne lunette, le calcul peut être fait à loisir, et même long-temps après, et par une autre personne, ce qui est une chose très importante. En effet, lorsqu'on est certain de l'heure du lieu à l'instant de l'une des deux phases de l'éclipse, vue de ce lieu, ce nombre suffit aux calculateurs exercés pour déterminer la longitude demandée. (*V.* n° 204.)

Il faut en dire autant des éclipses de Soleil, qui sont aussi annoncées avec un grand soin à la p. 7 de la *Conn. des Tems*, ainsi que celles de la Lune.

Les particularités relatives aux planètes sont encore indiquées parmi les phénomènes de chaque mois.

65. 4°. Enfin, on donne les dates du jour où la Lune, parcourant son orbite elliptique autour de la Terre, arrive à l'apogée ou au périgée. Ces circonstances sont nécessaires pour prédire l'heure et la hauteur de la marée, ainsi que quelques autres phénomènes astronomiques. Ces heures sont liées aux variations de la parallaxe horizontale et du demi-diamètre de la Lune (*v.* n^os 45 et 91); car dès qu'on trouve

que ces quantités sont *maxima*, la Lune est périgée : elle est apogée quand elles sont *minima*.

Vient ensuite le *tableau des marées*, p. 158.

Comme nous traiterons en détail de la manière de prédire l'heure et l'intensité des marées, nous remettons à donner plus tard les explications relatives à ce passage de la *Conn. des Tems*. (*V.* n° 245.)

*Réfractions*, p. 159, 160, 161 *de la Conn. des Tems.*

66. La table de réfractions, p. 160, est déduite de la formule de Laplace, pour les diverses hauteurs des astres. (*V.* l'*Uranographie*, n° 363.) On y entre avec la hauteur observée, et l'on trouve le petit arc qu'il faut retrancher pour avoir la *hauteur vraie*, celle qu'on obtiendrait s'il n'y avait pas d'atmosphère. L'interpolation se fait en partageant proportionnellement la différ., qui est inscrite dans une colonne pour 10′ de variation de hauteur.

Quelle est la hauteur vraie du bord inférieur du Soleil, quand la hauteur apparente est.......... 10° 44′ 19″ 5

| | | | |
|---|---|---|---|
| La table donne pour 10° 40′........ | | 5′ 0″ 3 | |
| 4′........ | — | 1,8 | |
| 0′,3...... | — | 1 | |
| | | 4.58,4 ........ | — 4.58,4 |
| | | Hauteur vraie... | 10.39.21,1. |

67. En mer, on se contente ordinairement de ce résultat, qui est assez approché, eu égard à l'exactitude des observations ; mais l'état de l'atmosphère modifiant les réfractions, il faut, lorsqu'on veut des valeurs précises, corriger la hauteur ainsi obtenue, en consultant le baromètre et le thermomètre (*). La table est construite pour la pression et la température moyennes de 760mm (ou 28 pouces) et 10° centigrades. Lorsque ces circonstances n'existent pas, voici ce qu'il faut faire.

(*) Si l'observation est faite dans l'intérieur d'un édifice, on doit prendre la température moyenne entre celles du dehors et du dedans de la pièce.

Entrez dans la table, page 161, de la *Conn. des Tems*, avec les nombres indiqués par ces deux instrumens. L'échelle du thermomètre est centigrade, celle du baromètre est en millimètres ou en pouces. Multipliez l'un par l'autre les deux nombres de la table qui répondent aux indications du thermomètre et du baromètre, et ensuite multipliez le produit par la réfraction moyenne déjà trouvée. Le résultat sera la réfraction due à l'état de l'atmosphère.

Mais les deux facteurs dus à la pression et à la température donnent un produit peu différent de 1; mis sous la forme $1 \pm x$, $x$ est très petit dans ce produit. Il suffira donc de multiplier la réfraction moyenne par ce petit nombre $\pm x$, et le produit, pris avec son signe, sera la correction que doit éprouver cette réfraction moyenne.

Supposons que, dans le dernier exemple, le baromètre soit à $751^{mm}$, et le thermomètre à $18^{d}$. La table donne pour ces nombres 0,988 et 0,971, dont le produit est 0,959, qu'on écrit ainsi, $1 - 0{,}041$. Il faut donc multiplier par 0,041 la réfraction trouvée ($4'\,58'',4 = 298'',4$). Voici le calcul :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 751.......... | 0,988 | Réfr. moy. = | 298″4 | |
| 18°.......... | 0,971 | | − 0,041 | |
| | 0,889 | | 11,936 | |
| | 69 | | 298 | |
| | 1 | | | |
| Produit....... | 0,959 | 4′ 58″,4 − | 12,23 = | 4′ 46″2 |
| | = 1 − 0,041 | Haut. appar......... | = | 10.44.19,5 |
| | | Haut. vraie......... | = | 10.39.33,3. |

68. Lorsqu'on néglige la température et la pression, la table de la *Conn. des Tems* est très commode; mais comme il n'est pas ordinaire que les conditions atmosphériques soient $760^{mm}$ et 10°, dès qu'on veut corriger le résultat, la table perd son avantage, et le calcul devient assez long.

Les tables V et VI, qu'on trouvera à la fin du volume, sont préférables dans ce cas; on y voit, au lieu de la réfraction et des deux corrections, les log. de ces trois nombres. La pre-

mière est prise pour la température zéro, ou de la glace fondante, et pour la pression de 760$^{mm}$. On y prend les log. qui répondent à la dist. zénith. observée, à la pression exprimée en millimètres, et à la température donnée par le thermomètre centigrade à mercure ; on ajoute ces trois log. La somme est le log. de la réfraction demandée, dans les conditions atmosphériques données. *Le nombre répondant à ce log. doit être ajouté à la dist. zénith. app., ou retranché de la hauteur.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ainsi, dans l'ex. ci-dessus, dist. zénith. | | | = 79° 15′ 40″ 50 |
| Table V, pour 79° 15′ | 2.4915 | | |
| pour 40″, 5 = 0′, 7. | 5 | | |
| Table VI, pour 751$^{mm}$ | $\bar{1}$.9948 | | |
| pour 18° | $\bar{1}$.9702 | | |
| Nombre 286″,42 | 2.4570 | | + 4.46,42 |
| | | Dist. zénith. vraie | = 79.20.26,92. |

Nos tables sont construites d'après la formule de Laplace, $r$ étant la réfraction en secondes pour 760$^{mm}$ et 0°, et la dist. zénith. $z$, on a (*v.* l'*Uranographie*, n° 363)

$$r = 60'',5668 \tan z - 0'',067017 \tan^3 z \ldots \text{ (table V).}$$

Si la pression est de $h$ millimètres, et la température centigrade $t$, on a

$$R = \frac{h}{760} \times \frac{1}{(1+mt)(1+nt)} \times r,$$

$m$ étant $= 0,00375$ et $n = \frac{1}{5550}$.

Cependant cette formule n'est exacte que depuis $z = 0$ jusqu'à $z = 75°$. Quand l'astre est voisin de l'horizon, il faut faire une petite correction qu'on trouve dans la *table supplémentaire.* Dans notre exemple, cette correction est $-$ 0″,40 ; en sorte que la réfraction n'est que 4′ 46″,02, et la dist. zénith. vraie = 79° 20′ 26″,52, résultat à fort peu près le même que ci-devant. Ces calculs exigent l'emploi d'une table de logarithmes.

*Différences logarithmiques*, p. 162 et 163.

69. Lorsqu'on veut calculer la distance vraie de la Lune au Soleil ou aux étoiles, connaissant la distance apparente et les hauteurs, la formule contient le facteur $\frac{\text{cos haut. vraie}}{\text{cos haut. appar.}}$. Ces deux tables donnent le log. de cette fraction, l'une pour le Soleil, l'autre pour les étoiles. (*V.* n° 178 l'usage de ces tables.)

*Table de correction pour les interpolations*, p. 164.

L'usage de cette table sera expliqué p. 105.

*Table pour réduire le temps en degrés*, p. 165 et 166.

70. Comme, chaque heure, 15° de l'équateur passent au méridien, cette table est construite d'après ce rapport. Soit proposé de convertir H heures en degrés, il faudrait poser cette proportion,

Si $1^h$ vaut 15°, combien H heures? $x = 15\,H$.

Ainsi, aux heures contenues dans la 1^re^ colonne, correspondent, dans la 2^e^, leur produit par 15.

Si, par exemple, on sait que la longitude de Pétersbourg est $1^h\,51'\,54''$ à l'orient du méridien de Paris, et qu'on la demande en degrés, on prend dans la table :

| | |
|---|---|
| Pour $1^h$.......... | 15° |
| 51'.......... | 12.45' |
| 54''.......... | 13.30'' |
| On a donc.......... | 27.58.30. |

71. La même table peut aussi servir à réduire les degrés en temps; mais il est plus commode de recourir à la table de la page 166, qui a pour argument ce nombre de degrés : on peut y prendre les degrés et heures pour des minutes ou des secondes. Ainsi, pour l'arc de 27° 58' 30'', on a

| | |
|---|---|
| Pour 27°.......... | $1^h48'$ |
| 58'.......... | 3.52'' |
| 30''.......... | 2 |
| | 1.51.54. |

Tel est l'usage de la *table pour réduire les degrés en temps*, p. 166.

72. Au reste, ces deux tables sont absolument inutiles, puisqu'on a plus tôt fait de calculer le 4ᵉ terme d'une proportion, ce qui se réduit à multiplier le temps par 15, ou à diviser l'arc par 15. En effet, remplaçons 15 par $\frac{60}{4}$, et voici ce qu'il faudra faire :

1ᵉʳ Cas. Je veux changer en degrés.................... $1^h 51' 54''$
Je pose $4^h : 60^o :: 1^h 51' 54'' : x$; je prends donc le quart du temps proposé, qui est........................ $27.58.30'''$
Et pour multiplier par 60, je change les ' en °, les " en ', les ‴ en ", savoir.................................... $27° 58' 30''$

Ainsi, *pour réduire des temps en arcs, divisez par 4, et changez les ' en °, les " en ', les ‴ en "*.

2ᵉ Cas. Réciproquement, soit proposé l'arc.............. $27° 58' 30''$
Pour l'exprimer en temps, je pose $60^o : 4^h :: 27°58'30'' : x$.
Le produit par 4 est.................................... 111. 54. 0
Pour diviser par 60, j'écris.............................. 111.54.0‴
Ou, en divisant 11 par 6, pour extraire les degrés.......... $1^h$ 51.54.

Donc, *pour réduire les arcs en temps, multipliez par 4, et changez les ° en ', les ' en "*, etc.

Observez que lorsqu'un nombre de minutes, ou de secondes, etc., dépasse 60, il contient des unités de l'ordre supérieur, qu'on extrait en divisant les dixaines par 6. Le quotient est ce nombre d'unités qu'il faut retenir; on pose seulement le reste.

Voici encore un exemple de chacune de ces réductions :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Réduire en degrés... | $14^h$ 19' 22",54, | Réduire en temps | 214°50'38",1 |
| Prenez le quart..... | 3. 34.50,635; | quadruplez.. | 859.22.32,4 |
| Ou bien.......... | 214' 50"38‴,1 | ..... | 14. 19.22,54 |
| Résultat demandé.. | 214° 50' 38",1 | ............ | 14° 19' 22"54. |

*Accélération des étoiles en temps moyen*, p. 165.

73. Puisque l'*année tropique*, ou le temps du retour du Soleil à l'équinoxe ♈, est 365$^j$,2422181, si cet astre parcourait uniformément l'équateur, on trouverait l'arc décrit en

1 jour, en posant cette proportion (*),

$$365^j,2422181 : 360^\circ :: 1^j : x = 0^\circ,9856472 83.$$

Cet arc revient à $59' 8'',33022 = 1^\circ - 51'',670.$

Telle est la quantité dont l'asc. dr. du Soleil moyen s'accroît chaque jour moyen. Un arc d'équateur de $360^\circ\ 59'\ 8'',330$ passe au méridien dans cette durée; ce qui fait

$$\text{en 1 heure moyenne, } 15^\circ\ 2'\ 27'',847 = 15^\circ,0410686.$$

Il ne passe que 15° seulement chaque heure sidérale.

En réduisant donc 59′ 8″,33 en temps, à raison, soit de 15°, soit de 15°,0410686 par heure, on en conclut qu'il faut au Soleil moyen 3′56″,555348 de temps sidéral, ou bien 3′55″,90945 de temps moyen, pour décrire cet arc de 59′ 8″ $\frac{1}{3}$. *Tel est l'excès du jour moyen sur le jour sidéral*, ou, si l'on veut, le temps sidéral et moyen qu'une étoile emploie chaque jour de moins que le Soleil moyen, pour revenir au méridien du lieu. C'est ce qu'on appelle l'*accélération des fixes*, qu'on trouve fractionnée dans la table p. 165 de la *Conn. des Tems*.

En général,

$$24^h \text{ moy.} = 24^h\ 3'\ 56'',555348 \text{ t. sid.},$$
$$24^h \text{ sid.} = 24^h - 3'\ 55'',90945 \text{ t. moy.}$$

Si S exprime en temps sidéral, et M en temps moyen, une durée écoulée, on a

$$M = 0,99726\ 9566 \times S = S - 0,00273\ 0434 \times S,$$
$$S = 1,00273\ 790912 . M = M + 0,00273\ 790912 . M.$$

---

(*) Il suit des travaux récens de M. Bessel que l'année tropique est

$$= 365^j,24222\ 013 - t . 0,00000\ 006686,$$

$t$ désignant les années écoulées depuis 1800. Ainsi, actuellement (1830), l'année tropique est de

$$365^j,24221\ 8124 = 365^j\ 5^h\ 48'\ 47'',6459.$$

L'année sidérale $= 365^j,25637\ 4417 = 365.6.\ 9.10,7496.$

V. *Conn. des Tems* de 1831, page 154.

C'est sur ces résultats numériques que sont construites les tables I et II d'*accélération des fixes*, dont la 1[re], en temps moyen, revient à celle de la *Conn. des Tems*, mais est plus développée.

Pour montrer l'usage de ces tables, nous les appliquerons à des exemples. (*V.* n[os] 110 et 111.)

Entre deux observations faites à une pendule réglée sur le temps sidéral, il s'est écoulé. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $8^h 43' 51'' 42$ t. sid.

| | | | |
|---|---|---|---|
| La table I sert à traduire cette durée en temps moyen | pour $8^h$ | − | 1. 18,64 |
| | $43'$ | − | 7,04 |
| | $51''$ | − | 0,14 |
| équivalent à. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | | | 8.42.25,60 t. m. |

Si la pendule eût été réglée sur le temps moyen, elle eût indiqué pour la durée écoulée. . . . . . . . . . . . . . . . . . . $8^h 42' 25'' 60$ t. m.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Réciproquement, on traduit cette durée moyenne en sidérale, à l'aide de la table II. | p. $8^h$ | + | 1. 18,85 |
| | $42'$ | + | 6,90 |
| | $26''$ | + | 0,07 |
| Durée sidérale équivalente. . . . . . . . | | | 8.43.51,42 t. sid. |

*Catalogue d'étoiles*, p. 168.

74. Les étoiles sont rangées ici par ordre d'ascensions droites, telles qu'elles se présentent tour à tour au méridien ; car l'*ascension droite d'une étoile est l'heure sidérale de son passage au méridien* (n° 8). On y indique leurs noms, leurs grandeurs, l'asc. dr. en temps et en degrés, la déclinaison et les variations de ces coordonnées pour un an, en vertu de la précession des équinoxes. En multipliant ces *variations annuelles* par le temps écoulé depuis l'époque indiquée en tête de la table (ce temps exprimé en années et fractions), on a la correction de précession, qui, *prise avec son signe*, doit être ajoutée aux coordonnées de la table, pour donner celle de toute autre époque. Pour les temps antérieurs à l'origine, les variations doivent être changées de signe.

Les catalogues d'étoiles sont renouvelés tous les dix ans, parce qu'on ne peut regarder les variations annuelles comme constantes que pendant cette durée; encore cela n'est-il

pas tout-à-fait exact pour les circompolaires. (*V.* ci-après, n° 308.)

Notre table VII est un catalogue de ce genre, qui a pour époque le 1er janvier 1830. La table VIII indique les fractions décimales d'année pour les diverses dates. Nous allons montrer l'usage de ces tables, et spécialement des nôtres, en les appliquant à l'exemple qui suit. La forme de la table VII est la même que celle de la *Conn. des Tems.*

On demande le lieu de Sirius le 22 mai 1828.

Le catalogue date du 1er janvier 1830. La table VIII donne pour le 22 mai la fraction 0,386; jusqu'à la fin de l'année on a donc 0,614, qui est le complément. Ainsi le 22 mai 1828 est antérieur à l'*époque* de 1,614 ans. Les variations annuelles sont + 2″,643 en asc. dr., et — 4″,418 en déclin.; le facteur est — 1,614. Voici le calcul :

| | |
|---|---|
| + 2″643 | — 4″418 |
| — 1,614 | — 1,614 |
| 2,643 | 4,418 |
| 1,586 | 2,651 |
| 26 | 44 |
| 10 | 18 |
| — 4,265 | + 7,131 |
| Æ = 6.37.39,27 | D = — 16.29.18,74 |
| 6.37.35,00 | — 16.29.11,61. |

A cet égard, il faut remarquer que les *déclin. australes sont toujours considérées comme négatives*, et que la correction positive doit être retranchée, d'après la règle des signes algébriques. Dans la *Conn. des Tems*, au lieu de marquer de — ces déclin. australes, on se sert de la lettre A, et on les regarde comme positives, ainsi que les boréales; mais comme les variations annuelles ont, dans ce cas, un signe contraire au nôtre, le résultat revient au même. Cependant notre mode est plus analytique.

75. Les asc. dr. et déclin. ainsi obtenues doivent encore être corrigées de l'*aberration et de la nutation*, pour avoir leurs valeurs *apparentes*, telles que nous les observons. La

*Conn. des Tems* n'indique pas le moyen d'effectuer ces corrections (*), mais notre table y pourvoit pour les étoiles qu'on y trouve.

La correction d'aberration dépend de la longit. actuelle du Soleil, arc connu, que nous désignerons par ⊙ ; elle a la forme M sin (⊙ + θ). L'arc θ et le log M sont donnés dans notre table VII pour chaque étoile ; ce sont des constantes pendant un temps très long. Il faut en dire autant de log N et l'argument φ dans l'expression de la nutation d'asc. dr., qui est = N sin (☊ + φ), ☊ étant la longit. du nœud ascendant de la Lune. Ainsi, près de Sirius, on lit

$5^s 21^\circ 21'$  0.1501 || $6^s 1^\circ 51'$  9.9658.

Pour la date proposée, il faut tirer de la *Conn. des Tems* ⊙ et ☊, ajouter respectivement ces arcs aux deux précédens, et ajouter les log. des sinus de ces sommes aux log. constans donnés. L'une des sommes est le log. de l'aberration, l'autre celui de la nutation, *en asc. dr. et en secondes de temps.*

L'aberration et la nutation de déclin. ont aussi les formes M′ sin (⊙ + θ′), N′ sin (☊ + φ′), et notre table donne aussi les constantes. Ces corrections de déclin. sont exprimées en arcs. On doit observer que quand la déclin. est australe, elle a le signe —, et que les corrections dont il s'agit ici doivent être prises avec les signes que le calcul leur attribue ; en sorte que quand ce signe est +, il faut alors retrancher la correction.

(*) Dans les Éphémérides de Berlin, d'Altona, de Londres, etc., on trouve chaque année les lieux apparens de 65 principales étoiles, calculées de 10 en 10 jours ; l'interpolation les donne ensuite pour les jours intermédiaires. On est ainsi dispensé de calculer les asc. dr. et déclin. apparentes de ces astres, c'est-à-dire d'avoir égard à la précession, l'aberration et la nutation. C'est surtout pour les circompolaires que ces tables sont utiles, parce que ces étoiles servent souvent à la détermination des latitudes des lieux, et que les corrections sont assez fortes pour ne pouvoir être négligées. Aussi, les positions apparentes de α et δ de la petite Ourse y sont-elles données pour chaque jour de l'année. Les astronomes français désirent beaucoup trouver ces tables dans la *Conn. des Tems.*

Pour montrer l'usage de ces nombres, reprenons l'ex. de Sirius le 22 mai 1828; on a (*)

$\odot = 2^s\,1°18'$, ☊ $= 6^s\,24°\,11'$.

| | *Aberration.* | | *Nutation.* | |
|---|---|---|---|---|
| Asc. dr. ... | $5^s21°21'$ ..... | 0.1501 | $6^s\ 1°51'$ ..... | 9.9658 |
| | $\odot$ = 2. 1.18 | | ☊ = 6.24.11 | |
| | sin 7.22.39 ..... | 9.9003 − | sin 0.26. 2 ..... | 9.6424 + |
| | − 1″123 ..... | 0.0504 − | + 0″406 ..... | 9.6082 + |
| Déclin. ... | 8,25.51 ..... | 1.1152 | 2.22.58 ..... | 0.9636 |
| | $\odot$ = 2. 1.18 | | ☊ = 6.24.11 | |
| | sin 10.27. 9 ..... | 9.7344 − | sin 9.17. 9 ..... | 9.9802 − |
| | − 7″073 ..... | 0.8496 − | − 8″786 ..... | 0.9438 − |

| | | |
|---|---|---|
| Ainsi | asc. dr. = $6^h37'35''00$ | Déclin. = − $16°29'11''61$ |
| | aberr. = − 1,12 | − 7,07 |
| | nutat. = + 0,41 | − 8,79 |
| | Asc. dr. app. = 6.37.34,29. | Déclin. = − 16.29.27,47. |

Cette asc. dr. est l'heure sidérale du passage de Sirius au méridien, et l'on voit que, pour trouver cette heure, il n'est pas nécessaire de calculer la déclin., en sorte que l'opération est réduite à moitié.

Nous donnerons plus tard la démonstration des formules qui servent de base aux corrections dont on vient de parler : nous traiterons aussi de la *nutation solaire*.

76. Nous terminerons en indiquant la formation de la table VIII. L'année est comptée pour 365 jours. En prenant la date du 1[er] janvier, on a 90 jours pour le premier trimestre (janv., févr., mars), 91 jours pour le second (avril, mai, juin), 92 pour le troisième (juillet, août, septembre).

(*) On fait suivre du signe — les log. des facteurs négatifs, afin de faciliter l'application de la règle algébrique des signes. Nous en ferons toujours autant par la suite, quand nous appliquerons nos formules à des exemples numériques. On ne doit pas confondre ce signe terminal du log. avec celui dont on le fait précéder. Le — devant un log. se rapporte à une division de facteur, et indique une soustraction à faire ; le — qui vient après le log. désigne un facteur négatif.

Il est donc bien aisé de trouver le rang d'un jour proposé quelconque.

Ainsi, le 14 novemb. est le 318ᵉ jour de l'année, parce que $90 + 91 + 92 + 31 + 14 = 318$. On compte les trois trimestres, plus 31 jours d'octobre, plus 14 de novembre. Ainsi le rang de ce jour, exprimé en fraction de l'année, est $\frac{318}{365} = 0,871$ ; c'est ce nombre qui, dans la 1ʳᵉ colonne de la table VIII, répond au 15 novembre.

De même, pour le 22 mai, on a $90 + 30 + 22 = 142$, $\frac{142}{365} = 0,389$; on écrit donc 0,389 près de la date du 23 mai.

En général, $\frac{1}{365} = 0,0027397$ ; c'est cette fraction qu'il faut multiplier par la date comptée depuis le 1ᵉʳ jour de l'an. On fait ce calcul, pour certains jours de l'année, de 15 en 15 jours, et l'on ajoute 0,0027 à chaque résultat, 14 fois consécutives, pour les dates intermédiaires. On compose ainsi la colonne qui fait connaître, en fraction décimale de l'année, un intervalle quelconque compté depuis le 1ᵉʳ janvier. C'est ce qui est indiqué par le titre de *fraction de l'an.*

*Positions géographiques,* p. 172.

Cette table n'a besoin d'aucune explication ; elle prend chaque année plus d'étendue et d'exactitude, à mesure que les bonnes observations se multiplient dans les diverses contrées du globe. Nous expliquerons dans la 2ᵉ partie de cet ouvrage les procédés astronomiques qui servent à trouver les longitudes et les latitudes des lieux. Quant à ce qui se rapporte à la figure de la Terre, ce sujet est trop étendu pour trouver place dans le présent article ; nous le réservons pour un chapitre séparé. (*V.* nᵒ 88.)

*Obliquité de l'écliptique*, p. 206.

77. L'obliquité varie non-seulement par l'attraction des planètes, mais aussi par la *nutation lunisolaire* (nº 315). Comme ce dernier effet est périodique, et se rétablit lorsque le Soleil et la Lune reviennent à leurs mêmes positions, par rapport à la Terre, on le calcule à part, et l'on en fait l'objet d'une correction distincte. On appelle *obliquité moyenne* celle qu'on obtient lorsqu'on n'a pas égard à la nutation, et c'est cette obliquité moyenne à laquelle on fait ensuite subir la petite correction lunisolaire. Faisons donc ici ces deux parts.

I. L'action planétaire diminue graduellement l'obliquité de l'écliptique, conformément à la règle suivante :

Obliq. le 1er janv. 1830, $\Omega = 23^\circ\ 27'\ 41'',09.$

T ans après cette date, elle devient

$$\omega = \Omega - 0'',457 . T.$$

On comprend dans T les fractions d'années, comme il a été expliqué nº 76. Cette fraction est calculée dans la table VIII (*); on prend T négatif pour les ans qui précèdent 1830.

Il y a quelque différence entre les valeurs de Ω adoptées par les divers astronomes; ils ne sont pas non plus d'accord sur la grandeur du coefficient 0'',457 : mais la discussion ne porte que sur des quantités trop petites pour que les erreurs soient notables. Nous avons adopté ici les nombres que M. Bessel a tirés d'observations solsticiales multipliées. Selon ce savant astronome, l'obliquité moyenne était $= 23^\circ\ 28'\ 17'',65$ en 1750, et diminue maintenant de 0'',457 par an. (V. *Astronom. nachri.*, nº 34,) Cette détermination s'accorde d'ailleurs avec les observations des solstices faites à Paris par MM. Arago et Mathieu (*V.* ci-après, nºs 296 et 308.)

(*) Le mouvement en 1 jour étant — 0'',00125, on peut, pour T ans et j jours, écrire ainsi la formule, dans laquelle T exprime un nombre entier,

$$\omega = \Omega - (0'',457 . T + 0'',00125\, j)$$

Par exemple, le 14 novembre 1831, le temps écoulé depuis l'*époque* est T = 1,871 ans. Voici le calcul qui donne 0",86 de diminution depuis le 1er janv. 1830 :

| | | |
|---|---|---|
| 0"457 | Ω = | 23°27'41"09 |
| 1,871 | Correction.. | — 0,86 |
| 0,457 | ω = | 23.27.40,23 |
| 366 | Obliquité moyenne le | |
| 32 | 24 novembre 1831. | |
| 4 | | |
| 0,859. | | |

II. La *nutation lunisolaire* fait varier l'obliquité de quantités qui dépendent des positions relatives du Soleil et de la Lune, et de celle du nœud ☊. La table IV fait connaître les corrections dont il s'agit. Pour les obtenir, on commence par chercher l'influence de la Lune : il faut d'abord trouver l'*argument* N, dans la table III, pour l'année et la date proposées ; ce nombre N cherché dans la table IV donne la nutation lunaire, sauf à interpoler, s'il y a lieu. Quant à la nutation solaire, la seconde partie de cette dernière table la donne à la date proposée.

Ainsi, dans l'exemple précédent, on trouve, table III, N = 573 au commencement de 1831, et N = 47 au 14 novembre. La somme est N = 620. Cherchant ce nombre dans la table IV, on trouve — 6",75 pour la nutation lunaire ; quant à la solaire, elle = — 0",14 le 14 novembre. Ainsi,

| | |
|---|---|
| Obliq. moy. le 14 novemb. 1831 = | 23°27' 40"23 |
| N = 620, nutation lunaire...... | — 6,75 |
| 14 novemb. ——— solaire...... | — 0,14 |
| Obliquité apparente... ....... ω = | 23.27.33,34. |

Prenons encore le 1er juillet 1829 :

| | Selon nous. | | Bur. des Longit. | |
|---|---|---|---|---|
| En 1830........ | 23°27'41"09, | N = 466 | 1800.... | 23°27'57"00 |
| — 0,5 ans...... | + 0,23 | 27 | 29,5 ans. | — 15,37 |
| Obliq. moy...... | 23.27.41,32 | 493 | | 23.27.41,63 |
| N = 493....... | — 9,32 | | | — 9,62 |
| 1er juill........ | — 0,51 | | | — 0,42 |
| Obliq. app: ω = | 23.27.31,49 | | | 23.27.31,59 |
| Selon M. Dezach...... | 31,99 | | Conn. des Tems.... | 32,80. |
| M. Schumacher.. | 31. 70. | | | |

Les causes de la différence que les astronomes trouvent dans leurs évaluation de l'obliquité de l'écliptique sont l'incertitude des constantes du problème, et particulièrement de la nutation ; en outre, les observations, les latitudes des lieux, les réfractions, etc., présentent des incertitudes. On comprend pourquoi l'observation des deux solstices d'une même année, faites par le même astronome, offrent 4 à 5 secondes de différence entre les valeurs qu'on en tire pour l'obliquité. On arrive donc à des nombres un peu inégaux lorsqu'on veut calculer l'obliquité apparente de l'écliptique, suivant qu'on prend pour base les constantes de tel ou tel astronome.

Quoi qu'il en soit, il importe de laisser chacun maître de préférer celle des valeurs de $\omega$ qui lui semble digne de plus de confiance; et comme la déclin. du Soleil, telle qu'on la trouve dans la *Conn. des Tems*, est altérée par un changement d'obliquité, on peut calculer d'avance l'influence de cette différence sur la déclin. solaire.

Reprenons l'équ. (3) du n° 23, et différencions-la :

$$\sin D = \sin \omega \sin l,$$

$$\cos D dD = \cos \omega \sin l . d\omega.$$

Divisant la 2ᵉ par la 1ʳᵉ,

$$\cot D . dD = \cot \omega . d\omega;$$

ainsi, en faisant $d\omega = 1''$, on a

$$dD = \cot \omega . \tan D . 1'' = 2'',315 \tan D.$$

Ainsi, 1″ de variation dans l'obliquité de l'écliptique donne 2″,315 tang D de changement dans la déclin. solaire. La *Conn. des Tems* prévoit donc le cas où un astronome voudrait adopter une autre obliquité que celle qui sert de base aux tables de Delambre. On trouve, p. 206, de 3° en 3° de déclin., le changement qu'il faudra faire subir aux déclin. consignées dans cet ouvrage, pour 1″ de variation dans l'obliquité. L'interpolation fait ensuite connaître, pour les autres déclin., la variation qu'il faut prendre pour les déclin. intermédiaires.

Cette petite correction ne peut intéresser que les calculs extrêmement précis, pour lesquels les nombres de la *Conn. des Tems* n'ont pas le degré d'approximation nécessaire ; mais la correction s'applique aux déclin. qu'on trouve par l'emploi direct des tables de Delambre ou de celles de Carlini, qui sont établies sur les mêmes constantes de départ.

Plus tard, nous enseignerons à trouver, par observation, l'obliquité de l'écliptique et la position du point vernal ♈, origine d'où sont comptées les longitudes et les asc. dr. Nous en tirerons la précession des équinoxes, la nutation lunisolaire, etc. ; enfin, nous nous occuperons des questions de théorie qui se rapportent à ce sujet, et nous éclaircirons les difficultés propres à ce genre d'opération.

## *Sur la méthode d'interpolation.*

78. Le procédé que nous avons exposé n° 41, pour obtenir le lieu de la Lune à une heure quelconque, manque de précision, parce qu'on y suppose que la marche de l'astre est uniforme. Pour tenir compte de ses inégalités, il faut avoir égard aux diff. 2es, 3es, .... ainsi qu'on va l'expliquer. La formule d'interpolation démontrée n° 907 de mon *Cours de Math. pures*, est

$$y_t = y_0 + \frac{t}{h}\Delta^1 + \frac{t(t-h)}{2h^2}\Delta^2 + \frac{t(t-h)(t-2h)}{2.3\,h^3}\Delta^3 + \text{etc.}$$

On propose une série représentée par $y_0, y_h, y_{2h}, y_{3h} \ldots$, et l'on veut y intercaler d'autres termes réglés sur la même loi de génération. On tire *les différences premières, en retranchant chaque terme de celui qui le suit, et conservant les signes;* de là on tire les *différences secondes*, puis les *différences troisièmes*, etc. ; savoir :

Diff. 1res..... $y_h - y_0 = \Delta^1 = a,\quad y_{2h} - y_h = b,\quad y_{3h} - y_{2h} = c \ldots$
Diff. 2es..... $b - a = \Delta^2 = i,\quad c - b = k,\quad d - c = l \ldots$
Diff. 3es..... $k - i = \Delta^3 = p,\quad l - k = q,$ etc.
Diff. 4es..... $q - p = \Delta^4$; et ainsi de suite.

On obtient ainsi les facteurs $\Delta^1, \Delta^2, \Delta^3, \ldots$ de notre équ. qui donne l'expression du *terme général* $y_t$ de la série proposée. Si l'on y fait $t = 0,\ h,\ 2h, \ldots$ on retrouve les termes consécutifs $y_0, y_h, y_{2h}; \ldots$ mais en outre, posant $t = 1, 2, 3, \ldots h+1, h+2, \ldots$ on obtient les $h-1$ termes intermédiaires entre $y_0$ et $y_h$, entre $y_h$ et $y_{2h} \ldots$ En général, on peut prendre pour $t$ toute valeur entière ou fractionnaire, et l'on a celle du terme de la série dont le rang est marqué par ce nombre $t$; c.-à-d. que cette série est censée résulter de la fonction $y_t$ ainsi obtenue, en attribuant à $t$ diverses valeurs $0,\ h,\ 2h, \ldots$ et qu'on a le droit de prendre pour $t$ tout autre nombre à volonté (*).

Pour appliquer cette équ. aux nombres lunaires de la *Conn.*

---

(*) Quand on veut obtenir, non pas seulement un terme $y_t$, mais $h-1$ termes équidistans entre $y_0$ et $y_h$, et qu'on suppose les différ. secondes constantes, la même théorie conduit à la règle suivante : Formez les deux nombres

$$\delta'' = \frac{\Delta^2}{h^2}, \quad \delta' = \frac{\Delta^1}{h} - \frac{h-1}{2}\,\delta'',$$

et composez la série qui a $\delta''$ pour diff. 2e constante, et $\delta'$ pour diff. 1re ; ce sera celle qu'on demande. Ainsi, pour interpoler $h-1$ termes équidistans entre M et M', dans la série M, M', M'', M''', où $\Delta^2$ est constant,

1°. On calculera les nombres $\delta''$ et $\delta'$;

2°. On formera la progression arithmétique dont $\delta'$ est le 1er terme et $\delta''$ la diff.,

Savoir, $\quad \delta',\ \delta'+\delta'',\ \delta'+2\delta'',\ \delta'+3\delta'', \ldots$

que nous représenterons par $a, b, c, d; \ldots$ 3°. on formera les nombres

$$\text{M},\ \ \text{A}=\text{M}+a,\ \ \text{B}=\text{A}+b,\ \ \text{C}=\text{B}+c,\ \ \text{D}=\text{C}+d, \ldots$$

et l'on aura la série demandée M, A, B, C.... M'.

Par ex., interpolons 5 termes entre les deux 1ers de la série

7 . 43 . 86,2 . 136,6....

Différ. 1res ..... $\Delta^1 = 36$ . 43,2 . 50,4....

Différ. 2es const. $\Delta^2 =$ 7,2 . 7,2.. .

On a ici $h-1=5$, $h=6$, d'où $\delta''=0,2$ et $\delta'=5,5$.

Ainsi, différ. 1res.... 5,5 . 5,7 . 5,9 . 6,1 . 6,3 . 6,5.....

Série demandée...... 7 . 12,5 . 18,2 . 24,1 . 30,2 . 36,5 . 43.....

*des Tems*, tels que l'asc. dr., la déclin., la latit., la longit., qui s'y trouvent de 12 en 12 heures, on doit faire $h = 12^h$, savoir,

$$(1)\ldots y_t = y_0 + \frac{t}{12^h}\Delta^1 + \frac{t(t-12^h)}{2.12^2}\Delta^2 + \frac{t(t-12^h)(t-24^h)}{2.3.12^3}\Delta^3\ldots.$$

Les $\Delta^4$ et leur coeffi. sont si petits, qu'on les néglige ordinairement, c.-à-d. qu'on suppose les diff. 3$^{es}$ constantes. On ne fait par là aucune erreur sensible; et même le plus souvent on borne la suite aux $\Delta^2$ sans nul inconvénient. Nous suivrons tour à tour ces deux suppositions.

79. I. *Les differ. 3$^{es}$ étant constantes.* On prend dans la *Conn. des Tems* quatre arcs lunaires consécutifs M, M', M'', M''', faisant en sorte que l'arc demandé soit situé entre les deux intermédiaires M', M''; on en prendra les diff. 1$^{res}$, 2$^{es}$ et 3$^{es}$, et il sera facile de voir que la correction que M' doit subir pour être propre à l'heure proposée $t$ est donnée par la formule

$$(2)\ldots \quad x = \frac{t}{12^h}\Delta^1 + \frac{t(t-12^h)}{12^2}\varphi + \frac{t(t-12^h)(t-6^h)}{2.3.12^3}\Delta^3\ldots,$$

en prenant $\Delta^1 =$ *l'intermédiaire des trois diff. premières,*

$\varphi =$ *le quart de la somme des deux diff. secondes.*

En exprimant $t$, $t-6^h$, $t-12^h$, en secondes, on prend pour les constantes les complémens arithmétiques suivans :

$$\text{c. log } 12^h = \bar{5}.3645163,$$
$$\text{c. log } 12^2 = \overline{10}.72903,$$
$$\text{c. log } 12^3 = \overline{14}.09355.$$

Voici le tableau des opérations à faire :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| *Termes.* | | | | |
| M, | *Diff.* 1$^{res}$. | | | |
| M', | $a$, | *Diff.* 2$^{es}$. | | |
| M'', | $b = \Delta^1$, | $i = b - a$, | *Diff.* 3$^{es}$. | |
| M''', | $c$, | $k = c - b$, | $\Delta^3 = k - i$, | $\varphi = \frac{1}{4}(i + k)$. |

On trouve souvent commode de donner à l'équ. (2) la forme suivante :

$$(3)\ldots \quad x = \mathrm{A}\,\frac{t}{12^h} + \mathrm{B}\left(\frac{t}{12^h}\right)^2 + \mathrm{C}\left(\frac{t}{12^h}\right)^3,$$

en faisant $\mathrm{A} = \Delta^1 - \varphi + \frac{1}{12}\Delta^3$,
$\mathrm{B} = \varphi - \frac{1}{4}\Delta^3$,
$\mathrm{C} = \frac{1}{6}\Delta^3$.

Quelle est l'asc. dr. de la Lune le 13 mai 1831, à $9^h 17' 18'' = t$, temps vrai à Paris? On tire de la *Conn. des Tems*

| | *Asc. dr.* ☾. | | *Diff.* 1res. | *Diff.* 2es. | *Diff.* 3es. |
|---|---|---|---|---|---|
| Le 12, minuit.. | 64°41′ 4″ | | | | |
| Le 13, midi.... | 72.31. 8 = M′, | | + 7°50′ 4″ | | |
| Le 13, minuit.. | 80.23.54 | Δ¹ = | + 7.52.46 | + 2′ 42″ | Δ³ = |
| Le 14, midi.... | 88.16.43 | | + 7.52.49 | + 0. 3 | − 2′39″; |

d'où $\varphi = +41'',25$, $\mathrm{A} = 7°51'51'',50$, $\mathrm{B} = +81'',0$, $\mathrm{C} = -26'',5$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Const. ...... | $\overline{5}$.3645163 | | $\overline{10}$.72903 | | $\overline{14}$.09355 |
| $t$. ........... | 4.5242403 | $t^2$.... | 9.04848 | $t^3$... | 13.57272 |
| A. .......... | 4.4519629 + | B.... | 1.90849 + | C... | 1.42325 − |
| | 4.3407195 + | | 1.68600 + | | 1.08952 − |
| | + 6° 5′ 13″89 | | + 48″,53 | | − 12″,29 |

M′ = 72.31. 8
+ 48,53
− 12,29

78.36.58,13 = Æ☾ le 13 mai 1831 à $9^h 17' 18''$ t. vr.

Cherchons la longit. et la latit. de la Lune, le 18 mai 1831, à $t = 10^h 23' 52''$ du soir, temps vrai à Paris. La *Conn. des Tems* donne

| | *Longitude* ☾. | | *Diff.* 1res. | *Diff.* 2es. | *Diff.* 3es. |
|---|---|---|---|---|---|
| Le 17, minuit. | 4ˢ17°54′ 13″ | | | | |
| Le 18, midi... | 4.24.32. 1 = M′ | | + 6°37′48″ | | |
| Le 18, minuit. | 5. 1. 3.54 | Δ¹ = | + 6,31.53 | − 5′ 55″ | Δ³ = |
| Le 19, midi... | 5. 7.30.20 | | + 6.26.26 | − 5.27 | + 28″. |

| | *Déclin.* ☾. | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Le 17, minuit. | − 0°44′40″ | | | | |
| Le 18, midi... | − 0. 9.45 = M′ | | + 34′55″ | | |
| Le 18, minuit. | + 0.24.47 | Δ¹ = | + 34.32 | − 23″ | |
| Le 19, midi... | + 0.58.31 | | + 33.44 | − 48 | Δ³ = − 25″; |

d'où, en longit. $\varphi = -170''5$, $\mathrm{A} = 6°34'45''33$, $\mathrm{B} = -2'57''5$, $\mathrm{C} = +4''67$
en latit.. $\varphi' = -17,75$, $\mathrm{A}' = +34.47,67$, $\mathrm{B}' = -11,6$, $\mathrm{C}' = -4,17$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Const. . . . | $\bar{5}$.3645163 | | $\overline{10}$.72903 | | $\overline{14}$.09355 |
| $t$. . . . . . . | 4.5732430 | $t^2$. . . | 9.14649 | $t^3$. . . | 13.71973 |
| | $\bar{1}$.9377593 | | $\bar{1}$.87552 | | $\bar{1}$.81328 |
| A. . . . . . . | 4.3744887 + | B. . . . | 2.24920 — | C. . . . | 0.66932 + |
| | 4.3122480 + | | 2.12472 — | | 0.48260 + |
| En longit. | + 5° 42′ 3″,34 | | — 2′ 13″,26 | | + 3″,04 |
| | $\bar{1}$.9377593 | | $\bar{1}$.87552 | | $\bar{1}$.81328 |
| A′. . . . . . | 3.3196619 + | B′. . . . | 1.06070 — | | 0.62014 — |
| | 3.2574212 + | | 0.93622 — | | 0.43342 — |
| En latit. . . | + 30′ 8″,93 | | — 8″,63 | | — 2″,71. |

| *En longitude.* | *En latitude.* |
|---|---|
| $M' = 4^s\ 24^\circ\ 32'\ 1''$ | $M' = -0^\circ\ 9'\ 45''$ |
| + 5.42. 3,34 | — 8,63 |
| — 2.13,26 | — 2,71 |
| + 3,04 | + 30. 8,93 |
| Longit. ☾ = 5. 0.11.54,12. | Latit. = + 0.20.12,61. |

Les latitudes et déclin. australes sont prises négatives.

80. Pour trouver le *mouvement horaire* de la Lune, il faut faire ce calcul pour les heures $t$ et $t - 1$, et prendre la différ. des résultats. Faisons cette opération sur l'équ. (3), et nous aurons l'expression générale de ce mouvement; on obtient pour *le mouvement durant l'heure vraie qui précède le temps* t,

$$m = \frac{1}{12}\left[A + B.\frac{2t - 1^h}{12^h} + C.\frac{3t(t - 1^h)}{12^2}\right]. \quad (4)$$

Différenciant, et faisant $dt = 1^h$, on trouve

$$dm = \frac{1}{72}\left[B + \frac{1}{8}C(2t - 1)\right]. \quad (5)$$

C'est ce qu'il faut ajouter à $m$ pour avoir la marche $m'$ de l'astre pendant l'heure vraie qui suit $t$, $m' = m + dm$. Il faut conserver aux lettres les signes que le calcul particulier à chaque exemple leur attribue.

Ainsi, dans l'exemple du 31 mai 1831, p. 100, on a

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | C.... | 1.42325 — | |
| Const..... | 5.36452 | | $\overline{1}0.72903$ | A = 7°51′52″50 |
| 2t — 1.... | 4.80124 | 3t... | 5.00130 | + 1.58,64 |
| B....... | 1.90849 | t — 1. | 4.47477 | — 42,50 |
| 118″,64... | 2.07425 | — 42″,50. | 1.62841 — | 7.53. 8,64 |
| | | | Douzième.... m = | 39.25,72. |

On trouve de même

$$dm = \frac{1}{72}(B - 58'',23) = \frac{1}{72} \cdot 22'',77 = 0'',316.$$

Ainsi la Lune parcourt en longit. 39′ 25″,72 dans l'heure qui précède $t$, et 39′ 26″,04 dans celle qui suit (*).

81. II. *En négligeant les différences troisièmes.* On pose $\Delta^3 = 0$ dans les équ. précédentes, et l'on trouve pour la correction que M′ doit subir,

$$x = A\,\frac{t}{12^h} + B\left(\frac{t}{12^h}\right)^2, \qquad (6)$$

en faisant B = *le quart de la somme des deux diff. secondes,*
et $A = \Delta^1 - B$.

Ainsi, on fera les calculs indiqués au tableau de la p. 99, en le bornant aux diff. secondes, *retranchant toujours chaque terme de celui qui le suit, et conservant au résultat le signe que*

(*) Il s'agit ici de la marche lunaire en 1 h. de temps vrai (ou moyen). Si on la veut pendant 1 h. de temps sid., comme cette durée est plus courte que la 1re d'à très peu près son 360e, il suffira de diminuer $m$ du $\frac{1}{360}$. Ainsi, on changera dans $m$ les ′ en ″, les ″ en ‴, et l'on prendra le sixième; on aura la quantité qu'il faut soustraire de $m$. Dans l'ex. ci-dessus, $m = 39' 25'',72$, on a $\frac{1}{6}(39'' 25''',72) = 6'' 34''',29 = 6'',57$; retranchant de $m$, il reste 39′ 19″,15 pour le mouvement en asc. dr. pendant 1 h. sid.

Si l'on exige une grande précision, on prendra la marche $s$ du Soleil en asc. dr. en 24 h., et $\mu = \frac{s}{24}$ sera le mouvement en 1 h. vraie (p. 33). Cette durée est donc égale à $1^h + \mu$ de temps sid.; donc, si en $1^h + \mu$ la marche lunaire est $m$, en 1 h. sid. elle est $= \frac{1^h . m}{1^h + \mu}$.

Dans notre exemple, $s = 3' 55'',8$, $\mu = 9'',82$, et l'on trouve

mouv. en 1 h. sid. = 39′ 19″,28.

*donne cette soustraction*. On calculera les constantes A et B, puis le nombre $x$, qui, ajouté à M′, donnera enfin la valeur cherchée $y_t$.

Quant au *mouvement horaire* m, pour l'heure qui précède $t$, il est

$$m = \frac{1}{12}\left(A + B\,\frac{2t - 1^h}{12^h}\right), \qquad (7)$$

et l'on a

$$dm = \frac{1}{72}B,$$

pour la variation de $m$, dans l'heure qui suit $t$; $m' = m + dm$.

Quelle est la longit. lunaire le 2 sept. 1830, à $t = 10^h\,46'\,53''$ t. vr. à Paris. On tire de la *Conn. des Tems* :

| | *Longit.* ☾. | *Diff.* 1res. | *Diff.* 2es. | Quart. |
|---|---|---|---|---|
| Le 1, minuit... | 10s 26° 16′ 30″ | | | |
| Le 2, midi..... | 11. 3.24.49 = M′ | + 7° 8′ 19″ | | |
| Le 2, minuit... | 11.10.37.29 | Δ′ = + 7.12.40 | + 4′ 21″ | |
| Le 3, midi..... | 11.17.53.48 | + 7.16.19 | + 3.39 | B = 2′ 0″; |

d'où B = 120″, A = 7° 10′ 40″.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Const. ...... | $\bar{5}$.3645163 | | $\overline{10}$.72903 |
| $t$............ | 4,5889772 | $t^2$...... | 9.17795 |
| A. ........ | 4.4122925 | B. ..... | 2.07918 |
| | 4.3657860 | | 1.98616.... + 96″,86. |

Correction... 6° 26′ 55″92, 1er terme.
1.36,86, 2e.

M′ = 11s 3.24.49

11.9.53.21,78 = longit. demandée.

Pour le mouvement horaire, on a

| | |
|---|---|
| const. .............. | $\bar{5}$.36452 |
| $2t - 1 = 20^h\,33'\,46''$... | 4.86938 |
| B.......... | 2.07918 + |
| + 205″,63.... | 2.31308 + |

$m = \frac{1}{12}(A + 3'\,25'',63)$
$= \frac{1}{12}(7°\,14'\,5'',63) = 36'\,10'',47$.

Enfin $dm = +1'',67$, en sorte que le mouvement dans l'heure qui suit $t$ est $m' = 36'\,12'',14$.

Si les différ. secondes de la série sont constantes, on a encore les équ. (6) et (7), mais alors on n'emploie que trois termes de la série M′M″M‴, et B est la moitié de la diff. seconde.

Quoiqu'on ait employé partout les log., on peut se passer de

ce secours; mais les opérations sont plus longues. Ainsi, dans le dernier ex., on trouve que $t = 10^h,7814$, $\frac{1}{12}t = 0^h,8984$, $(\frac{1}{12}t)^2 = 0,807$; d'où l'on tire, comme ci-dessus,

$$0,8984\ A = 6°\,26'\,56'', \quad 0,807\ B = 1'\,36'',86.$$

On fera bien de lire la méthode d'interpolation de M. Bessel, dans l'*Astr. nachr.* de M. Schumacher, t. VII, page 1; dans les Éphém. de Berlin, 1831, et dans le *Philos. Magaz.*, nov. 1829.

82. Notre théorie s'applique à toutes les interpolations lorsque les données procèdent à $12^h$ d'intervalle. En y changeant $12^h$ en $3^h$, on s'en servirait pour les distances lunaires, qui sont de $3^h$ en $3^h$ dans la *Conn. des Tems* (n° 58). Enfin, quand l'intervalle est de $24^h$, on remplace dans nos équ. $12^h$ par $24^h$. On voit donc que ces formules peuvent s'appliquer aux lieux du Soleil, lorsqu'on exige plus de précision qu'on n'en obtient par le procédé du n° 16, qui suppose que les diff. 1<sup>res</sup> sont constantes; mais il faut alors que les lieux donnés soient approchés aux 10<sup>es</sup> de seconde. Au reste, la marche du Soleil n'est pas assez inégale pour que cette précision puisse présenter un grand intérêt, et l'on s'en tient le plus souvent à ce qu'on a dit n° 16.

83. Observez que l'équ. (2) revient à la suivante,

$$y_t = M' + \Delta^1 \frac{t}{12^h} + \frac{\Delta^2}{2} \cdot \frac{t}{12^h} \cdot \frac{t - 12^h}{12^h}, \qquad (8)$$

en prenant pour $\Delta^2$ la demi-somme des différ. secondes, ou ce que nous avons désigné par 2B. Or, $\Delta^1 . \frac{t}{12}$ serait la correction de M', si l'on négligeait les diff. 2<sup>es</sup>; le dernier terme est donc la partie de cette correction qui est due à ces diff. M. Mathieu a construit une table des valeurs de ce dernier terme. Ainsi, on suppose la marche lunaire uniforme pendant $12^h$, et l'on corrige le résultat ainsi obtenu, en prenant à vue la petite quantité qui est donnée dans cette table; on la trouve à la p. 164 de la *Conn. des Tems*. En voici l'usage:

La 1<sup>re</sup> colonne contient les temps écoulés $t$ de 10' en 10'; les

unités de minutes des différ. 2$^{es}$, et les secondes, de 10 en 10, sont indiquées en tête des autres colonnes, sur la 1$^{re}$ ligne horizontale. On prend, dans l'intérieur du tableau, les nombres correspondans à la ligne et à la colonne qui désignent l'heure proposée et la diff. 2$^e$ trouvée. La table est *à double entrée*, et l'on opère comme p. 63. On y lit, par ex. :

| $t$ | 1′ | 2′ | 3′ | etc. | 50″ |
|---|---|---|---|---|---|
| .... | .... | .... | .... | .... | .... |
| 6h 10′ | 7″5 | 15″0 | 22″5 | etc.. | 6″2 |
| 6. 0 | 7,5 | 15,0 | 22,5 | etc.. | 6,3 |
| .... | .... | .... | .... | .... | .... |

Ainsi, quand la moyenne entre les deux différ. 2$^{es}$ est — 2′ 50″, et que l'heure proposée est $6^h$ 10′, on trouve dans la table, d'une part, 15″,0, qui répond à 2′; d'autre part, 6″,2, qui provient de 50″ : en tout + 21″,2. C'est la correction qu'il faut faire au nombre obtenu, lorsqu'on a supposé la marche lunaire uniforme, et qu'on a réparti la différ. 1$^{re}$ proportionnellement au temps écoulé $6^h$ 10′ $= t$. Cette correction se prend d'ailleurs en signe contraire à la diff. 2$^e$.

Quand l'heure proposée tombe entre les nombres de la 1$^{re}$ colonne, on interpole à la manière propre aux tables à double entrée. (*V.* p. 63.)

Ainsi, dans l'ex. du 13 mai 1831, p. 100, on a

$$t = 9^h\,17'\,18'',\quad \Delta^1 = 7^\circ\,52'\,46'',\quad Æ = 72^\circ\,31'\,8''$$

La marche uniforme donne. ........................ + 6. 5.56,2
Les diff. 2$^{es}$ ont + 1′ 23″ pour moy. La corr. est pour 1′. — 5,2
pour 23″. — 2,0
Asc. dr. demandée..... = 78.36.57,0.

84. Lorsqu'on demandera les lieux lunaires à une heure vraie évaluée sous un autre méridien, que celui de Paris, on cherchera d'abord l'heure contemporaine de cette ville, d'après la différ. des longitudes des lieux, puis on fera le calcul pour

cette dernière heure. Ainsi, pour avoir le lieu de la Lune à $7^h\,43'$ de temps vrai à Berlin, comme cette ville est à $44'\,8''$ à l'orient de Paris, il est $6^h\,58'\,52''$ à Paris, et c'est l'heure pour laquelle il faut faire l'opération.

Et si l'heure proposée était en temps moyen ou sidéral, il faudrait d'abord chercher l'heure vraie correspondante. (*V.* n° 111.)

85. Il arrive quelquefois qu'on connaît $y_t$ et M', ainsi que les diff. $\Delta'$, $\Delta''$,... et qu'on demande $t$. Par ex., on cherche à quelle heure $t$ la Lune avait une asc. dr. donnée. Tout est alors connu dans les équ. (3, 6), excepté le temps $t$, et il faut tirer la valeur de cette heure. On doit donc résoudre une équ. de degré supérieur. Appliquons ceci au cas où les diff. 2<sup>es</sup> sont regardées comme constantes, et où l'on a l'équ. (6), qui est du 2<sup>e</sup> degré en $t$. Comme B est fort petit, on en tire

$$\frac{t}{12^h} = \frac{x}{A + B\left(\frac{1}{12}t\right)}. \qquad (9)$$

Négligeant d'abord le petit terme $B\left(\frac{1}{12}t\right)$, on a cette 1<sup>re</sup> approximation, $\frac{t}{12^h} = \frac{x}{A}$, qui revient à supposer la marche uniforme pendant $12^h$; mais on corrige ce résultat, en reprenant l'équ., et substituant cette valeur pour $\frac{1}{12}t$ dans le dénominateur, ce qui conduit à un nombre plus approché, lequel suffit le plus souvent. D'ailleurs, on peut approcher davantage, en recommençant le calcul avec cette nouvelle valeur de $\frac{1}{12}t$.

A quelle heure vraie de Paris, le 2 sept. 1830, la longit. lunaire est-elle $11^s\,9^\circ\,53'\,21'',78$? Ce problème, inverse de celui de la p. 103, donne lieu à un calcul qui commence de même, et l'on a

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | Longit. ☾ = | 11ˢ9°53′21″78 |
| $A = 7°10'40''$, | $B = +120''$. | | M′ = | 11.3.24.49 |
| $x$...... | 4.36759 | | $x$ = | 6.28.32,78 |
| A.....— | 4.41229 | | | |
| $\frac{1}{12}t$..., | $\bar{1}$.95530 | | | |
| B. .... | 2.07918 | $A = 7°10'40$ | 12 h.... | 4.6354837 |
| 108″,27. | 2.03448......... | + 1.48,27 | $x$. ..... | 4.3675951 |
| | Dénom.. | 7.12.28,27.......... | — | 4.4141084 |
| | | $t = 10^h 46' 52'',4$. ............ | | 4.5889704. |

On retrouve à fort peu près le nombre $t$ de la page 103; et on l'aurait exactement, en recommençant le calcul avec la valeur trouvée.

86. Nous pouvons maintenant calculer les instans des phases lunaires, qu'on trouve indiquées au bas des pages de chaque mois. La néoménie, le premier quartier, la pleine Lune et le dernier quartier arrivent lorsque la longit. de la Lune, moins celle du Soleil, est 0°, 90°, 180° ou 270°. Désignons par $i$ celui de ces quatre nombres qui se rapporte à la phase qu'on veut annoncer; par ☾ et $\odot$ les longit. des deux astres au midi ou minuit qui précède, instant où la diff. des longit. est un peu moindre que $i$; enfin, par $m$ et $m'$ les mouvemens horaires en longitude, donnés par la *Conn. des Tems.*

Dans le temps $x$, les accroissemens de longit. des deux astres sont $mx$ et $m'x$; en sorte que ces longit. sont devenues ☾ $+ mx$, $\odot + m'x$. Pour la phase cherchée, la différ. de ces quantités doit égaler $i$, savoir,

$$\text{☾} - \odot + x(m - m') = i;$$

d'où
$$x = \frac{i + \odot - \text{☾}}{m - m'}. \qquad (10)$$

En faisant $i = 0$, $x$ est l'heure de la néoménie; $i = 180°$ donne celle de la pleine Lune; $i = 90°$, celle du 1er quartier; enfin, $i = 270°$, celle du dernier quartier. Cette heure $x$

est comptée à partir du midi ou du minuit immédiatement antérieur, pour lequel les longit. sont ☾ et ⊙.

Par ex., le 21 mai 1830, on trouve qu'à minuit,

| | | | |
|---|---|---|---|
| ⊙ = 2ˢ 0°20′29″ | ⊙ en 24 h.... 57′40″ | ☾ en 12 h.... | 7°30′35″ |
| ☾ = 1.26. 2.46 | 57.40 | 5 fois...... | 37.32.55 |
| | 28.50 | $m$ = | 37′32″92 |
| Mouvement du ⊙ en 1 heure...= | 144″10‴ .......... | $m'$ = | 2.24,17 |
| Pour la néoménie, $i = 0$. | | Dénom.... = | 35. 8,75. |

| 1ᵉʳ *Procédé.* | | 2ᵉ *Procédé.* | |
|---|---|---|---|
| Numér...... | 257′7 | Numér...... | 4.18929 |
| Dénom. .... | 35,1 | Dénom...... — | 3.32402 |
| Quotient.... | $7^h 20'$. | $7^h$333...... | 0.86527. |

Ainsi, le 22 mai, la néoménie arrive à $7^h 20'$ du matin.

87. Ce calcul suffit pour les éphémérides, parce que l'heure n'a pas besoin d'être fort précise, attendu qu'elle ne sert qu'à la détermination des marées; mais comme on y suppose que la marche des deux astres est uniforme, on ne peut considérer le résultat que comme approché, surtout lorsqu'on a pour objet de prédire les éclipses. Voici comment on s'y prend pour corriger ce résultat, qui est pris pour une première approximation.

On calcule, pour le moment trouvé, les longit. de la Lune et du Soleil; on a égard, pour le premier de ces astres, aux différ. 2ᵉˢ. Si la différ. de ces longit. était exactement $= i$, ce moment serait juste celui de la phase; mais comme il n'en est pas ainsi, en comparant cette différ. à $i$, on voit de combien il s'en faut que la phase n'ait lieu, ou l'erreur $\epsilon$. Or, on connaît les mouvemens horaires $m$ et $m'$ de la Lune et du Soleil, et le mouvement relatif $m - m'$ en $1^h$. On pose cette proportion : si $m - m'$ est le mouvement en $1^h$, quel temps serait nécessaire pour donner $\epsilon$? Après quoi on corrige la 1ʳᵉ approximation de la valeur trouvée, et l'on vérifie ce résultat en recommençant tout le calcul. Il faut que $i$ soit exactement la diff. des longit. vraies.

Par exemple, le 2 septembre 1830, il y a éclipse de Lune;

il s'agit d'assigner l'heure précise de l'opposition, et les longit. du Soleil et de la Lune à cet instant. On trouve

| | |
|---|---|
| $m = 36' \; 3''33$ | $i + \odot = 11^s 9^\circ 27' 15''$ |
| $m' = \; 2.25,33$ | ☾ $= 11.3.24.49$ |
| $m - m' = 33.38,00$; | Numér. $= \; 6. \; 2.26$; |

d'où $x = 10^h 46' 34''$, 1re approximation.

Calculons les longit. de la Lune et son mouvement horaire à cet instant (p. 102), puis la longit. du Soleil, savoir :

| | |
|---|---|
| $6^\circ 28' 21'' 32$ | $26' \; 6'' 09$ |
| $11.3.24.49,00$ | $5.9.27.15$ |
| ☾ $= 11.9.53.10,32.$ | $\odot = 5.9.53.21,09.$ |

La différ., comparée à $i$, donne l'erreur $\epsilon = 10'',77$; on a $m = 36' \, 20'',46$ et $m - m' = 33' \, 55'',13$ : on pose

$$m - m' : 1^h :: 10'',77 : z = 19'',0.$$

Ainsi, on trouve que l'opposition arrive à fort peu près à $10^h 46' 53''$ t. vr. de Paris; et en effet, en calculant les longit. à cet instant, on obtient, comme il est indiqué à la p. 7 de la *Conn. des Tems* de 1830,

long. ☾ $= 11^s 9^\circ 53' 21'' 5$,
long. $\odot = \; 5.9.53.21,5.$ Diff., $6^t$.

*Sur la figure du globe terrestre.*

88. Tout s'accorde pour faire regarder la Terre comme un sphéroïde aplati sous les pôles. Les causes physiques de cette forme font reconnaître, et les opérations géodésiques les plus précises le confirment, qu'*on peut considérer le globe terrestre comme engendré par la révolution d'une ellipse autour de son petit axe, qui est celui des pôles.*

En effet, si, comme tout porte à le croire, les planètes ont été originairement des masses fluides, liées par la pesanteur, et soumises à la force centrifuge due à leur rotation autour de l'axe des pôles, on démontre que cette figure ellipsoïdale est le ré-



sultat nécessaire des forces qui agissent sur leur matière. Les travaux d'Huyghens, Newton, Clairaut, Laplace, etc., ont prouvé que les substances devaient être disposées dans l'intérieur de ces masses par couches concentriques d'égales densités, qui vont en croissant de la surface au centre.

D'un autre côté, les triangulations faites en diverses contrées du globe avec un soin extrême, aussi bien que les expériences du pendule, s'accordent avec cette forme ellipsoïdale. Il est vrai que ces mesures ne s'accordent pas entre elles sur le rapport des deux axes de l'ellipse génératrice, et qu'il y a même quelque indécision sur cette figure. Mais on est du moins assuré que l'ellipsoïde approche beaucoup de la forme du globe terrestre, et que l'aplatissement diffère peu de $\frac{1}{300}$.

Qu'on imagine la Terre coupée par un plan passant par l'axe des pôles et par un point quelconque de la surface, la section sera une ellipse PMAA' (fig. 38), dont le demi grand axe $CA = a$ sera le rayon de l'équateur, et le demi petit axe $CP = b$ sera le demi-diamètre des pôles. Le centre C du globe est à l'intersection de ces deux axes. $PMA = Q$ est le quart du méridien. F étant le *foyer* de l'ellipse, CF l'excentricité, nous ferons $e = \frac{CF}{CA} =$ le rapport de l'excentricité au demi grand axe, $\mu =$ l'*aplatissement*, ou le rapport de la différence des axes au grand axe, savoir :

$$e^2 = \frac{a^2 - b^2}{a^2} = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 2\mu - \mu^2,$$

$$\mu = \frac{a - b}{a} = 1 - \frac{b}{a} = \textit{aplatissement}$$

à très peu près, on a $\quad e^2 = 2\mu, \quad \mu = \frac{1}{2}e^2.$

Soit M un point dont la latitude est $l$; la tangente MT en ce lieu y représente l'horizontale; la normale MN est la verticale, direction du fil-à-plomb, qui se prolonge au zénith Z; la hauteur du pôle céleste est l'angle $K = OMN = MNB$; c'est la latitude $l$ du lieu, telle que la donnent les observations astronomiques; OM et NB sont des perpendiculaires au petit axe

PN; $OM = x$ est le rayon du *parallèle* à cette latitude $l$. Si la Terre était sphérique, le rayon $CM = R$ serait la verticale en M, et l'angle MCA serait la latitude $l'$ de ce point M ; mais il n'en est pas ainsi.

Faisons l'arc $AM = S$, compté depuis l'équateur jusqu'à M.

Lorsqu'on exprime algébriquement, en fonction de la latitude $l$, tous les élémens de la figure elliptique, on trouve les relations suivantes (*v.* la *Géodésie* de M. Puissant) :

$$x = \frac{a \cos l}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 l)}} = N \cos l = \textit{rayon } ON \textit{ de parallèle},$$

$$N = \frac{a}{\sqrt{(1 - e^2 \sin^2 l)}} = \textit{normale } MN = a(1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 l + \tfrac{3}{8} e^4 \sin^4 l),$$

$$R = a \sqrt{\left[1 - \frac{e^2(1 - e^2)\sin^2 l}{1 - e^2 \sin^2 l}\right]} = \textit{rayon terrestre } CM$$

$$= a(1 - \mu \sin^2 l + \tfrac{5}{8} \mu^2 \sin^2 2l \ldots),$$

$$S = \frac{2Q}{\pi}\left[l - \tfrac{3}{8} e^2 (1 + \tfrac{1}{2} e^2) \sin 2l + \tfrac{15}{256} e^4 \sin 4l \ldots\right].$$

Désignons par A la longueur de l'arc d'un degré de l'équateur ; on a pour celle du degré de méridien et de longitude à la latitude $l$

*Degré de méridien* $d = A \times (1 + \tfrac{3}{2} e^2 \sin^2 l + \tfrac{15}{4} e^4 \sin^4 l \ldots.)$,

*Degré de longitude* $= A \cos l (1 + \tfrac{1}{2} e^2 \sin^2 l + \tfrac{3}{8} e^4 \sin^4 l \ldots.)$,

*Aplatissement* $\mu = (\sqrt[3]{d^2} - \sqrt[3]{d'^2}) : 2(\sqrt[3]{d^2}.\sin^2 l - \sqrt[3]{d'^2}.\sin^2 l')$.

$d$ et $d'$ sont ici les longueurs de deux arcs d'un degré du méridien, pris aux latitudes $l$ et $l'$.

Nous adopterons $\frac{1}{305}$ pour valeur de l'aplatissement $\mu$ ; les observations astronomiques et les mesures géodésiques s'accordent à très peu près à cet égard : nous introduirons donc cette quantité dans nos équations. Nous trouverons *en mètres* les expressions suivantes :

$a = 6\,377\,109$ mètres. $\log a = 6.8046238$
$b = 6\,356\,199$ $\log b = 6.8031975$
$\log \mu = \bar{3}.51570016$ $\log e^2 = \bar{3}.8160176$ $\log(1-e^2) = \bar{1}.9971475$
$N = a + \alpha \sin^2 l + \beta \sin^4 l \ldots$ $\log \alpha = 4.3196114$, $\log \beta = 2.0106903$
$R = a - \alpha' \sin^2 l + \beta' \sin^2 2l \ldots$ $\log \alpha' = 4.3203240$
$S = Al - B \sin 2l + C \sin 4l.$ $\log \beta' = 1.6319041$
$A = 111\,119{,}1$ mèt. $\log A = 5.0457890$
$\log B = 4.1953798$ $\log C = 1.2037981.$

$l$ est exprimé, dans le 1$^{er}$ terme de S, en degrés et fractions décimales.

La longueur d'un arc d'un degré de méridien, depuis la latitude $l$, jusqu'à la latitude $l+1$, est

$$\sigma = A - D \cos(2l + 1) + E \cos 2(2l + 1),$$
$$\log D = 2.7382446, \qquad \log E = 0.0455061,$$
$$\text{degré de parallèle à la latitude } l, \quad s = \frac{\pi N}{180^\circ} \cos l.$$

L'angle CMN $= i$ que fait la verticale ZN avec le rayon CM, est

$$i = q \sin 2l - \tfrac{1}{2} q^2 \sin 4l \ldots;$$

en faisant
$$q = \frac{2\mu - \mu^2}{2 - 2\mu + \mu^2}.$$

Si l'on exprime le petit arc $i$ en secondes, pour l'aplatissement $\frac{1}{305}$, on trouve

$$\log q = 2.83012529, \quad \log \tfrac{1}{2} q^2 = 0.043995.$$

Les géomètres ont construit une table où l'on trouve à vue la valeur de $i$ qui répond à toute la latitude $l$ donnée. Nous indiquerons plus tard l'usage de cet angle $i$, qui est la différ. entre la *latitude apparente* $l$, et la *latitude géocentrique* $l'$, savoir, $l = l' + i$.

On peut encore trouver $l'$ par la formule

$$\text{tang } l' = (1 - e^2) \text{ tang } l = \frac{b^2}{a^2} \text{ tang } l = (1 - \mu)^2 \text{ tang } l,$$

pour l'aplatissement $\mu = \frac{1}{305}$, on trouve

$$\log(1-\mu)^2 = \log(1-e^2) = \log\frac{b^2}{a^2} = \bar{1}.9971475.$$

Sous la latitude de Paris, ces formules donnent

$N = 6\,388\,972$ mètres....... $\log N = 6.8054310$

$R = 6\,365\,300$ .............. $\log R = 6.8038189$

$\sigma = 111\,200$ .............. $S = 5\,411\,217$

$i = 11'46'',4$, $l = 48°\,50'\,14''$, $l' = 48°\,38'\,27'',6$.

89. Lorsqu'on veut lever géométriquement le plan d'une vaste contrée, on imagine que tous les points élevés sont joints par des lignes droites. Ces lignes projetées sur le sol, ou plutôt sur la surface de l'ellipsoïde formé par le prolongement du niveau des mers, c'est-à-dire sur la surface du sphéroïde terrestre, dégagée de ses inégalités, couvrent le pays d'un réseau de triangles. Chaque angle de ces triangles est connu par les observations actuelles et le calcul des projections : on mesure une *base* avec le plus grand soin; et cette base, réduite, par le calcul, au niveau des mers, est le côté de l'un de nos triangles : on peut donc en conclure les longueurs des deux autres côtés. Ceux-ci servent à leur tour d'élémens pour trouver les côtés des triangles voisins; et ainsi de proche en proche. Tout est donc connu dans le réseau géodésique. On mesure ensuite astronomiquement la longitude et la latitude de l'un des sommets, et l'on en déduit, par le calcul, celles des autres stations. Comme cette dernière partie de l'opération est astronomique, elle se rattache aux sujets que nous embrassons dans cet ouvrage; nous en allons indiquer les principes.

Soit P le pôle de la Terre (fig. 39) supposée sphérique, C son centre, MM' un arc tracé à sa surface suivant une direction quelconque, mais joignant deux stations M et M' peu distantes; CM = N est le rayon de cet arc; ce rayon est connu (on le prend = la normale au point M). La longueur $y = MM'$ de cet arc est donnée. En désignant par $\varphi$ l'arc décrit, avec le rayon un, dans

l'angle MCM' et de son sommet C, on a la proportion

$$1 : \varphi :: CM \quad \text{ou} \quad N : MM' = y = N\varphi.$$

On a mesuré l'angle $M'MO = \alpha$, azimuth de MM' compté à partir du sud O, vers l'est ou vers l'ouest : PMO, PM'O' sont les méridiens des stations M et M', et l'angle P est la différence de leurs longitudes. Dans le triangle sphérique *mpm'* semblable à PMM', qui serait tracé sur la sphère concentrique de rayon un, on connaît l'homologue de PM, $pm = 90^\circ$ — la latitude *l*, celui de M'M, $mm' = \varphi$, et l'angle $M = 180^\circ - \alpha$; il s'agit de trouver l'homologue à PM', $pm' = 90^\circ$ — la latitude *l'* de la station M', l'angle $P = p$ différence des longitudes, et enfin, l'angle PM'M, supplément de l'azimuth, $MM'O = \alpha'$. Comme l'arc *mm'* est très petit, $\varphi$, P et $l - l' = d$ sont de petits arcs.

Dans ce triangle sphérique, on a (équ. 32, page 4)

$$\sin P : \sin \varphi :: \sin M : \cos l' :: \sin M' : \cos l;$$

on remplace les sinus de P et de $\varphi$ par les arcs, et à cause de $y = N\varphi$, il vient

$$P = \frac{y \sin M}{N \cos l'}, \quad \sin M' = \frac{\sin M \cos l}{\cos l'}.$$

Dans la 1[re] de ces équ., P désigne la longueur de l'arc, décrit du rayon un, qui mesure l'angle MPM'; si l'on veut que P exprime le nombre de secondes de cet arc, il faut mettre P sin 1" au lieu de P. (*V.* page 3.) On a donc pour *la différence* P *des longitudes*, en secondes d'arc, et pour *l'azimuth* $MM'O' = \alpha$ du côté MM', vu de M',

$$P = \frac{y \sin \alpha}{N \cos l . \sin 1''} \quad (1), \qquad \sin \alpha' = \frac{\sin \alpha \cos l}{\cos l'} \quad (2).$$

Mais ces équ. supposent que la latitude *l'* de la station M' est connue. Pour la trouver, formons dans notre triangle sphérique *mpm'* l'équ. (4, page 33)

$$\cos pm' = \cos pm \cos mm' + \sin pm \sin mm' \cos M,$$

$$\text{ou} \quad \sin l' = \sin l \cos \varphi + \cos l \sin \varphi \cos M.$$

or, $\cos M = -\cos \alpha$, $\cos \phi = 1 - \frac{1}{2}\phi^2$, au 3ᵉ ordre près ;
ainsi,

$$\sin l' = \sin l - \tfrac{1}{2}\phi^2 \sin l - \cos l . \phi \cos \alpha ;$$

donc $\sin l - \sin l' = \phi . \cos l \cos \alpha + \frac{1}{2}\phi^2 \sin l$.

Or, d'après l'équ. (9), page 2,

$$\sin l - \sin l' = 2 \sin \tfrac{1}{2}(l - l') \cos \tfrac{1}{2}(l + l')$$
$$= (l - l') \cos (l - \tfrac{1}{2} d) = d(\cos l \cos \tfrac{1}{2} d + \sin l \sin \tfrac{1}{2} d),$$

à cause de $l - l' = d$, qui est un très petit arc. Ce dernier membre développé, au 3ᵉ ordre près, revient à $d \cos l + \frac{1}{2}d^2 \sin l$. En substituant cette valeur pour le premier membre de notre équ., et la divisant par $\cos l$, il vient

$$d = \phi \cos \alpha + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} l (\phi^2 - d^2).$$

Pour une première approximation, on néglige d'abord le dernier terme, et l'on a $d = \phi \cos \alpha$; et substituant ensuite pour $d$ cette valeur dans notre second membre, on trouve

$$d = \phi \cos \alpha + \tfrac{1}{2} \operatorname{tang} l \, \phi^2 \sin^2 \alpha.$$

Le petit arc $d$ est ici exprimé par sa longueur, le rayon étant 1 ; pour qu'il le soit en secondes (page 3), il faut remplacer $d$ par $d \sin 1'' = (l - l') \sin 1''$.

Donc on a, à cause de $y = N\phi$,

$$l' = l - \frac{y \cos \alpha}{N \sin 1''} - \frac{y^2 \operatorname{tang} l \sin^2 \alpha}{2N^2 \sin 1''}. \qquad (3)$$

Lorsqu'on exprime $y$ et N en mètres, on trouve pour $l = 45°$,

$$\text{compl. log} (N \sin 1'') = \bar{2}.5105108.$$

On peut, le plus souvent, prendre cette valeur comme si elle était constante, et négliger le dernier terme qui est en $y^2$; mais lorsqu'on exige une grande précision, il faut déterminer la longueur de la normale N pour la latitude donnée $l$ (p. 112) : les deux derniers termes de cette équ. représentent des secondes d'arcs.

8..

Des équations (1, 2 et 3), la dernière fait connaître la latitude de la station M'; les deux autres donnent sa longitude P et l'azimuth $\alpha'$ du côté $MM' = y$.

*Des parallaxes.*

90. Deux observateurs, situés en des lieux différens à la surface du globe, ne voient pas l'un et l'autre le Soleil, ni la Lune, ni les planètes répondre au même point du ciel, parce que les rayons visuels menés à l'astre font entre eux un angle nommé *parallaxe*, et que, prolongés jusqu'à la voûte céleste, ils y marquent des points différens. Comme les tables astronomiques sont destinées à servir à toute la Terre, on y suppose que l'observateur est placé au centre du globe; c'est de ce point qu'il est censé voir tous les astres, et en évaluer les longitudes, latitudes, asc. dr., déclin., telles qu'on les a indiquées dans la *Conn. des Tems.* D'où l'on conclut qu'il faut faire subir à ces arcs des corrections, pour les faire servir à chaque station et leur donner la valeur qui leur convient en ce lieu : c'est ce sujet que nous allons traiter.

L' (fig. 14) est un astre vu du point O, selon la droite OL', et l'observateur le rapporte au point du ciel où cette droite va percer cette sphère. S'il était placé au centre C, il verrait l'astre suivant CL'. Ces deux droites font entre elles l'angle L', qui est la parallaxe. En effet, comme la voûte céleste est à une distance infinie de nous, la longueur CL' est censée nulle, par rapport à cette distance, et le sommet L' coïncide avec C quand on compare CL' au rayon de la sphère étoilée. L'angle L', ou son opposé au sommet, est mesuré par l'arc céleste intercepté entre le prolongement des côtés, arc qui est précisément le déplacement qu'éprouve l'astre quand on le voit de O et de C. Ainsi, *la parallaxe d'un astre est l'angle L', sous lequel de cet astre on voit le rayon terrestre* CO *mené à l'observateur* O.

La parallaxe d'un astre change avec sa distance à la Terre; car plus L' s'éloigne, et plus l'angle L' diminue. *Les étoiles n'ont aucune parallaxe,* parce qu'elles sont situées à l'infini,

c'est-à-dire sur la sphère céleste même. Au contraire, comme la Lune est l'astre le plus rapproché de nous, sa parallaxe est plus grande que celles du Soleil et des planètes, et comme elle atteint jusqu'à 1°, on ne peut négliger d'avoir égard à un effet aussi considérable.

Toutes les fois qu'on tire de la *Conn. des Tems* une asc. dr., une déclin., une longitude, ou une latitude, pour la faire entrer dans des calculs, l'observateur est censé placé au centre C du globe; et comme les observations sont faites d'un point O de la surface, il faut, avant tout, corriger les arcs mesurés, afin de les réduire à ce qu'ils seraient si l'observateur était transporté au centre C, avec son horizon et son méridien, parallèlement. Alors on peut combiner les résultats avec les données de la *Conn. des Tems,* selon les règles prescrites par les formules qui sont propres au problème qu'on veut résoudre.

L'astre L′ vu du centre C, et vu du lieu O, est rapporté au zénith $z$; sous les angles $L'Cz = Z$, $L'Oz = Z'$; ce dernier arc $Z'$ est la *distance zénithale apparente;* l'autre Z est la distance zénithale vraie, ou corrigée de la *parallaxe de hauteur,* qui est l'angle $L' = p$. Il est évident, par la fig. 14, que le plan du triangle CL′O passe par CO et par le zénith $z$ du lieu O; il est donc vertical. Ainsi *la parallaxe s'exerce entièrement dans le sens vertical, et diminue la hauteur de l'astre;* c'est-à-dire que pour réduire une hauteur observée de O, à ce qu'elle serait vue du centre C, il faut y ajouter la parallaxe $p$ de hauteur, ou bien, il faut la retrancher de la distance zénithale apparente $Z'$, pour avoir celle Z vue du centre C.

D'après ce qu'on a dit de la réfraction (n° 66), il est clair que cet effet s'exerce toujours en sens inverse de la parallaxe; ainsi, *il faut ajouter réfraction — parallaxe à la distance zénithale observée*, ou retrancher cette différence de la hauteur apparente, pour avoir celle qu'on mesurerait si l'on pouvait l'observer du centre C, et qu'il n'existât pas d'atmosphère.

En général, la parallaxe s'exerce verticalement, et nous fait juger le Soleil, la Lune et les planètes plus bas qu'ils ne sont vus du spectateur situé au centre, et transporté avec son hori-

zon parallèlement. Ce déplacement change les asc. dr., déclin., longitudes et latitudes vraies des astres, et nous rechercherons les variations qui en résultent; mais il ne change ni leur azimuth ni les passages au méridien, puisqu'il laisse l'astre dans le plan vertical où il se trouve.

91. Dans le triangle L'OC, où l'angle $L' = p =$ parallaxe de hauteur, $OC = R =$ rayon terrestre, et $L'C = \Delta =$ distance de L' au centre C, on a la proportion (équ. 27, p. 3),

$$\sin p : \sin(180^\circ - Z') :: R : \Delta,$$

d'où
$$\Delta \sin p = R \sin Z'. \qquad (1)$$

On voit d'abord que $p$ devient insensible quand $\Delta$ est très grand par rapport à R, c'est-à-dire lorsque l'astre est fort loin de nous; et voilà pourquoi les étoiles n'ont pas de parallaxe. En outre, quand la distance zénithale Z' décroît depuis o jusqu'à 90°, la parallaxe $p$ de hauteur diminue, jusqu'à devenir nulle quand l'astre est au zénith. S'il est à l'horizon, la parallaxe est au contraire la plus grande possible pour une distance constante $\Delta$ de l'astre. On donne le nom de *parallaxe horizontale* à l'angle L (fig. 14) sous lequel un spectateur voit le rayon OC, lorsqu'il est placé dans l'astre situé à l'horizon de O. Cette valeur *maximum* étant désignée par H, on a

$$\Delta \sin H = R,$$

et éliminant $\Delta$, on trouve

$$\sin p = \sin H \sin Z'. \qquad (2)$$

Comme les arcs $p$ et H sont en général très petits, on les substitue à leur sinus, savoir :

$$p = H \sin Z'. \qquad (3)$$

Cette équ. sert à trouver la parallaxe $p$ de hauteur, quand on connaît la parallaxe horizontale H : car *la parallaxe de hauteur est le produit de la parallaxe horizontale par le cosinus de cette hauteur, ou par le sinus de la distance au zénith.* $p$ et H sont exprimées l'une et l'autre, soit en minutes, soit en se-

condes de degré : H désigne la parallaxe qu'aurait l'astre, si, conservant la même distance au centre de la Terre, il était transporté, par la pensée, à l'horizon de l'observateur. $Z' = 90°$ donne $p = H$, ce qui est évident. On voit aussi comment, de l'équ. $\Delta \sin H = R$, on peut tirer la distance $\Delta$ d'un astre au centre de la Terre, lorsque l'observation a fait connaître sa parallaxe horizontale H et le rayon R de la Terre. Mais ce sujet est étranger à ceux que nous devons traiter ici. (*V. Uranographie*, n° 372.)

L'équ. (3) est celle qu'en général on applique aux observations : cependant, s'il s'agissait de la Lune, et qu'on exigeât une extrême précision, il faudrait préférer l'équ. (2), parce que la parallaxe horizontale de cet astre est très forte. Cet arc varie avec la distance de la Lune, depuis 53′ 48″ jusqu'à 61′ 24″ ; il est de 57′ 36″ pour la distance moyenne. Dans les calculs délicats, il n'est pas permis de supposer que cet arc est égal à son sinus.

Pour montrer, sur un exemple, l'usage de l'équ. (3), cherchons la hauteur vraie de la Lune (pour un observateur situé au centre de la Terre), le 7 août 1830, à $6^h$ 44′ temps vrai de Paris, la distance zénithale observée étant $Z' = 77° 45' 36'',5$. Nous avons trouvé n° 44, pour la parallaxe horizontale de l'astre au même instant $H = 59' 33'',2$ ; voici le calcul (*v.* p. 122) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| sin Z′ ...... | 9.9900140 | | |
| H. .......... | 3.5530573 | $Z' =$ | 77°45′ 36″5 |
| $p$ .......... | 3.5430713. ... | $p =$ | 58.12,0 |
| Distance zénithale vraie...... | | $Z =$ | 76° 47′ 24″5 ; |

c'est-à-dire que si l'observateur est transporté au centre de la Terre, avec son horizon parallèle, il verra la Lune plus élevée de 58′ 12″,0 ; la distance zénithale apparente Z′ devra donc être diminuée d'autant, pour devenir Z, savoir, $Z = Z' - p$.

92. La parallaxe horizontale d'un astre variant avec la distance, cet arc, pour la Lune, est susceptible de valeurs sans cesse variables, que la *Conn. des Tems* fait connaître pour tous les instans. Celle du Soleil ne varie que dans d'étroites limites ; on peut, le plus souvent, la regarder comme constante et

égale à sa valeur moyenne $H = 8'',5776$, ainsi qu'il résulte des observations des passages de Vénus sur le disque du Soleil, calculées par M. Encke. La *Conn. des Tems* la suppose de $8'',8$, ce qui paraît un peu trop fort.

Mais dans les recherches où l'on veut de la précision, il faut adopter la valeur de H qui convient à la distance actuelle où se trouve le Soleil, distance qui varie avec les saisons (*voyez* l'*Uranographie*, n° 39), et comme cet astre est le sujet de fréquentes observations, on a construit des tables, dont les marins font souvent usage, d'où l'on tire à vue la parallaxe de hauteur pour chaque date et chaque hauteur. Attendu que l'écliptique est une ellipse très peu excentrique, les changemens de distance du Soleil sont fort petits et la parallaxe horizontale de cet astre varie peu; cependant on a égard, dans ces tables, aux changemens qui résultent de ceux du rayon vecteur. Une fois qu'on a la parallaxe horizontale du Soleil, l'équ. (3) fait connaître celle de hauteur, qu'on marque dans la table dont il s'agit.

**93.** Nous avons trouvé la parallaxe $p$ de hauteur, étant donnée cette hauteur, ou la distance zénithale apparente $Z' = L'OZ$; mais si l'on donne la distance zénithale vraie, $Z = L'CZ$, comme l'angle $L'OZ$ est extérieur au triangle $L'CO$, on a $Z' = Z + p$. L'équ. (2) devient donc, en développant $\sin (Z + p)$,

$$\sin p = \sin H (\sin Z \cos p + \cos Z \sin p),$$

et divisant par $\cos p$, puis transposant

$$\tang p (1 - \sin H \cos Z) = \sin H \sin Z,$$

d'où $\tang p = \dfrac{\sin H \sin Z}{1 - \sin H \cos Z} = \sin H \sin Z (1 + \sin H \cos Z \ldots),$

en développant $(1 - \sin H \cos Z)^{-1}$. Remplaçons $\tang p$ et $\sin H$ par $p$ et $H$, ou plutôt par $p \sin 1''$ et $H \sin 1''$, pour réduire ces petits arcs en secondes (page 3), et il viendra

$$p = H \sin Z + \tfrac{1}{2} H^2 \sin 2Z . \sin 1''. \qquad (4)$$

Cette équation servira, si l'on veut avoir la hauteur de la Lune à une heure donnée; car le calcul fait d'après les équ. du nº 133 ne ferait connaître cette hauteur que pour l'observateur situé au centre du globe; pour avoir celle qui convient au lieu proposé, il faut donc corriger le résultat de la *réfraction — parallaxe*, mais en sens contraire de celui dont on a parlé ci-dessus (nº 91). Cette parallaxe se trouve par l'équ. (4), puisqu'on connaît Z.

94. La parallaxe donnée dans la *Conn. des Tems*, page 5 de chaque mois, se rapporte à l'horizon des lieux situés sous l'équateur terrestre, sous le titre de *parallaxe horizontale équatoriale*. Voici le sens qu'il faut attacher à cette expression.

Du centre de la Lune, imaginons des droites tangentes au sphéroïde terrestre; ces droites formeront un cône enveloppant celui-ci, et comme notre globe est ellipsoïdal, la base de ce cône sera une ellipse dont le grand axe sera le diamètre de l'équateur et le petit celui des pôles, vus de la Lune; c'est-à-dire que, de cet astre, la Terre paraît comme un disque elliptique. Les génératrices de ce cône font avec la ligne qui joint les centres des angles variables, qui ne sont autre chose que la parallaxe horizontale de la Lune pour chaque point; le plus grand répond à l'équateur, le plus petit aux pôles : le premier est la *parallaxe horizontale équatoriale* de la *Conn. des Tems*.

Il est facile de déduire de cette dernière parallaxe, celle qui convient à une latitude donnée $l$ : car soient H et H' les parallaxes horizontales qui répondent aux latitudes o et $l$, R et R' les demi-diamètres terrestres de ces deux stations, on a, comme nº 91, $\Delta \sin H = R$, $\Delta \sin H' = R'$, d'où

$$\frac{\sin H}{\sin H'} = \frac{R}{R'}, \quad \text{ou} \quad \frac{H}{H'} = \frac{R}{R'}; \qquad (5)$$

mais on a trouvé (p. 111) $R' = R(1 - \mu \sin^2 l + \frac{5}{8}\mu^2 \sin^2 2l \ldots)$, $\mu$ étant l'aplatissement; donc on a

$$H' = H(1 - \mu \sin^2 l + \tfrac{5}{8}\mu^2 \sin^2 2l) \qquad (6)$$
$$= H(1 - \mu \sin^2 l), \text{ à très peu près.}$$

On voit donc qu'*il faut diminuer la parallaxe horizontale équatoriale* H, *de* $H\mu \sin^2 l$, *pour avoir la parallaxe horizontale sous la latitude* $l$. Les observations ont fait connaître que l'aplatissement $\mu$ est $\frac{1}{305}$ ; en adoptant cette valeur, on a

$$\log \mu = \log \tfrac{1}{305} = \bar{3}.5157002.$$

Les marins négligent ordinairement cette correction due à l'aplatissement du globe terrestre, parce qu'elle est très petite, et que leurs opérations sont atteintes d'autres causes d'erreurs beaucoup plus considérables. Ce n'est que pour les observations de la Lune qu'il faut en général tenir compte de l'aplatissement, même dans les calculs les plus précis, parce que les autres corps célestes sont trop éloignés, pour qu'il en résulte une correction sensible.

On trouve, à la page 211 de la *Conn. des Tems*, une petite table de correction des parallaxes de la Lune, de minute en minute, pour la latitude de Paris, dans la supposition de trois aplatissemens différens : l'interpolation donne les valeurs intermédiaires. Ainsi, lorsque la parallaxe horizontale est 59′ 33″ sous l'équateur, on trouve qu'elle est à Paris plus faible de 6″,75, pour l'aplatissement $\frac{1}{300}$.

Supposons que, le 7 août 1830, à $6^h 44'$ temps vrai de Paris, on demande la parallaxe horizontale en cette ville, dont la latitude est $l = 48° 50' 14''$ ; on a trouvé (n° 49) que H = 59′ 33″,2 ; voici le calcul de l'équ. (6) :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| H........ | 3.55306....... | 59′ 33″ 6 | | |
| $\mu$........ | $\bar{3}$.51570....... | — 6,64 | sin Z′... | 9.9900170 |
| $\sin^2 l$..... | 9.75341 | H′ = 59.26,96......... | | 3.5522982 |
| 6″,64...... | 0.82217 | $p$ = 58′ 5″ 88......... | | 3.5423122 |

Après avoir trouvé 6″,64 de diminution de H, on obtient la parallaxe horizontale H′ pour Paris. C'est cette valeur de H′ qu'il faut employer dans l'équ. (3) pour H, et l'on trouve, pour la distance zénithale Z′ = 77° 45′ 36″, que la parallaxe de hauteur est 58′ 5″,88, à retrancher de Z′. Ce calcul est analogue à celui du n° 91.

95. La parallaxe, en donnant sur la voûte céleste au Soleil, à la Lune et aux planètes, une place différente de celle que ces corps ont en effet, pour le spectateur qui les voit du centre de la Terre, change, en apparence, les coordonnées qui déterminent leurs positions. Ainsi l'asc. dr. et la déclin., la longitude et la la latitude de ces astres sont influencées par la parallaxe; et il est souvent nécessaire de connaître l'étendue de ces déplacemens apparens, pour en tenir compte dans les calculs. Nous allons donner les formules qui sont usitées le plus généralement pour ces déterminations.

Commençons par l'asc. dr. et la déclin.

Soit $Pzm$ (fig. 45) le méridien, $z$ le zénith du lieu dont la latitude est $l$, P le pôle de l'équateur $ma'$, $Pz = 90° - l$. Le *lieu vrai* de l'astre, vu du centre de la Terre, est en $u$; $u'$ est le *lieu apparent*, ou vu de la surface, le petit arc $uu'$ est le déplacement sur le vertical $zu'$, ou la parallaxe de hauteur $p = uu'$; cet arc $p$ est donné par les équ. (2, 3 et 4). L'angle horaire vrai $zPu = P$ est changé en $zPu' = P'$; la variation est $uPu' = \pi$ ou la *parallaxe d'asc. dr.* La distance polaire $uP$, complément de la déclin. D, est changée en $u'P$; la différence de ces arcs est la *parallaxe* $\pi'$ *de déclin.* ou *de distance polaire;* D' est la déclin. apparente, complément de l'arc $Pu'$, et l'on a

$$Pu' = Pu + \pi' = 90° - (D - \pi'), \quad D' = D - \pi'.$$

Enfin, $zu' = Z'$, distance apparente au zénith,
$zu = Z$, distance zénithale vraie.

Dans tout ce qui suivra, nous marquerons d'un accent les valeurs des variables apparentes Z', D', Æ', vues de la surface terrestre, pour les distinguer des valeurs vraies Z, D, Æ.

Les triangles sphériques $uPu'$, $zPu'$, donnent ces équations (32, page 4),

$$\frac{\sin u'}{\sin Pu} = \frac{\sin uPu'}{\sin uu'},$$
$$\frac{\sin zPu'}{\sin zu'} = \frac{\sin u'}{\sin Pz},$$

Multipliant membre pour membre, sin $u'$ disparaît, et l'on a

$$\frac{\sin zPu'}{\sin Pu . \sin zu'} = \frac{\sin uPu'}{\sin uu' . \sin Pz}, \qquad (7)$$

$$\frac{\sin (P+\pi)}{\cos D . \sin Z'} = \frac{\sin \pi}{\sin p . \cos l} = \frac{\sin \pi}{\sin H \sin Z' \cos l},$$

à cause de l'équ. (2) p. 118; développant sin $(P+\pi)$, et divisant tout par cos $\pi$, il vient

$$\sin H \cos l (\sin P + \tang \pi \cos P) = \cos D \tang \pi ;$$

d'où

$$\tang \pi = \frac{\sin H \cos l \sin P}{\cos D - \sin H \cos l \cos P}. \qquad (8)$$

Posons $\qquad \cos \beta = \frac{\sin H \cos l \cos P}{\cos D},$

et nous aurons cette formule propre aux logarithmes,

$$\tang \pi = \frac{\sin H \cos l \sin P}{\cos D (1 - \cos \beta)} = \frac{\sin H \cos l \sin P}{2 \cos D \sin^2 \frac{1}{2} \beta}.$$

Ces deux équ. font connaître la parallaxe $\pi$ d'asc. dr., lorsqu'on a l'angle horaire P de l'astre, angle qui résulte de son asc. dr. Æ et de l'heure actuelle. Enfin,

*asc. dr. appar.* Æ' = *asc. dr. vraie* Æ + $\pi$.

Venons-en maintenant à la *parallaxe de déclin.*: l'équ. fondamentale (33), page 4, appliquée aux deux triangles sphériques $Pzu$, $Pzu'$, donne

$$\cos Pzu = \frac{\sin D - \cos Z \sin l}{\sin Z \cos l} = \frac{\sin D' - \cos Z' \sin l}{\sin Z' \cos l},$$

d'où l'on tire

$$\sin Z' (\sin D - \cos Z \sin l) = \sin Z (\sin D' - \cos Z' \sin l).$$

Réunissons ensemble les deux seconds termes,

$$\sin Z' \sin D - \sin l (\sin Z' \cos Z - \cos Z' \sin Z) = \sin Z \sin D'.$$

La partie renfermée entre les parenthèses revient à

$$\sin(Z'-Z)=\sin p=\sin H \sin Z',$$

à cause de l'équ. (2), page 118; ainsi

$$\sin Z \sin D' = \sin Z' (\sin D - \sin H \sin l).$$

Mais, d'un autre côté, l'équ. (32), page 4, appliquée aux deux mêmes triangles, devient

$$\sin Pzu = \frac{\cos D \sin P}{\sin Z} = \frac{\cos D' \sin(P+\pi)}{\sin Z'},$$

d'où

$$\sin Z \cos D' = \frac{\sin Z' \cos D \sin P}{\sin(P+\pi)}.$$

En divisant membre à membre l'équ. ci-dessus par cette dernière, il vient

$$\tang D' = \frac{\sin D - \sin H \sin l}{\cos D \sin P} \sin(P+\pi). \qquad (9)$$

Développons $\sin(P+\pi)$, et posons

$$\sin \xi = \sin H \sin l,$$

nous trouvons

$$\tang D' = \frac{\sin D - \sin \xi}{\cos D \sin P}(\sin P \cos \pi + \sin \pi \cos P)$$
$$= \frac{\sin D - \sin \xi}{\cos D} \cos \pi \left(1 + \frac{\tang \pi \cos P}{\sin P}\right);$$

mais en substituant pour $\tang \pi$ sa valeur (8), la partie entre crochets devient

$$1 + \frac{\sin H \cos l \cos P}{\cos D - \sin H \cos l \cos P} = \frac{\cos D}{\cos D - \sin H \cos l \cos P}$$
$$= \frac{\cos D}{\cos D(1-\cos\alpha)} = \frac{1}{2\sin^2 \frac{1}{2}\alpha}.$$

Enfin, en transformant $\sin D - \sin \xi$ en facteurs par l'équ. (9), page 1, on a

$$\tang D' = \frac{2 \sin \frac{1}{2}(D-\xi) \cos \frac{1}{2}(D+\xi) \cos \pi}{2 \cos D \sin^2 \frac{1}{2}\alpha};$$

de là on tire la déclin. apparente $D'$, et par suite, s'il est nécessaire, la parallaxe $\pi'$ de déclin., puisqu'on a $D' = D - \pi'$.

Le demi-diamètre R de la Lune croît avec la hauteur de l'astre sur l'horizon. Nous avons donné, p. 61, la valeur de cet accroissement, quand cette hauteur est connue; mais comme ici elle ne l'est pas, il convient d'exprimer le demi-diamètre apparent $R'$ en fonction des données $D$, $D'$, $R$,....

Les sinus des angles sous lesquels on voit le demi-diamètre de la Lune sont en raison inverse des distances, c'est-à-dire que $\frac{\sin R'}{\sin R} = \frac{\sin Z'}{\sin Z}$. (*V.* p. 60.) Mais ce dernier rapport est donné par les valeurs égales de sin $Pzu$ qu'on a trouvées ci-dessus; d'où

$$\frac{\sin R'}{\sin R} = \frac{\cos D' \sin (P + \pi)}{\cos D \sin P}$$
$$= \frac{\cos D'}{\cos D}\left(\cos \pi + \frac{\cos P \sin \pi}{\sin P}\right)$$
$$= \frac{\cos D'}{\cos D} \cos \pi \left(1 + \frac{\cos P \tan \pi}{\sin P}\right),$$

et substituant à tang $\pi$ sa valeur (8),

$$\frac{\sin R'}{\sin R} = \frac{\cos D' \cos \pi}{\cos D - \sin H \cos l \cos P} = \frac{\cos D' \cos \pi}{\cos D (1 - \cos \alpha)};$$

donc

$$\sin R' = \frac{\cos D' \cos \pi \sin R}{2 \cos D \sin^2 \frac{1}{2}\alpha}.$$

En remarquant que les dénominateurs de nos équ. sont les mêmes, on voit qu'on a, en général,

$$\cos \beta = \frac{\sin H \cos l \cos P}{\cos D}, \qquad \text{(A)}$$
$$\sin \xi = \sin H \sin l,$$
$$\sigma = \frac{1}{2 \cos D \sin^2 \frac{1}{2}\beta},$$
$$\tan \pi = \sigma \sin H \cos l \sin P,$$

$$\operatorname{tang} D' = 2\sigma \sin \tfrac{1}{2}(D - \xi) \cos \tfrac{1}{2}(D + \xi) \cos \pi,$$
$$\sin R' = \sigma \cos D' \cos \pi \sin R.$$

Mais le plus souvent, on peut simplifier ces formules ; car H ne dépasse guère un degré, et peut remplacer sin H. Il faut en dire autant de $\xi$, $\pi$, R, R' et même D', puisque dans les éclipses de Soleil, auxquelles ces équ. s'appliquent principalement, la déclin. est fort petite. Enfin, $\cos \beta = \sin(90^\circ - \beta) = \sin 2\iota$ peut aussi admettre la même simplification, car $2\iota$ est très petit; ainsi $\frac{1}{2}\beta = 45^\circ - \iota$. On a donc

$$\iota = \frac{H \cos l \cos P}{2 \cos D}, \qquad \text{(B)}$$
$$\sigma = \frac{1}{2 \cos D \sin^2 (45^\circ - \iota)},$$
$$\xi = H \sin l,$$
$$\pi = \sigma H \cos l \sin P,$$
$$D' = \sigma (D - \xi) \cos \tfrac{1}{2}(D + \xi) \cos \pi,$$
$$R' = \sigma R \cos D' \cos \pi.$$

Quoique ces équ. soient très simples, les astronomes préfèrent l'emploi des séries. En posant dans l'équ. (8),

$$\varphi = \frac{\sin H \cos l}{\cos D},$$

on trouve $\operatorname{tang} \pi = \dfrac{\varphi \sin P}{1 - \varphi \cos P}$;

développant la puissance $-1$ du dénominateur,

$$\operatorname{tang} \pi = \varphi \sin P (1 + \varphi \cos P + \varphi^2 \cos^2 P \ldots),$$

remplaçant enfin tang $\pi$ par $\pi$ sin 1″, pour exprimer $\pi$ en secondes, on a

$$\pi = \frac{\varphi \sin P}{\sin 1''} + \frac{\varphi^2 \sin 2P}{2 \sin 1''} + \frac{\varphi^3 \sin 3P}{3 \sin 1''} \cdots\cdots$$

Cette série est très convergente, parce que $\varphi$ est fort petit; il est rare que l'on en conserve le 3ᵉ terme. Pareillement pour

la parallaxe $\pi'$ de déclin., nous rendrons l'équ. (9) propre au calcul logarithmique, par l'artifice suivant. On tire de cette équ.

$$\frac{\sin l \sin H}{\cos D} = \tang D - \frac{\sin P \tang D'}{\sin(P+\pi)}.$$

D'ailleurs on a

$$\tang D - \tang D' = \frac{\sin D}{\cos D} - \frac{\sin D'}{\cos D'}$$

$$= \frac{\sin D \cos D' - \sin D' \cos D}{\cos D \cos D'} = \frac{\sin \pi'}{\cos D \cos D'}.$$

Ajoutant membre à membre avec la précédente, on trouve

$$\frac{\sin l \sin H}{\cos D} - \tang D' = \frac{\sin \pi'}{\cos D \cos D'} - \frac{\sin P \tang D'}{\sin(P+\pi)},$$

$$\frac{\sin l \sin H}{\cos D} = \tang D' \left[1 - \frac{\sin P}{\sin(P+\pi)}\right] + \frac{\sin \pi'}{\cos D \cos D'};$$

mais on a

$$1 - \frac{\sin P}{\sin(P+\pi)} = \frac{\sin(P+\pi) - \sin P}{\sin(P+\pi)}$$

$$= \frac{2 \sin \frac{1}{2}\pi \cos(P+\frac{1}{2}\pi)}{\sin(P+\pi)} \text{ (équ. 9, p. 2)};$$

à cause de $2 \sin \frac{1}{2}\pi \cos \frac{1}{2}\pi = \sin \pi$, cette fraction

$$= \frac{\sin \pi \cos(P+\frac{1}{2}\pi)}{\sin(P+\pi) \cos \frac{1}{2}\pi} = \frac{\sin H \cos l}{\cos D \cos \frac{1}{2}\pi} \cos(P+\frac{1}{2}\pi),$$

en vertu de l'équ. (7). On a donc, en substituant ci-dessus,

$$\frac{\sin l \sin H}{\cos D} = \tang D' . \frac{\sin H \cos l}{\cos D \cos \frac{1}{2}\pi} \cos(P+\frac{1}{2}\pi) + \frac{\sin \pi'}{\cos D \cos D'};$$

donc

$$\sin \pi' = \sin l \sin H \cos D' - \frac{\sin D' \sin H \cos l \cos(P+\frac{1}{2}\pi)}{\cos \frac{1}{2}\pi}.$$

Posons

$$\cot \varepsilon = \frac{\cot l \cos(P+\frac{1}{2}\pi)}{\cos \frac{1}{2}\pi},$$

il vient

$$\sin \pi' = \sin l \sin H (\cos D' - \sin D' \cot \iota)$$
$$= \sin l \sin H \cdot \frac{\cos D' \sin \iota - \sin D' \cos \iota}{\sin \iota}$$
$$= \frac{\sin l \sin H}{\sin \iota} \sin(\iota - D').$$

On fait $u = \frac{\sin l \sin H}{\sin \iota}$,

et l'on a

$$\sin \pi' = u \sin(\iota - D + \pi')$$
$$= u \sin(\iota - D) \cos \pi' + u \sin \pi' \cos(\iota - D);$$

et divisant tout par $\cos \pi'$,

$$\operatorname{tang} \pi' = u \sin(\iota - D) + u \operatorname{tang} \pi' \cos(\iota - D),$$
$$\operatorname{tang} \pi' = \frac{u \sin(\iota - D)}{1 - u \cos(\iota - D)},$$

et en développant le dénominateur à la puissance $-1$,

$$\operatorname{tang} \pi' = u \sin(\iota - D) \times [1 + u \cos(\iota - D) + u^2 \cos^2(\iota - D) \ldots],$$

série convergente, attendu que $u$ est très petit. Ainsi, $\pi'$ est connu, à l'aide des variables auxiliaires $\iota$ et $u$, et par suite la déclin. app. $D' = D - \pi'$.

On peut remplacer la tang $\pi'$ par l'arc, puisque, pour la Lune, dont la parallaxe est la plus grande, cet arc n'est pas de plus de 1°. Nous changerons la tang $\pi$ en $\pi' \sin 1''$, pour exprimer cet arc en secondes de degré. Il vient donc, en réunissant ces formules, les équ. suivantes, dans lesquelles P est l'angle horaire de l'astre, D sa déclin., $l$ la latitude du lieu, H la parallaxe horizontale. (*V.* ci-après, p. 139.)

*Parallaxe π d'asc. dr.* Æ. (C)

On pose
$$\varphi = \frac{\sin H \cos l}{\cos D},$$

$$\pi = \frac{\varphi \sin P}{\sin 1''} + \frac{\varphi^2 \sin 2P}{2 \sin 1''} + \frac{\varphi^3 \sin 3P}{3 \sin 1''},$$

$$\text{asc. dr. app. Æ}' = \text{asc. dr. vr. Æ} + \pi.$$

*Parallaxe π' de déclin.* D.

$$\cot \iota = \frac{\cos (P + \frac{1}{2}\pi) \cot l}{\cos \frac{1}{2}\pi},$$

$$u = \frac{\sin H \sin l}{\sin \iota},$$

$$\pi' = \frac{u \sin(\iota - D)}{\sin 1''} + \frac{u^2 \sin 2 (\iota - D)}{2 \sin 1''} + \frac{u^3 \sin 3 (\iota - D)}{3 \sin 1''} \ldots$$

$$\text{Déclin. app. } D' = \text{déclin. vr. } D - \pi'.$$

Il est rare que, pour la Lune même, il soit utile de conserver le 3[e] terme; pour le Soleil et les planètes, le 1[er] terme suffit.

Il faut prendre π et π' avec les signes que le calcul fait trouver. π est positif lorsque l'astre est à l'ouest du méridien, et négatif lorsqu'il est à l'est, attendu que, dans ce dernier cas, l'angle horaire P prend le signe —. De même, il se peut qu'on soit conduit à une valeur négative pour π'; alors, dans l'équ. $D = D - \pi'$, la parallaxe accroît la déclin. au lieu de la diminuer. Cependant il ne faut pas oublier que D doit prendre le signe — quand la déclin. est australe; en sorte que, si π' est alors négatif, la parallaxe se trouve encore affaiblir la valeur numérique de la déclin. Toutes ces circonstances résultent facilement du jeu des signes algébriques.

96. Venons-en maintenant à la recherche des parallaxes de longitude et de latitude des planètes, si fréquemment employées dans la théorie des éclipses de Soleil et d'étoiles par la Lune.

Mais avant, remarquons que ces arcs coordonnés se rap-

portent au plan de l'écliptique, dont la position change sans cesse à l'égard de l'horizon, par le fait du mouvement diurne; il faut donc trouver, pour tout instant donné, quelle est la situation de l'écliptique. C'est ce qu'on obtient par la place qu'occupe le *Nonagésime:* on nomme ainsi le point de l'écliptique qui est actuellement à 90° des points où ce cercle coupe l'horizon. Ces deux plans déterminent des grands cercles de la sphère, et se coupent suivant un diamètre de chacun; 180° de l'écliptique céleste sont donc toujours au-dessus de l'horizon, et le milieu de ce demi-cercle est ce qu'on appelle le *Nonagésime*.

Soit P (fig. 40) le pôle de l'écliptique $fb$, $p$ celui de l'équateur $fa$, $Pp = \omega$ l'obliquité de l'écliptique (*v.* n° 77); $f$ est l'équinoxe ♈, origine des asc. dr. et des longitudes, qui sont comptées, les unes de $f$ vers $a$, les autres de $f$ vers $b$, en faisant le tour entier du cercle, et allant de l'ouest à l'est. $z$ est le zénith, $pzd$ le méridien, $pz = 90° -$ la latitude $l$ du lieu, $xbs$ l'horizon oriental; $b$ est le point de l'écliptique qui se lève actuellement, et qu'on appelle l'*horoscope*.

Il est clair que si nous déterminons le point du ciel qui se trouve actuellement au zénith $z$, savoir sa longitude $fn = \text{N}$, et sa latitude $nz = 90° - h$, la position de la voûte céleste sera connue pour cet instant. Or, le cercle P$zn\nu$ est à la fois perpendiculaire en $n$ à l'écliptique $fb$, et en $\nu$ à l'horizon $bx$: c'est un cercle de latitude et un vertical, puisqu'il passe à la fois par le pôle P de l'écliptique et par le zénith $z$. Le point $b$ est à 90° de tous ceux de la circonférence P$n\nu$; $n$ est donc le nonagésime, puisque $bn = 90°$. Ainsi $fn = \text{N} =$ *longit. du nonagésime*, ou du zénith $z$. D'ailleurs, $n\nu = h =$ *hauteur du nonagésime* $=$ colatitude du zénith, puisque $n\nu$ est le complément de $nz$. Cet arc $n\nu$ mesure l'inclinaison actuelle de l'écliptique sur l'horizon, ou l'angle $b$, savoir $b = n\nu = \text{P}z = h$. Il s'agit, comme on voit, de trouver $fn = \text{N}$, et $n\nu = h$, coordonnées actuelles du nonagésime.

Les points $m$ et $d$ sont ceux de l'équateur et de l'écliptique qui sont maintenant au méridien; l'arc $fm$, en temps, est

l'heure sidérale $s$, que nous supposons connue ($v$. n°s 108 et suiv.); l'arc $fi$ est de 90°, puisque le plan $Ppi$, passant par les deux pôles P et $p$ de l'équateur et de l'écliptique, étant à la fois perpendiculaire à ces deux plans, $f$ est le pôle de $Pci$.

$$\text{L'arc } mi = fi - fm = 90° - s\,;$$

donc $$\text{l'angle } zpP = 180° - zpi = 90° + s.$$

Cela posé, dans le triangle sphérique $pPz$, on connaît les côtés $Pp = \omega$, $zp = 90° - l$, et l'angle compris $zpP = 90° + s$; et l'on cherche 1°. l'angle $pPz = nc = fc - fn = 90° - N$; c'est le complément de la longitude du nonagésime, ou du zénith;

2°. $Pz = h$ hauteur du nonagésime, ou colatitude du zénith, qui est l'inclinaison de l'écliptique sur l'horizon.

En résolvant ce triangle par les formules connues ($V$. les équ. VI, p. 7, et $q$, p. 5), on trouve les relations suivantes :

$$\left.\begin{array}{lr}
(1) & \tan\varphi = \cot l \sin s,\\
(2) & \cos h = \dfrac{\sin l . \cos(\omega + \varphi)}{\cos\varphi},\\
(3) & \sin N = \cot h . \tan(\omega + \varphi),\\
(4) & \cot h = \sin N \cot(\omega + \varphi),\\
(5) & \tan N = \dfrac{\tan s . \sin(\omega + \varphi)}{\sin\varphi}.
\end{array}\right\}\quad (D).$$

La 1re de ces équ. fait connaître l'arc auxiliaire $\varphi$, dont on introduit ensuite la valeur, *avec son signe*, dans les suivantes, qui donnent $h$ et N. On préfère celles de ces équ. qu'on juge les plus commodes pour le calcul. On prend (4 et 5), lorsque $s$ est entre 80° et 100°, ou bien entre 260° et 280°: dans tout autre cas, il est plus facile d'employer (2 et 3).

Bien entendu que l'heure sidérale $s$ doit être convertie en degrés, à raison de 15° par heure (n° 70). Quand $s > 12^h$ ou 180°, $\varphi$ devient négatif, et $\omega + \varphi$ se change en $\omega - \varphi$, $\sin\varphi$ en $-\sin\varphi$, etc.

Comme N peut aller jusqu'à 360°, il existe deux arcs qui

satisfont à l'équ. qui détermine cet arc. Mais on voit sur la fig. 40 que le pôle P de l'écliptique est toujours à l'est du méridien quand le nonagésime est à l'ouest, et réciproquement, ce qui lève tous les doutes sur la valeur absolue de N.

En effet, à $6^h$ et à $18^h$ de temps sidéral, les équinoxes sont à l'horizon, et le nonagésime est au méridien : on a $N = 90°$ dans le 1^er cas, et $N = 270°$ dans le 2^e. Dans cet intervalle, le nonagésime est du côté de l'occident, et $s$, qui va en croissant de $6^h$ vers $18^h$, fait croître N de 90° à 270°. Avant $6^h$, on a $N < 90°$, et après $18^h$ de temps sid. $N > 270°$. Depuis $18^h$ jusqu'à $0^h$, et ensuite jusqu'à $6^h$, le nonagésime est du côté oriental.

D'après cela, on voit que tant que l'heure sidérale $s$ est $< 6^h$, on doit prendre pour N l'arc $< 90°$ que donne la table de logarithmes. Depuis $6^h$ jusqu'à $18^h$, N va en croissant de 90° à 270°, et quand sin N est positif, il faut prendre pour N le supplément à 180° de l'arc qui a même sinus ; mais dès que sin N a le signe —, on prend $N = 180° +$ l'arc donné par la table. Enfin, passé $s = 18^h$, N devient $> 270°$, et il faut prendre $N = 360° -$ l'arc qui a même sinus, abstraction du signe de ce sinus qui est négatif.

Quelques astronomes préfèrent l'usage des formules suivantes pour obtenir N et $h$ (équ. 37 et 33, p. 4),

$$\text{tang } N = \cos \omega \text{ tang } s + \frac{\sin \omega \text{ tang } l}{\cos s},$$

$$\cos h = \cos \omega \sin l - \sin \omega \cos l \sin s.$$

97. Maintenant que N et $h$ sont connus à un instant quelconque désigné, ainsi que les positions actuelles du zénith sur la voûte céleste, du nonagésime et de l'écliptique, occupons-nous de chercher les longitude et latitude apparentes d'un astre quelconque, vu au point $u$ du centre de la Terre, et en $u'$ de sa surface (fig. 40), c'est-à-dire les parallaxes $\varpi$ et $\varpi'$ dans les sens de ces deux arcs coordonnés.

L'arc $uu'$ est vertical, et égal à la parallaxe $p$ de hauteur :

les cercles $Pu$, $Pu'$, conduits au pôle P de l'écliptique $fb$, déterminent la longitude vraie $fg = L$, et la latitude $gu = \lambda$, la longitude apparente $L' = fk = fg + gk$, ou $L' = L + \varpi$, et la latitude $ku' = \lambda'$. On a $gk =$ la parallaxe $\varpi$ de longitude qui mesure l'angle $uPu'$. L'angle $zPu$ est mesuré par... $ng = fg - fn$, ou

$$zPu = L - N, \quad zPu' = L - N + \varpi.$$

Quant à la parallaxe $\varpi'$ de latitude ou de distance au pôle de l'écliptique, elle est la différence entre les arcs $Pu'$ et $Pu$, qui étant les complémens de $\lambda$ et $\lambda'$, donnent $\lambda' = \lambda - \varpi'$.

Nous pouvons nous dispenser de tout calcul algébrique pour obtenir les expressions de $\varpi$, $\lambda'$ et $\varpi'$, puisqu'en comparant les fig. 45 et 40, il est évident qu'il suffit de remplacer dans nos équ., la hauteur $l$ du pôle de l'équateur par celle $90^\circ - h$ du pôle P de l'écliptique; et la distance $P = am$ de l'astre au méridien, par la distance $ng$ (fig. 40) au vertical du nonagésime, savoir, P en $fg - fn = L - N$. D'ailleurs D devient $\lambda$.

Ainsi les équ. (A) deviennent

$$\cos\beta = \frac{\sin H \sin h \cos(L - N)}{\cos\lambda}, \qquad (E)$$

$$\sin\xi = \sin H \cos h,$$

$$\sigma = \frac{1}{2\cos\lambda \sin^2\frac{1}{2}\beta},$$

$$\text{tang}\,\varpi = \sigma \sin H \sin h \sin(L - N),$$

$$\text{tang}\,\lambda' = 2\sigma \sin\tfrac{1}{2}(\lambda - \xi)\cos\tfrac{1}{2}(\lambda + \xi)\cos\varpi,$$

$$\sin R' = \sigma \cos\lambda' \cos\varpi \sin R.$$

Par abréviation, permise le plus souvent, on a pour analogues des équ. (B),

$$\iota = \frac{H \sin h \cos (L - N)}{2 \cos \lambda}, \qquad \text{(F)}$$

$$\xi = H \cos h,$$

$$\sigma = \frac{1}{2 \cos \lambda \sin^2 (45° - \iota)},$$

$$\varpi = \sigma H \sin h \sin (L - N),$$

$$\lambda' = \sigma (\lambda - \xi) \cos \tfrac{1}{2} (\lambda + \xi) \cos \varpi,$$

$$R' = \sigma R \cos \lambda' \cos \varpi.$$

Dans ces dernières formules $\iota$, $\xi$, H, $\varpi$, $\lambda'$ et R' sont exprimés en secondes d'arc.

98. Enfin, si l'on veut faire le calcul par les séries, on trouve les équ. suivantes, où les petits arcs $\varpi$ et $\varpi'$ sont aussi des secondes de degré.

*Parallaxe $\varpi$ de longitude* L. (G)

Faites $$x = \frac{\sin H \sin h}{\cos \lambda},$$

$$\varpi = \frac{x \sin (L - N)}{\sin 1''} + \frac{x^2 \sin 2 (L - N)}{2 \sin 1''} + \frac{x^3 \sin 3 (L - N)}{3 \sin 1''},$$

longitude appar. L' = longit. vraie L + $\varpi$.

*Parallaxe $\varpi'$ de latitude* $\lambda$.

Posez $$\cot y = \frac{\cos (L - N + \frac{1}{2} \varpi) \tang h}{\cos \frac{1}{2} \varpi},$$

$$\nu = \frac{\sin H \cos h}{\sin y},$$

$$\varpi' = \frac{\nu \sin (y - \lambda)}{\sin 1''} + \frac{\nu^2 \sin 2 (y - \lambda)}{2 \sin 1''} + \frac{\nu^3 \sin 3 (y - \lambda)}{3 \sin 1''} + \ldots,$$

latitude appar. $\lambda'$ = latit. vraie $\lambda - \varpi'$.

Rarement on conserve le 3[e] terme de cette série, même quand il s'agit de la Lune ; le 1[er] suffit pour le Soleil et les planètes.

Dans toutes les séries des formules de parallaxe, on peut remplacer 2 sin 1″ par sin 2″, 3 sin 1″ par sin 3″, etc. Les complémens des logarithmes de ces facteurs constans sont :

$$\text{comp. log. sin } 1'' = 5.3144251 33,$$
$$\text{comp. log. sin } 2'' = 5.0133951 4,$$
$$\text{comp. log. sin } 3'' = 4.8373038 8.$$

Dans ces équ. $x$, $y$, $v$ sont des variables auxiliaires dont chacune est déterminée par une équation ; N et $h$ sont la longitude et la hauteur du nonagésime, qu'on a trouvée par un calcul antérieur ; L est la longitude et $\lambda$ la latitude vraies de l'astre, $\varpi$ et $\varpi'$ les parallaxes exprimées en secondes de degré, et dont on doit employer les valeurs avec leurs signes propres, tels que le calcul les fournit.

99. Il nous reste maintenant à préparer la formule qui donne l'accroissement du demi-diamètre de la Lune n° 47, pour l'approprier aux données des équ. C et G ; car ici on ne connaît pas les distances zénithales vraie et apparente Z et Z′.

Tracez (fig. 45) l'arc PG qui divise par moitiés l'angle $u\text{P}u'$, savoir $k\text{P}g = k'\text{P}g = \frac{1}{2}\pi$, puisque cet angle $u\text{P}u'$ est la parallaxe d'asc. dr. Abaissez du zénith $z$, l'arc $zk'$ perpendiculaire sur PG. Il est évident que P$kk'$ est un triangle isocèle, d'où P$k$ = P$k'$, et angle $k = k'$. Or les triangles P$zg$, P$kg$, rectangles en $g$, donnent (équ. $q$, p. 5)

$$\text{tang P}g = \text{tang P}z \cos z\text{P}g = \cot l . \cos (\text{P} + \tfrac{1}{2}\pi),$$

$$\text{tang P}k = \frac{\text{tang P}g}{\cos k\text{P}g} = \cot ka,$$

l'équateur étant $maa'$. Faisons cet arc $ka = \iota$, il viendra

$$\cot \iota = \frac{\cot l . \cos (\text{P} + \frac{1}{2}\pi)}{\cos \frac{1}{2}\pi}.$$

C'est l'une de nos équ. (C). Ce calcul montre que cet arc auxiliaire $\iota$ est la distance du point $a$ à l'équateur.

Mais

$$uk = \text{P}u - \text{P}k = (90^\circ - \text{D}) - (90^\circ - \iota) = \iota - \text{D},$$
$$u'k' = \text{P}u' - \text{P}k' = \iota - \text{D}' = \iota - \text{D} + \varpi'.$$

Dans les triangles sphériques $uzk$, $u'zk'$, les sinus des angles sont proportionnels aux sinus des côtés opposés, et l'angle $k = k'$; ainsi

$$\frac{\sin zu}{\sin uk} = \frac{\sin k}{\sin z} = \frac{\sin zu'}{\sin u'k'},$$

ou

$$\frac{\sin \text{Z}}{\sin(\iota - \text{D})} = \frac{\sin \text{Z}'}{\sin(\iota - \text{D} + \varpi')},$$

$$\frac{\sin \text{Z}'}{\sin \text{Z}} = \frac{\sin(\iota - \text{D} + \varpi')}{\sin(\iota - \text{D})} = \frac{\sin \text{R}'}{\sin \text{R}}.$$

D'après ce qu'on a vu n° 47, on peut même remplacer les sinus de R et R' par les arcs, savoir :

$$\text{R}' = \text{R}\,\frac{\sin(\iota - \text{D} + \varpi')}{\sin(\iota - \text{D})}.$$

Ainsi l'accroissement $x = \text{R}' - \text{R}$ du demi-diamètre est

$$x = \text{R}.\frac{\sin(\iota - \text{D} + \varpi') - \sin(\iota - \text{D})}{\sin(\iota - \text{D})},$$

et d'après l'équ. (9), p. 2,

$$x = \text{R}.\frac{2 \sin \tfrac{1}{2}\varpi' \cos(\iota - \text{D} + \tfrac{1}{2}\pi')}{\sin(\iota - \text{D})},$$
$$= \text{R}.2 \sin \tfrac{1}{2}\varpi' [\cot(\iota - \text{D}) \cos \tfrac{1}{2}\varpi' - \sin \tfrac{1}{2}\varpi'],$$
$$= \text{R}[\sin \varpi' \cot(\iota - \text{D}) - 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}\varpi'].$$

Enfin, en remplaçant $\sin \varpi'$ par $\varpi'$, ou plutôt par $\varpi' \sin 1''$, pour exprimer $\varpi'$ en secondes, comme $x$ et R le sont déjà, on trouve

$$x = R\pi' \sin 1'' \cot(\iota - D) - \tfrac{1}{2} R(\pi' \sin 1'')^2. \qquad (H)$$

Quand on calcule les parallaxes de longitude et de latitude, on prépare cette formule pour la rendre propre aux données de la question, en changeant P en L — N, etc..., comme on l'a dit page 134 : ainsi

$$x = R\varpi' \sin 1'' \cot(y - \lambda) - \tfrac{1}{2} R(\varpi' \sin 1'')^2. \qquad (I)$$

Dans ces formules, on conserve aux lettres $\iota, y, \pi', \varpi', \ldots$ la signification donnée précédemment. Comme le dernier terme ne peut dépasser 0",15, il est rare qu'on le calcule; on est dans l'usage de n'en pas tenir compte.

100. Dans les calculs du nonagésime et des parallaxes, il ne faut pas oublier d'employer, au lieu de $l$ et de H, leurs valeurs corrigées de l'aplatissement du sphéroïde terrestre, ainsi qu'on va le dire.

1°. Ce n'est pas la *latitude astronomique* $l$, mais la *latitude géocentrique* $l'$ qui doit être introduite dans nos formules, savoir $l' = l - i$, $i$ étant l'angle que fait la verticale du lieu avec le rayon terrestre, d'après ce qui a été exposé n° 88. En effet, PMA (fig. 38) étant le méridien terrestre elliptique de la station M, la normale MN est la verticale qui va marquer au ciel le zénith apparent Z, déterminé par la direction du fil-à-plomb en M. On sait que ZM est différent de la direction de la ligne CM, qui, partant du centre C de la Terre, donne en V le *zénith vrai* du spectateur placé au centre C du globe. Les longitude et latitude de l'astre, données dans la *Conn. des Tems*, sont géocentriques, pour servir à toute la Terre. Quand on veut les introduire dans les calculs, avec les résultats tirés d'observations, faites en M, à la surface terrestre, il faut corriger ces données des effets de la parallaxe, en se servant des formules qu'on vient de démontrer. On en doit dire autant des asc. dr. et des déclin. Il faut donc employer, dans les formules précédentes, le zénith V au lieu de Z, c'est-à-dire remplacer $l$ par $l' = l - i$, en prenant l'angle $i$ = CMN = angle du

rayon terrestre CM et de la verticale MN. Ce qui a été dit du zénith et de la verticale doit s'entendre du point V et de la direction CM.

Ainsi, il faut prendre dans les formules du nonagésime et des parallaxes, la latitude corrigée $l'$ au lieu de $l$, pour que les opérations deviennent les mêmes que si la Terre était sphérique.

2°. Dans nos équations, H représente la parallaxe horizontale du lieu M d'observation, et non pas celle que donne la *Conn. des Tems,* qui suppose l'observateur placé sous l'équateur terrestre. Il faut donc prendre pour H la valeur corrigée H' du n° 94, qui se déduit de la première à l'aide de l'équation (6), p. 121. Cette formule sert à ramener la valeur de H à ce qu'elle serait si la Terre n'était pas un sphéroïde aplati sous les pôles.

Nous ne ferons pas ici d'application des formules A, B, E, F, parce que nous les jugeons plus simples que les suivantes, et que nous en ferons, de préférence, usage par la suite. Nous nous contenterons d'appliquer maintenant les équ. C, D, E, pour montrer comment on doit gouverner le calcul.

101. Pour donner un exemple du calcul des parall. en asc. dr. et déclin., par la méthode des séries, prenons celles de la Lune le 5 oct. 1830, à 10h 32′ 45″ t. vr. On trouve (*v.* n° 217)

$$Æ☾ = 61° 43' 59'',26, \qquad D = +15° 39' 27'',23, \qquad R = 16' 24'',2\,;$$

on a d'ailleurs $l' = 48° 38' 27'',6, \quad H = 60' 13'',3, \quad H' = 60' 6'',62,$

$$P = -4^h 49' 26'',1 = -72° 21' 31'',3.$$

*Parall. d'asc. dr.* (équ. C, p. 130).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| sin H' ..... | 8.2426531 | | | | |
| cos $l'$ ...... | 9.8200536 | | | | |
| cos D... — | 9.9835776 | | | | |
| φ.......... | $\bar{2}$.0791291 | φ² ..... | $\bar{4}$.15826 | φ³..... | $\bar{6}$.23739 |
| sin P. ..... | 9.9790804 — | sin 2P.. | 9.76163 — | sin 3P.. | 9.78022 + |
| c. sin 1″. .. | 5.3144251 | c. sin 2″. | 5.01340 | c. sin 3″. | 4.83730 |
| | 3.3726346 — | | 0.93329 — | | $\bar{2}$.85491 + |

$\pi = -$ 39′ 18″50 ............ $-$ 8″,58 .............. $+$ 0,72

$\pi = -$ 39.26,36 *Parall. de déclin.*

$Æ = $ 61.43.59,26 c. cos $\frac{1}{2}\pi$..... $+$ 71

$Æ' = $ 61. 4.32,90 cot $l'$......... 9.9416542

$P + \frac{1}{2}\pi = -$ 72°41′ 14″5.... cos ......... 9.4736118

$\varepsilon = $ 75.19.10,0 cot $\varepsilon$......... 9.4182731

$D = $ 15.39.27,2

$\varepsilon - D = $ 59.39.42,8

sin $H'$...... 8.2426531

sin $l'$...... 9.8753993

sin $\varepsilon$.....$-$ 9.9855853

$u$......... $\bar{2}$.1324671. $u^2$........... $\bar{4}$.26493 $u^3$ ne donne rien.

sin $(\varepsilon - D)$. 9.9360409 sin 2......... 9.94045

c. sin 1″.... 5.3144253 c. sin 2″...... 5.01340

3.3829331 1.21878

$\pi' = +$ 40.15,09 .............. $+$ 16″,55 = 40′ 31″64

$D = $ 15.39.27,23

$D' = $ 14.58.55,59.

*Demi-diamètre* (équ. H, p. 138).

R......... 2.9930834 ................. 2.99308

$\pi'$......... 3.3858993 $\pi'$ sin 1″ ...... $\bar{2}$.07147

sin 1″...... $\bar{6}$.6855749 $\bar{2}$.07147

cot $(\varepsilon - D)$ 9.7673381 0,5........... $\bar{1}$.69897 $-$

$+$ 6″,79... 0.8318957 $-$ 0,07........$\bar{2}$.83499 $-$

$-$ 0,07. R = 16′ 24″2

6,72 ......................... 6,72

R′ = 16.30,92.

Cherchons encore, par les séries, les parallaxes lunaires en longitude et latitude, les données étant

$H = 54' 35'',57$, $h' = 58° 24' 37'',3$, $L = 67° 27' 42'',6$,

$L - N = -59° 44' 37''$, $\lambda = -4° 45' 3'',2$, $R = 14' 52'',9$.

*Parallaxe de longitude* (équ. G, p. 135).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| sin H..... | 8.2008435 | | | | |
| sin $h$...... | 9.9303487 | | | | |
| cos $\lambda$.....— | 9.9985053 | | | | |
| $x$. ........ | $\bar{2}$.1326869 | $x^2$..... | $\bar{4}$.26537 | $x^3$..... | $\bar{6}$.39806 |
| sin (L—N). | 9.9364028 — | sin 2... | $\bar{1}$.93975 — | sin 3... | $\bar{2}$.12788 — |
| c. sin 1″... | 5.3144251 | c. sin 2″. | 5.01340 | c. sin 3″. | 4.83730 |
| | 3.3835148 — | | 1.21852 — | | $\bar{3}$.36324 — |

$\varpi$ = — 0°40′ 18″326 .......... — 16″,539 .......... — 0,002
— 16,539
— 0,002

$\varpi$ = — 0.40.34,867
L = 67.27.42,6
L′ = 66.47. 7,73

*Parallaxe de latitude.*

L—N = — 59.44.37,0
$\frac{1}{2}\varpi$ = — 20,17,43..... cos........— 9.9999924
— 60. 4.54,43..... cos........ 9.6978944
tang $h$..... 0.2111567

$\gamma$ = 50.57.20,0 cot $\gamma$...... 9.9090587
$\lambda$ = — 4.45. 3,2

$\gamma - \lambda$ = 55.42 23,2 double = 111° 25′, triple = 167° 7′.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| sin H..... | 8.2008435 | | | | |
| cos $h$..... | 9.7191919 | | | | |
| sin $\gamma$....— | 9.8902296 | | | | |
| $\nu$......... | $\bar{2}$.0298058 | $\nu^2$..... | $\bar{4}$.05961 | $\nu^3$..... | $\bar{6}$.08942 |
| sin ($\gamma$—$\lambda$). | 9.9170650 | sin 2... | 9.96893 | sin 3... | 9.34824 |
| c. sin 1″... | 5.3144251 | c. sin 2″. | 5.01340 | c. sin 3″. | 4.83730 |
| | 3.2612959 | | 1.04194 | | $\bar{2}$.27496 |

$\varpi'$ = 0°30′25″13 ......... + 11″,01 ............. + 0,02
11,01
0,02

$\varpi'$ = 0.30.36,16
$\lambda$ = — 4.45. 3,2
$\lambda'$ = — 5.15.39,4.

*Demi-diamètre lunaire* (équ. I, p. 138).

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cot(y-\lambda)$. | 9.8337773 | 0,5......... | $\bar{1}.69897$ |
| $\varpi'$......... | 3.2639105 | carré....... | $\bar{5}.89897$ |
| sin 2....... | $\bar{6}.6855749$ | | |
| R......... | 2.9508028 | ................... | 2.95080 |
| + 5″42... | 0.7340665 | — 0″,03.... | $\bar{2}.54874$ |
| — 0,03 | | R = 14′ 52″ 90 | |
| + 5,39 | .................. | + 5,39 | |
| | | R′ = 14.58,29. | |

# SECONDE PARTIE.

## PROBLÈMES D'ASTRONOMIE.

---

*De la mesure du temps et de la conversion des diverses durées les unes en les autres.*

102. Une pendule qui avance de $a$ chaque jour a indiqué une durée $t$ entre deux observations ; on demande le véritable temps écoulé ? Supposons que $a$ soit exprimé en secondes ; représentons par A le nombre 86400″ des 24 heures : si l'avance A est donnée en minutes, A sera 1440′. On a cette proportion,

$$\text{Si } A + a \text{ équivaut à } A,\ t \text{ équivaut à } x = \frac{At}{A + a}.$$

Comme $a$ est ordinairement d'un petit nombre de secondes, on peut développer $(A + a)^{-1}$, et se borner à la 1re puissance de $a$ ; d'où

$$x = t - \frac{at}{A} = t - 0{,}000011\ at.$$

Ainsi, quand la pendule avance de $a$ secondes en $24^h$, on obtient l'équivalent d'une durée de $t$ secondes indiquée par cette pendule, en retranchant de $t$ le nombre de secondes $= 0{,}000011.at$.

Quand la pendule retarde, on prend $a$ négatif, et la correction devient additive.

Par exemple, une montre a 18″,5 de retard diurne, la correction est $0{,}0002035.t$ ; pour $t = 3^h\,52'\,48'',5$ de temps écoulé, on trouve, par le calcul (nos 17 et 19), qu'il faut ajouter 2″,6.

| 1er *Procédé.* | 2e *Procédé.* |
|---|---|
| 3h 52′ 48″,5 = 13968″,5 ........ | $t$........ 4.14515 |
| 0,0002035 ........ | ........ $\bar{4}$.30856 |
| 2,794 | 2″,85.... 0,45371 |
| 419 | |
| 70 | 3h52′48″5 |
| Correction = 2,843 | 3.52.51,4 = temps écoulé. |

103. Tout ceci est vrai, quelle que soit l'espèce de temps qui sert de règle, vrai, moyen ou sidéral. Si une pendule marque le temps moyen, et qu'on demande de réduire en temps sidéral une durée écoulée $t$, on regardera la pendule comme retardant sur les étoiles de $a = 3' 56'',555$ par jour (nº 73), et la méthode ci-dessus devient applicable.

Réciproquement, si la pendule est réglée sur le temps sidéral, on convertira $t$ en temps moyen, en supposant qu'elle avance de $a = 3' 55'',909$.

Mais il est préférable de se servir des tables I et II, comme on l'a fait p. 89.

*V.* nº 165 ce qui sera exposé sur la manière de consulter les montres et autres instrumens d'horlogerie, et d'en tirer des indications exactes.

104. *Trouver l'asc. dr. du Soleil moyen à un instant donné.* L'équ. (5) du nº 32 revient à celle-ci,

*Asc. dr.* ☉ *moyen = asc. dr.* ☉ *vr. — équ. du temps.*

Or, on a vu, nº 25, que la *Conn. des Tems* donne l'asc. dr. ☉ vrai, qui est le compl. à $24^h$ de la distance ☉♈; et quant au dernier terme de l'équation, il est donné sous le titre de *temps moyen à midi vrai,* en se ressouvenant que lorsque le Soleil vrai avance sur le moyen (alors ce nombre est entre $11^h$ et $12^h$), le résultat doit être augmenté de $12^h$.

Par exemple, le 14 novembre 1830, on a ☉♈ $= 8^h 43' 10'',6$; d'où

| | | |
|---|---|---|
| Asc. dr. ☉ vrai.... | = | $15^h 16' 49'' 4$ |
| — Temps moyen à midi | = — | $11.44.35,2 + 12^h$ |
| Asc. dr. moyen ☉.. | = | $15.32.14,2.$ |

Mais il faut observer que l'heure pour laquelle ces nombres sont calculés est le midi vrai ou apparent; et si l'on demande l'asc. dr. ☉ moyen pour une autre heure du jour, ainsi que cela arrive ordinairement, il faut corriger le résultat de la marche du Soleil moyen pendant le temps écoulé depuis midi vrai jusqu'à l'heure proposée. Les asc. dr. des

deux Soleils vont toujours en croissant, et la table II donne la marche moyenne pour les heures écoulées.

On est dans l'usage de calculer l'asc. dr. moyenne pour midi moyen de chaque jour, afin d'en déduire plus commodément celle qui a lieu à une autre heure (n° 106). Reprenons notre exemple. Comme le Soleil vrai avance de 15′24″,8, le midi moyen arrive d'autant après le midi vrai, et l'asc. dr. moy. s'augmente, dans cette durée, de 2″,5 (*v.* table II), quantité qu'il faut ajouter ci-dessus. Le calcul prend donc cette forme :

| | |
|---|---|
| Asc. dr. ☉ vrai... = | 15h16′49″4 |
| — Équ. du temps... = — | 11.44.35,2 + 12 |
| Mouv. pour 15′25″ = + | 2,5 |
| Æ☉ moy. à midi moy. = | 15.32.16,7. |

Il faut remarquer que *quand le Soleil vrai avance, l'équation du temps est négative.* On aurait donc pu la supposer de — 15′24″,8, et, pour la soustraire, il aurait fallu l'ajouter à l'asc. dr. vraie; d'où l'on voit que *la correction pour le mouvement entre les midis vrai et moyen prend toujours le signe qu'a reçu l'équation du temps dans le calcul.* Voici la forme qu'on donne ordinairement à l'opération :

| | |
|---|---|
| Asc. dr. ☉ vrai... = | 15h16′49″4 |
| — Équ. du temps... = + | 15.24,8 |
| Corr. pour 15′25″ + | 2,5 |
| Comme ci-devant....... | 15.32.16,7. |

105. Mais le plus souvent ce n'est pas pour midi vrai ou moyen qu'on demande l'asc. dr. du Soleil moyen ; alors la correction qu'on tire de la table II doit être étendue à toute la durée qui s'écoule depuis midi vrai jusqu'à l'heure proposée.

On demande l'asc. dr. du Soleil moyen le 14 nov. 1830, à $4^h\,18'\,37''$ temps moyen à Paris. Comme midi moyen arrive, à cette époque, 15′ 24″,8 après midi vrai, et que l'heure proposée succède à celle-ci $4^h\,18'\,17''$ après, en ajoutant, on trouve que la correction doit être faite pour $4^h\,33'\,41'',8$ (on retrancherait si le Soleil vrai était en retard, parce que la

correction doit être faite pour la durée écoulée depuis midi vrai, et représenter la marche du Soleil moyen dans cet intervalle).

| | | |
|---|---|---|
| Asc. dr. ☉ vrai........ | = | 15h 16′ 49″ 4 |
| — Temps moyen à midi.. | = — | 11.44.35,2 + 12h |
| Table II, corr. pour 4h 33′ 42″. | = + | 45,0 |
| Asc. dr. ☉ moyen.... | = | 15.32.59,2. |

Au reste, lorsqu'on a calculé une table des asc. dr. du Soleil moyen pour tous les midis moyens successifs, ainsi qu'on va le dire, la correction est bien facile à faire par la table II, qui donne la marche du Soleil moyen, pendant le temps écoulé depuis midi moyen jusqu'à l'heure proposée.

Il est utile de composer une table donnant *l'heure sidérale du passage au méridien de Paris du centre du Soleil moyen*, ou des *asc. dr.* (*) *du Soleil moyen, pour le midi moyen de chacun des jours de l'année*. Voici comment il convient de s'y prendre.

Calculez, par la règle du n° 104, les asc. dr. du Soleil moyen de dix en dix jours; et pour obtenir celles des jours intermédiaires, ajoutez à la première la quantité 3′ 56″,56 neuf fois successives; ce nombre est la marche constante du Soleil moyen en un jour (n° 73). On pourrait même pousser ces additions au-delà de dix jours; mais la nutation luni-solaire changeant quelque peu la position du point vernal ♈, ori-

(*) Les Éphémérides de M. Enke et de M. Schumacher donnent cette table. Le Bureau des Longitudes de France, en suivant cet exemple, épargnerait aux astronomes les calculs ci-dessus indiqués. Il serait bon que les évaluations fussent poussées aux centièmes de seconde, pour la précision des opérations.

On trouve, il est vrai, à la cinquième page de la *Conn. des Tems*, l'asc. dr. du Soleil moyen pour le 1er jour de cinq des mois de l'année, ce qui peut suffire pour composer, par interpolation, la table que nous réclamons ici; mais les petits changemens dus à la nutation ne permettent pas de supposer la marche du Soleil moyen absolument constante entre des limites aussi écartées, du moins si l'on demande la précision des centièmes de seconde. Il importerait donc d'épargner aux astronomes et aux navigateurs les embarras de ces opérations numériques.

gine des asc. dr., on négligerait ce déplacement par l'addition du nombre constant 3′ 56″,56, et l'on commettrait une légère erreur : or cette erreur, en s'accumulant, deviendrait sensible, et le résultat serait un peu défectueux.

Mais lorsqu'on calcule par le procédé du nº 104 l'asc. dr. de 10 en 10 jours, attendu que la *Conn. des Tems* tient compte de la nutation, les résultats sont exacts, et il est permis, pour les neuf jours intermédiaires, d'y considérer l'asc. dr. comme s'accroissant constamment de 3′ 56″,56.

Il y a plus, on doit préférer à ce dernier nombre le neuvième de la différence entre les deux asc. droites extrêmes à dix jours d'intervalle. Ainsi, dans l'exemple suivant, les asc.

| | | |
|---|---|---|
| dr. du Soleil moyen, en août 1830, sont | le 1... | 8h 38′ 18″5 |
| | le 10.. | 9. 13.47,6 |
| | dont la différ. est.... | 35.29,1. |

Le neuvième est 3′ 56″,57, nombre qu'il faut ajouter neuf fois consécutives, en partant de l'asc. dr. du 1er août. On néglige ensuite les centièmes de seconde, parce que les asc. dr. de la *Conn. des Tems* ne sont approchées qu'aux dixièmes.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1er août 1830, Æ☉ vr. = | 8h44′ 20″5 | 10 août.. = | | 9h18′ 55″0 |
| — Temps moyen à midi = — | 6. 1,0 | ............... | — | 5. 6,6 |
| Corr. pour 6′ 1″..... — | 1,0 | pour 5′ 6″. | — | 0,8 |
| Asc. dr. moy. le 1er. = | 8.38.18,5 | le 10..... = | | 9.13.47,6 |
| | | le 1er.... = | | 8.38.18,5 |
| | | Mouvement en 9 jours = | | 35.29,1 |
| | | en 1 jour = | | 3.56,57 |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Æ☉ moy. le 1er août | = | 8h38′ 18″5 | le 10 août = | 9h13′ 47″6 |
| le 2 | = | 42.15,1 | le 11 = | 17.44,2 |
| le 3 | = | 46.11,6 | le 12 = | 21.40,8 |
| le 4 | = | 50. 8,2 | le 13 = | 25.37,3 |
| le 5 | = | 54. 4,8 | le 14 = | 29.33,9 |
| le 6 | = | 58. 1,4 | etc. | |
| le 7 | = | 9. 1.57,9. | | |
| le 8 | = | 5.54,5 | | |
| le 9 | = | 9.51,1 | | |
| le 10 | = | 13.47,6. | | |

106. Comme l'ascension droite moyenne du Soleil est très souvent employée dans les calculs astronomiques, nous avons cru devoir donner des moyens directs de la trouver, sans le secours de la *Conn. des Tems*, et même avec plus de précision que cet ouvrage n'en comporte. Cette asc. dr. se trouve dans la table III, en ajontant à chaque nombre la correction indiquée dans la dernière colonne, près de l'année proposée : il faut ensuite ajouter la nutation lunaire qu'on trouve table IV; quant à la nutation solaire, elle est introduite dans la table III, et il ne faut pas s'en occuper.

On lit dans la 1re colonne de la table III l'asc. dr. du Soleil moyen de cinq en cinq jours, et l'argument N de nutation lunaire pour chaque date. Si la date proposée ne s'y trouve pas, il faut ajouter le mouvement pour le nombre de jours au-delà de celle qu'on y prend : ce mouvement, à raison de 3′ 56″,5553 est donné au bas de la dernière colonne de la table, pour 1, 2, 3, 4, 5, 6 jours.

On ajoute ensuite la correction constante pour toute l'année, qui est donnée dans la dernière colonne, près de l'année proposée. On y prend aussi l'argument N.

Enfin on ajoute, *avec son signe*, la nutation lunaire donnée dans la table IV, près de la constante N.

Il faut, dans les années bissextiles, se conformer à la règle prescrite au bas de la table III.

Nous exposerons plus tard (n° 329) la loi de formation des tables III et IV.

Prenons pour exemple le 17 avril 1830; cherchons l'asc. dr. du Soleil moyen à midi moyen de Paris.

| | | | |
|---|---|---|---|
| T. III, 15 avril | | 1h31′ 58″,25 | N = 15 |
| 2 jours | + | 7.53,11 | |
| Correction pour 1830 | + | 33,03 | + 519 |
| Nutation, table IV, pour N = 534 | — | 0,22 | |
| Asc. dr. demandée | = | 1.40.24,17 | 534. |

De même, pour le 9 septembre 1831, voici le calcul :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| T. III, 10 septembre | | $11^h15'28''54$ | N = | 37 |
| — 1 jour | — | 3.56,56 | | |
| Corr. pour 1831 | — | 24,27 | + | 573 |
| Nutation, t. IV, pour N = 610 | — | 0,66 | | |
| Asc. dr. ⊙ moy. le 9 septembre = | | 11.11. 7,05 | | 610. |

Dans la table III, on a indiqué les dates *zéro* à chaque mois, qui désignent le dernier jour du mois précédent, pour qu'il soit plus facile de trouver combien de jours suivent cette date jusqu'à la proposée.

Pour avoir l'asc. dr. moy. en temps sid. à une autre heure $t$ que midi moy., il faut encore ajouter le mouvement du Soleil moyen pendant le temps $t$, tel qu'on le donne table II.

107. Lorsqu'on a composé une table des asc. dr. du Soleil moyen pour un méridien donné, cette table servira pour tout autre lieu situé vers l'ouest, en ajoutant la marche de cet astre pendant un temps égal à la différence des deux méridiens : cette correction est donnée table II. On retranche au contraire cette marche, quand le lieu proposé est situé à l'est de celui pour lequel la table est construite. Ainsi, lorsqu'on a une table pour Paris, et qu'on veut l'employer à Brest, dont la longitude en temps est 25′ 18″ à l'ouest de Paris, on ajoutera à toutes les asc. dr. moyennes 4″,48, qui est la marche du Soleil moyen dans cette durée (table II). Pour Berlin, qui est à — 44′ 8″ de temps (à l'orient de Paris), on doit retrancher 7″,25, etc.

Par exemple, pour avoir l'asc. dr. du Soleil moy. le 9 septembre 1831 à midi moyen de Berlin, on a ci-dessus :

| | | |
|---|---|---|
| Asc. dr. ⊙ moy. à midi moy. de Paris | | $11^h11'\ 7''05$ |
| Correction pour Berlin | — | 7,25 |
| Asc. dr. demandée | | 11.10.59,80. |

Soit $t$ l'heure moy. d'un lieu dont la longitude est $l$, en temps, à l'ouest de Paris ; pour avoir l'asc. dr. moy. à cette heure $t$ et en ce lieu, il faut ajouter la correction qu'on trouve table II près de l'heure $t + l$ ; elle équivaut à $(t + l)$ $(3'\ 56'',5553)$.

On prend $l$ négatif pour les lieux dont la longitude est orientale (*).

108. Les astronomes se servent de trois sortes de temps, le sidéral, le moyen et le vrai ou apparent (v. n^os 8 et 31); les deux premiers sont seuls uniformes. On a perpétuellement besoin de traduire l'une quelconque de ces époques en les deux autres, ce qui donne lieu à six problèmes, dont trois sont réciproques de trois autres. Nous allons exposer les méthodes propres à opérer ces traductions.

*Étant donnée l'heure vraie, trouver l'heure moyenne, ou réciproquement.* Ces problèmes sont résolus par l'équ. (4) du n° 32, qui revient à

$$\textit{heure vraie} = \textit{heure moy.} - \textit{équ. du temps},$$
$$\textit{heure moy.} = \textit{heure vraie} + \textit{équ. du temps}.$$

Voyez ce qu'on a dit à ce sujet n° 37.

| | |
|---|---|
| Le 18 octobre 1830 au matin, la pendule de temps moyen marque | $4^h 12' 41'' 4$ |
| Or, elle retarde sur le méridien du lieu, de | 3.28.11,2 |
| Donc l'heure moyenne du lieu est | 7.40.52,6 |
| — Équ. du temps, ou temps moy. à midi vrai | + 14.44,8 |
| Heure vraie du lieu | 7.55.37,4. |

Observez que l'équ. du temps doit être calculée pour l'heure vraie qui est inconnue; mais on l'évalue d'abord pour l'heure moyenne $7^h 41'$ (n° 37); après quoi on corrige le résultat, qui est très approché de l'heure vraie cherchée. (*V.* p. 153.)

109. *Étant donnée l'heure solaire vraie ou moyenne, trouver l'heure sidérale.* FEAE' (fig. 17) est l'équateur céleste, au centre C duquel est censé se trouver l'observateur; F est le point vernal ♈, CA le méridien, A le point de l'équateur

(*) Cette correction de lieu et d'heure a pour valeur (*v.* n° 73)

$$0,0027379(t+l).$$

La durée $t+l$ est exprimée en secondes de temps, ou en minutes, ou même en heures, et le produit est rapporté à la même unité.

qui est actuellement dans ce plan; l'arc FA, en temps, est l'heure sidérale, ou le temps sidéral qui s'est écoulé depuis que le point ♈ a traversé le méridien, par son mouvement diurne d'est à l'ouest. Abaissons du Soleil vrai ou moyen un arc perpendiculaire à l'équateur; cet arc coupera le cercle EAE′ en E ou en E′, selon qu'on est le soir ou le matin.

1°. L'arc AE en temps est visiblement l'heure vraie ou moyenne actuelle, puisque cet arc mesure la distance du Soleil vrai ou moyen au méridien, ou la durée qui s'est écoulée pour décrire cet arc, depuis le passage par ce plan.

2°. L'arc AE′ est la distance qui reste au Soleil vrai ou moyen à parcourir pour arriver au méridien; $24^h$ — AE′ est donc l'heure actuelle. FE ou FE′ est l'asc. dr. du Soleil vrai ou moyen, et AF = EF + AE, ou = E′F — AE′.

Ainsi, dans le 1er cas,

$$\textit{heure sidér.} = \textit{heure sol.} + Æ☉ \ (\text{ou} - ☉♈); \quad (1)$$

et dans le 2e,

$$\text{heure sidér.} = Æ☉ - 24^h + \text{heure solaire}.$$

Or, cette équ. équivaut à la précédente, en ôtant $24^h$; et comme il est toujours permis d'ajouter ou de retrancher $24^h$, l'équ. (1) est propre aux deux cas.

Voici des applications de cette théorie.

I. Le 11 mai 1830, l'heure vraie est.............. $7^h\ 2'.\ 2''1$
Quelle est l'heure sidérale? On a — ☉♈ = — 20.48.51,6

Ajoutez $24^h$ pour faire la soustraction.......... 10.13.10,5
Correction... + 1.8,7
Heure sid.... 10.14.19,2.

3′54″5 (V. n° 17.)
3.54,5
1.57,2 $7^h,634 = 7^h\ 2'\ 2'',1$
9″46,2 = 9″,77 par heure.

63,306
4,924
492
68,722, ou correction = 1′8″,7.

Comme l'arc $\odot\Upsilon$ a été employé pour midi vrai, et qu'il faut le prendre pour $7^h,034$, on cherche la variation diurne $-9'',77$ qu'on multiplie par $7^h,034$. $\odot\Upsilon$ va en diminuant ; ainsi on a trop retranché, et il faut ajouter le produit ; la correction est $+1'\,8'',7$.

II. Le 5 juin 1830, l'heure moy. est .......... $7^h\ 2'\ 2''12$

Trouver l'heure sid. ? On a

| | | | |
|---|---|---|---|
| Æ$\odot$ vr.... = | $4^h51'36''3$ | | Æ$\odot$ moy. = 4.54.44,30 |
| — Équ. temps. = + | 1.58,3 | pour midi vr. | Heure sid.. = 11.56.46,42 |
| Pour $7^h\,4'$.. + | 1. 9,7 | (*V.* table II.) | |
| Æ$\odot$ moy.. = | 4.54.44,3 | (*V.* n° 105.) | |

Puisqu'il est $7^h\,2'\,2''$ de temps moyen, et que le Soleil vrai avance de $1'58''$, on voit qu'il y a réellement $7^h\,4'$ écoulées depuis que le Soleil moyen a traversé le méridien : la correction doit donc être faite pour $7^h\,4'$.

III. Le 15 août 1830 au matin, à $10^h\,22'\,13'',4$ de temps moyen, c'est-à-dire le 14, à $22^h\,22'\,13'',4$ ; on demande quelle est l'heure sidérale ?

| | | | |
|---|---|---|---|
| Table III, 10 août.......... | | $9^h13'15''4$ | N = 33 |
| 4 jours.......... | | 15.46,2 | 519 |
| 1830.......... | + | 33,0 | 552 |
| Table IV, N = 552 .......... | — | 0,3 | |
| Asc. dr. $\odot$ moy.......... | | 9.29.34,3 | à midi moyen. |
| Heure donnée.......... | | 22.22.13,4 | |
| Pour $22^h$, t. II.......... | | 3.36,8 | |
| Pour 21′ 13″.......... | | 3,5 | |
| Heure sid. demandée.......... | = | 7.55.28,0. | |

Nous calculons ici l'asc. dr. du Soleil moyen pour midi moy. d'après ce qu'on a dit n° 106 ; la correction se fait ensuite par la table II pour $22^h\,22'\,13''$, qui est le temps écoulé depuis midi moyen.

110. *Étant donnée l'heure sidérale, trouver l'heure moyenne.* L'équ. (1) donne

$$\textit{heure sol. moy.} = \textit{heure sidér.} - \text{Æ}\odot\ \textit{moy.} \qquad (2)$$

On rencontre une difficulté, lorsqu'on veut appliquer cette

équ.; car Æ⊙ moy. doit être prise pour l'heure moy. qui est précisément l'inconnue du problème. Soit $x$ cette heure moyenne; en employant l'asc. dr. du Soleil moyen pour midi moyen, on obtient d'abord une heure approchée H; et comme il faut en ôter le mouvement du Soleil moyen en asc. dr. pendant la durée inconnue $x$ qui s'est écoulée depuis midi, on a (*v.* note p. 50)

$$x = \mathrm{H} - 0^h,0027379 . x,$$

d'où $$x = \frac{\mathrm{H}}{1,0027379} = 0,9972696 \, \mathrm{H}.$$

Mais ce coefficient de H est précisément le facteur qui sert à traduire une durée sidér. en temps moyen (*v.* n° 73) : d'où l'on voit que pour trouver l'heure moy. $x$, il suffit de corriger le résultat H obtenu pour midi, comme si l'on voulait traduire une durée sidér. en temps moy., et par conséquent il faut retrancher de H l'accélération des fixes en temps moyen pour cette durée H, en la tirant de la table I.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Le 20 juillet 1830, l'heure sid. est................ | | = | $16^h16'\ 0''5$ |
| Æ⊙ vrai..... = | $7^h56'57''7$ | — Æ⊙ moy. = — | 7.50.59,8 |
| — Équ. du temps. = — | 5.56,9 | H = | 8.25. 0,7 |
| Mouv. p. 5′ 57″. — | 1,0 | Table I, $8^h25'$ — | 1.22,7 |
| Æ⊙ moy.... = | 7.50.59,8 à midi moy. | | 8.23.38,0. |

Ainsi, $8^h 23' 38''$ t. moy. reviennent à $16^h 16' 0'',5$ t. sid.

| | | |
|---|---|---|
| Le 14 novembre 1830, la pendule sidér., corrigée de son avance donne...................................... | | $1^h15'\ 6''4$ |
| Æ moy. à midi moy. (n° 104)...... | — | 15.32.16,7 |
| Ajoutez $24^h$ pour faire la soustraction.............. H | = | 9.42.49,7 |
| Accél. des fixes (t. I) pour $9^h$......................... | — | 1.28,5 |
| pour 42′ 50″......................... | — | 7,0 |
| Donc l'heure moy. correspondante est,.............. | | 9.41.14,2. |

Les pendules des observatoires sont souvent réglées sur le temps sidéral : le calcul qu'on vient d'exposer sert à voir si un chronomètre est juste avec le temps moyen. Dans le dernier

exemple, si la montre indique $9^h\,42'$, lorsque la pendule sidérale corrigée marque $1^h\,15'\,6'',4$, on en conclut que le chronomètre avance de $45'',8$ sur le temps moyen. (*V.* p. 166.)

111. *Etant donnée l'heure sidérale, trouver l'heure vraie.* On cherche d'abord l'heure moy., qu'on traduit ensuite en heure vraie (n°. 108). (*V.* l'exemple donné n° 115.)

On peut encore écrire ainsi l'équ. (1),

*heure sol. vr.* = *heure sid.* — Æ☉ vr. (ou + ☉♈). (3)

On se servira d'abord de Æ☉ ou ☉♈ pour midi vrai, ce qui donnera une première approximation, qu'on corrigera de nouveau, ainsi qu'on le voit dans l'exemple suivant.

On y remarque qu'on aurait dû ajouter ☉♈ pour l'heure vraie cherchée, et qu'en prenant cet arc pour midi vrai, on a trouvé $8^h\,20'$ à peu près : or comme la marche diurne en asc. dr. est $4'\,0'',2$, ce qui fait par heure $10'',008$, on trouve $1'\,23'',4$ pour le mouvement du ☉ en $8^h\,20'$ ; on retranche cette correction, parce que l'arc ☉♈ décroît. On ne trouve plus pour résultat que $8^h\,17'\,40''$ environ ; en sorte qu'on a pris pour $2'\,20''$ de trop, en corrigeant pour $8^h\,20'$. Il faut donc corriger de nouveau pour le mouvement du Soleil pendant cette durée de $2'\,20''$ ; on trouve qu'on doit ajouter $0'',39$.

| | | |
|---|---|---|
| Le 20 juillet 1830, on a l'heure sidér. .................... | | $16^h\,16'\,0''5$ |
| ☉♈ à midi vrai .................................. | + | 16. 3. 2,3 |
| Somme — $24^h$, 1re approximation .................. | | 8.19. 2,8 |
| ☉♈ diminue de $10'',008$ par heure ; pour $8^h\,20'$ .. | — | 1.23,4 |
| 2e approximation .................. | | 8.17.39,4 |
| Corr. pour $2'\,20''$ .................. | + | 0,4 |
| Heure vraie correspondante ....... | | 8.17.39,8. |

112. L'équ. (3), où — Æ☉ est remplacée par + ☉♈, montre la raison pour laquelle on a préféré donner ce dernier arc dans la *Conn. des Tems*, plutôt que l'autre. Mais si l'on regarde l'addition de ☉♈ comme plus facile à faire que la soustraction de Æ☉, cet avantage est perdu dans d'autres questions (n° 109). Cette observation justifie ce que nous avons

dit p. 41, du peu d'utilité qu'on trouve à préférer la distance ⊙♈ à l'asc. dr. de l'astre.

Cependant, il faut dire que la conversion du temps sidéral en temps moyen est plus fréquente que l'inverse, ainsi qu'on la rencontre lorsqu'on demande l'heure moyenne du passage d'une étoile au méridien (n° 114), ou l'avance d'une montre réglée sur le temps moyen, en la comparant à la pendule sidérale (n° 110), qui d'ordinaire est employée dans les observatoires ; mais même, dans ces cas, on doit préférer la *table des asc. dr. du Soleil moyen* pour chaque jour à midi moyen, ainsi qu'on l'a dit n° 105.

Au reste, consultez à ce sujet le n° 122.

113. Quand on veut faire ces calculs pour un méridien autre que celui de Paris, pour lequel la *Conn. des Tems* est construite, il ne faut pas oublier d'avoir égard à la différence des méridiens. Par exemple, les tables de M. Schumacher sont faites pour un lieu dont la longitude est de 30′ 26″ de temps à l'est de Paris (l'observatoire d'Altona et celui de Gottingen) : comme, dans cette durée, le Soleil moyen parcourt un arc de 5″,0 de temps, il s'ensuit qu'il faut ajouter 5″,0 à toutes les asc. dr. moyennes de ces tables, pour avoir celles du Soleil moyen à midi moyen de Paris.

De même, si l'on calcule une table d'asc. dr. moy. pour Paris, et qu'on la veuille employer à Berlin qui est à 44′ 8″ de temps à l'est du méridien de Paris, il faudra retrancher de chaque nombre de cette table 7″,25, qui est la marche du Soleil moyen pendant 44′ 8″.

### *Sur la lunette méridienne et les observations de passages au méridien.*

114. *Trouver l'heure solaire vraie ou moyenne du passage d'une étoile au méridien.* L'heure sidérale de ce passage est égale à l'asc. dr. en temps de l'étoile, en sorte que lorsqu'elle entre au méridien, il est l'heure sidérale indiquée par cette asc. dr. Ainsi, l'équ. (2 ou 3) revient à celle-ci,

*heure sol. pass.* ⋆ *au méridien* = Æ⋆ — Æ☉. (4)

Il faut donc corriger l'asc. dr. moyenne de cet astre de la précession, de la nutation et de l'aberration, pour en avoir la valeur actuelle (nos 74 et 75); on introduit ensuite cette valeur d'arc apparent dans l'équ. précédente, ainsi que l'asc. dr. actuelle du Soleil moyen, pour l'instant du passage, si l'on demande l'heure moyenne, ou l'asc. dr. Soleil vrai si l'on veut l'heure vraie. Le calcul de cet arc en temps se fait comme on l'a dit nos 106 et 110.

On demande l'heure moyenne du passage d'Antarès au méridien de Paris le 20 août 1830; on a

| | | |
|---|---|---|
| Asc. dr. apparente d'Antarès....... | = | 16h19′ 2″79 |
| — Asc. dr. moyenne à midi moyen... | = — | 9.53.13,61 |
| Heure approchée.............. H | = | 6.25.49,18 |
| Corr. pour 6h 25′ 49″ (V. no 105)... | — | 1. 3,21 |
| Heure moyenne du passage....... | = | 6.24.45,97. |

On doit introduire dans ce calcul l'asc. dr. moy. pour le midi du lieu où l'on est, ou faire porter la correction sur l'intervalle écoulé depuis midi moy. de Paris, jusqu'à l'heure contemporaine à H, si l'on a employé l'asc. dr. à midi moy. de cette ville. (V. no 117.)

115. On ferait le même calcul pour obtenir l'heure solaire vraie; seulement la variation diurne d'asc. dr. n'étant plus constante, on calculerait la correction depuis midi vrai, ainsi qu'on l'a dit no 29. Mais il est plus court de chercher d'abord l'heure moyenne comme ci-dessus, et de la convertir en heure vraie.

| | | |
|---|---|---|
| Ainsi, on a obtenu..... Heure moy...... | = | 6h24′45″79 |
| — Équ. du temps pour 6h 22′ ........ | = — | 3.10,30 |
| Heure solaire vraie du passage...., | = | 6.21.35,49. |

116. Nous avons supposé jusqu'ici que le lieu pour lequel on fait ces calculs est situé sous le méridien de Paris; mais s'il en est autrement, voici ce qu'il faudra faire.

1°. Lorsqu'il s'agit de l'heure sidérale du passage d'une étoile au méridien, elle est la même dans tous les pays, et égale à l'asc. dr. apparente de l'astre, laquelle ne varie pas sensiblement en un jour. Le même nombre désigne, comme on voit, des instans physiques très différens. Par exemple, le 20 août 1830, Antarès passe aux méridiens de tous les peuples de la Terre à l'instant où chacun d'eux compte $16^h\ 19'\ 2'',33$ de temps sid.; Arcturus passe à $14^h\ 7'\ 55'',19$ le 11 août, etc. La raison en est qu'on fait commencer le jour sid. de chaque observatoire, ou qu'on y a 0 heure, à l'instant où le point vernal ♈ traverse son méridien, et que la durée des heures sidérales est la même partout, l'époque qui en est l'origine étant seule différente pour chacun.

117. 2°. Quand il est question de l'heure solaire, les choses se passent autrement. Comme les données d'où l'on tire cette heure sont calculées pour midi vrai ou moyen à Paris, et que l'asc. dr. vraie et moy. du Soleil varie avec les méridiens, il ne faut pas oublier de compter les heures à partir de celle qui est contemporaine au midi de Paris, instant qui est donné par la longitude en temps, en prenant négative toute longitude orientale.

Par exemple, on demande l'heure moy. du passage d'Antarès au méridien de Berlin, le 20 août 1830. L'heure sidérale de ce passage est l'asc. dr. apparente de l'étoile, ou $16^h\ 19'\ 2'',33$; il s'agit donc de trouver l'heure moy. de Berlin à cet instant. Comme la longitude de cette ville est $-44'\ 8''$ de temps, on y compte $+44'\ 8''$ de temps moyen, lorsqu'il est $0^h$ ou midi moy, à Paris. La *Connaissance des Tems* donne l'asc. dr. moy. pour le midi, ou pour $0^h\ 44'\ 8''$ à Berlin.

On a obtenu, n° 114, pour l'heure moy. approchée. $H = 6^h 25'\ 49''18$
Et la correction doit porter sur ce nombre $-0^h\ 44'\ 8''$,
ou $5^h\ 41'\ 41''$ (table I)............................ $-$ 55,98

Heure moy. du passage d'Antarès à Berlin............ $= 6.24.53,20.$

Le 20 août 1830, quelle est l'heure moy. du passage d'Antarès au méridien de New-Yorck (longit. $= +5^h\ 5'\ 15''$)? On a, comme ci-dessus

H = $6^h 25' 49'' 18$

Ajoutant $5^h 5' 15''$, la correct. doit être faite pour $11^h 31' 4''$ (table H) .......................... — 1.53,22

Heure moy. du passage d'Antarès à New-Yorck. ... = 6.23.55,96.

118. Pour calculer l'heure du *passage d'une planète au méridien*, soient Æ P son asc. dr., et Æ ☉ celle du Soleil, en temps, à midi, $p$ et $s$ leurs variations diurnes. Quand la planète sera au méridien, à l'heure $t$, le Soleil sera, vers l'ouest, sur un cercle horaire faisant l'angle $t$ avec le méridien. Les deux asc. dr. seront alors devenues, savoir :

$$\text{Pour la planète} \ldots\ldots\ \text{Æ P} + \frac{tp}{24},$$

$$\text{Pour le Soleil} \ldots\ldots\ \text{Æ}\odot + \frac{ts}{24}.$$

La différence de ces arcs est l'angle horaire $t$ : d'où

$$t = \text{Æ P} - \text{Æ}\odot + \frac{t(p-s)}{24};$$

ainsi l'on trouve pour l'heure $t$ du passage

$$t = \frac{\text{Æ} - \text{Æ}\odot}{24^h + s - p} \times 24^h. \qquad (5)$$

Ce sera l'heure vraie ou moyenne, selon que Æ ☉ sera l'asc. dr. du Soleil vr. ou moy., à midi vrai ou moy., et que $s$ sera sa marche diurne, variable ou constante ($s = 3' 56'',56$).

Observez que $p$ est négatif dans les rétrogradations, et nul dans les stations : si l'on prend $p = 0$, on retombe sur la formule (4) qui convient aux étoiles.

Pour avoir l'heure vraie du passage de Mercure au méridien de Paris le 16 juin 1830, on prendra dans la *Conn. des Tems* son asc. dr. et celle du Soleil à midi, et leurs variations diurnes : cette dernière est de $-7'$ en 3 jours pour Mercure, d'où $p = -2' 20''$ ; la planète est rétrograde. Ainsi,

| | | |
|---|---|---|
| Asc. dr. ☿ à midi vr. ........ = 5ʰ33′ 0″0 .... | $p$ = − 2′20″. | |
| Dist. ☉♈ ............... = 18.22.52,8 | $s$ = + 4′ 9,5 | |
| 4.9352695 ....... Numérat. = 23.55.52,8 | $s-p$ = | 6.29,5. |
| 4.9365137 ....... 24ʰ | | |
| − 4.9384673 ....... 24ʰ 6′29″,5 dénom. | | |
| 4.9333159 .... $t$ = 23.49.26. | | |

On trouve 23ʰ 50′ dans la *Conn. des Tems*, où l'on ne tient pas compte des secondes.

119. L'équ. (5) peut s'appliquer de même au passage de la Lune au méridien de Paris; mais comme la marche de cet astre en asc. dr. est donnée en arc, et de 12ʰ en 12ʰ, il faut y faire quelques préparations.

On retranche deux asc. dr. successives; la différ. est l'arc décrit en 12 heures vr.; il faudrait ensuite multiplier par 4 pour réduire en temps (nº 72), puis par 2 pour avoir la marche en 24ʰ; il faut donc multiplier par 8 la diff. des arcs d'asc. dr. successives, et changer les degrés en minutes, etc.... pour former le nombre $p$, marche de la Lune en 24ʰ, en asc. dr. et en temps.

Quelle est l'heure vraie du passage de la Lune au méridien de Paris le 27 août 1830?

| | | |
|---|---|---|
| Le 27 à midi, Æ☾ = 253° 5′18″ | | 24ʰ |
| à minuit. ... = 259.28.56 | $s$ = | 3′39″3 |
| Différence... = 6.23.38 .... 8 fois ...... | $p$ = | 51. 9.4‴ |
| Æ☾ en temps.... = 16ʰ52′21″2 | Dénom. ... | 23.12.30,2 |
| ☉♈ à midi vrai... = 13.37.44,6 | 24ʰ. ...... | 4.9365137 |
| Numérat. .. = 6.30. 5,8 ................ | | 4.3693235 |
| | Dénom.. − | 4.9219477 |
| $t$ = 6.43.24,1 ....... $t$ .......... | | 4.3838895. |

120. Ce calcul ne donne que l'heure approchée du passage de la Lune au méridien, parce qu'on y suppose que la marche de l'astre en asc. dr. est uniforme pendant les 12 heures d'intervalle, ce qui n'est pas exacte. Mais ayant égard aux différ. secondes (nº 81), on calculera l'asc. dr. de la Lune pour l'heure

vraie $t$ ainsi obtenue, et ensuite on cherchera l'heure vr. du passage au méridien d'une étoile qui aurait cette asc. dr. (n° 114). Si cette dernière est juste $= t$, il n'y a pas d'erreur dans la supposition. Mais le plus souvent on trouvera que cette heure vr. du passage est $= t + \alpha$; alors il faut refaire l'opération pour l'heure $t + \alpha$, et ensuite voir si l'asc. dr. de la Lune à ce moment donne exactement $t + \alpha$ pour l'heure du passage.

En un mot, on corrige successivement les hypothèses, jusqu'à ce que l'asc. dr. ☾ à laquelle on est conduit, donne la même heure de passage que pour l'étoile qui aurait cette asc. dr. Alors la supposition est sans aucune erreur, puisque cette étoile passe en effet au méridien à l'heure supposée.

Reprenons l'exemple du 27 août 1830 :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Æ ☾ le 26 à minuit | = 246° 48′ 37″ | | |
| le 27 à midi | = 253. 5.18 | 6° 16′ 41″ | |
| le 27 à minuit | = 259.28.56 | 6.23.38 = Δ′ | + 6′ 57″ |
| le 28 à midi | = 265.59.28 | 6.30.32 | + 6.54 |
| | | Quart de la somme = | 3.27,75 |
| | | B = | + 20775. |

On a déjà trouvé $t = 6^h\,43'\,24''$, instant pour lequel nous allons calculer l'asc. dr. ☾, en tenant compte des diff. secondes. On a

$$A = \Delta' - B = 6^\circ\,20'\,10'',25, \qquad B = +\,207'',75$$

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| c. 12ʰ..... | $\bar{5}$.3645163 | carré.......... | | $\overline{10}$.72903 |
| t......... | 4.3838871 | | t²........ | 8.76777 |
| A......... | 4.3581301 | 1′ 5″21 | B......... | 2.31754 |
| | 4.1065335.... | 3°33. 0,07 | | 1.81434 |
| Corr. pour 6ʰ 43′ 24″... | | 3.34. 5,28 | | 65″,21 = 1′ 5″,21 |
| Æ ☾ le 27 à midi vr. = | | 253. 5.18,00 | | |
| Æ ☾ à 6ʰ 43′ 24″....= | | 256.39.23,28 | en temps = | 17ʰ 6′ 37″55 |
| — Asc. dr. ⊙ moy. à midi moy. (nᵒˢ 110 et 104)....= | | | | —10.20.49,03 |
| | | | H = | 6.45.48,52 |
| (Table I) | Corr. p. 6ʰ 45′ 48″........= | | | — 1. 6,48 |
| | H. moy. du passage........= | | | 6.44.42,04 |
| | Équ. du temps (n° 108)...= | | | — 1.21,22 |
| | H. vr. du passage.........= | | | 6.43.20,82. |

On trouve donc 3″,2 de moins que la supposition, et il faut la reproduire en diminuant de cette même quantité, c'est-à-dire qu'il faut supposer $t = 6^h\ 43'\ 20'',8$, et recommencer l'opération. On voit bien, en effet, qu'en 3″,2, l'asc. dr. de la Lune ne change pas sensiblement, en sorte que la fin de nos calculs n'en sera pas altérée; le résultat obtenu demeurera donc le même pour cette nouvelle hypothèse que pour la première, ce qui conduira à une valeur conforme à la supposition faite. Ainsi l'on trouve que l'heure vraie du passage de la Lune au méridien de Paris, le 27 août 1830, est $6^h\ 43'\ 20'',8$.

Voici encore un autre exemple pour le 24 juin 1828 :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Æ ☾ le 23 à minuit | = 220°53′26 | | |
| le 24 à midi | = 227.53.40 | 7° 0′14″ | |
| le 24 à minuit | = 235. 6.24 | 7.12.44 = Δ′ | + 12′30″ |
| le 25 à midi | = 242.31. 7 | 7.24.43 | + 11.59 |
| | | Quart de la somme = | 6. 7,25 |
| | | B = | 367,25. |

| | | |
|---|---|---|
| Or, on a Δ′ = 7° 12′44″ | | |
| 8 fois... $p$ = — 57′41″87 | 24ʰ... 4.9365137 | |
| $24^h + s$ = 24ʰ 4. 9,2 | Num.. 4.5098663 | ⊙♈ = 17ʰ47′34″7 |
| Dénom.. = 23ʰ 6.27,33....... | — 4.9200573 | Æ = 15.11.34,7 |
| $t$ = 9.19.58,7 ....... | 4.5263227 | Num. = 8.59. 9,4. |

Maintenant, calculons l'asc. dr. ☾ pour $t = 9^h\ 20'$ temps vr., en tenant compte des différ. secondes (nº 81). Il vient pour valeur corrigée de Δ′ A = 7° 6′ 36″,75 ; d'où résulte une marche en asc. dr. de 5°35′ 31″0

| | |
|---|---|
| Æ ☾ le 24 à midi vrai........ = | 227.53.40,0 |
| à 9ʰ 20′.......... = | 233.29.11,0 |
| en temps.......... = | 15ʰ33.56,74 |
| Æ ⊙ moy.................... = — | 6.16.25,00 |
| H = | 9.23.31,74 |
| Corr. pour 9ʰ 23′ 32″, T. I.... = — | 1.32,33 |
| Heure moy. du passage....... = | 9.21.59,41 |
| — Équ. du temps (nº 108)....... = — | 2. 4,70 |
| Heure vraie du passage....... = | 9.19.54,71. |

Il s'en faut de — 5″,3 qu'on ne retrouve l'heure supposée $t$, ainsi que cela serait nécessaire pour que celle-ci fût exacte : il

est évident que si l'on recommençait le calcul en prenant $t = 9^h\ 19'\ 54'',5$, comme on retomberait sur cette même heure vr. pour résultat, on est certain qu'elle est précisément celle du passage de la Lune au méridien de Paris, le 24 juin 1828. Pour obtenir l'heure du passage sous un autre méridien, *voy.* n° 43.

121. Voici comment on fait les observations de passages au méridien. La lunette porte à son foyer un réticule armé de 3 ou 5 fils verticaux équidistans; celui du milieu est dans le plan du méridien. Il suffit, à la rigueur, d'observer le moment où ce fil du milieu paraît couper l'astre; mais pour éviter les petites erreurs d'observation, on en fait autant pour chacun des fils, et l'on note les heures de ces passages: la moyenne entre ces heures est l'heure du passage, avec plus d'exactitude que si l'on n'eût observé qu'au fil du milieu, parce que la réitération des observations en atténue les erreurs. Les fils verticaux sont croisés par un fil horizontal, et pour se garantir des erreurs de parallélisme des fils, on fait en sorte que l'astre traverse la lunette près du fil horizontal.

On connaît d'avance l'heure vraie, moyenne et sidérale du passage, et en la comparant à celle de l'observation, on a l'erreur de la pendule. Bien entendu qu'il est nécessaire de traduire l'heure sid. en vraie ou moyenne lorsqu'on observe le Soleil, ou réciproquement lorsqu'il s'agit d'une étoile: enfin, il faut rapporter les durées à la même espèce de temps.

Les différences entre les heures consécutives obtenues sont les temps que l'astre a employés à passer d'un fil à l'autre; ces différences sont égales lorsque les fils sont équidistans, et c'est même le plus sûr moyen de les fixer comme il convient sur le réticule. Cependant, on remarque toujours quelques petites différences qui proviennent des défauts du pointé et du vice de construction. La moyenne est très sensiblement juste, surtout lorsque la mire est fixée par des observations exactes faites avec la lunette même. Du reste, les différences entre les heures des passages aux fils varient avec les astres, parce qu'elles dépendent de leur déclin. Soit $x$ le temps écoulé par une étoile

équatoriale pour traverser d'un fil O à l'autre O′ ( fig. 39), sur l'arc OO′ d'équateur compris dans leur intervalle; D la déclin. d'une autre étoile M; le temps $t$ que celle-ci emploiera à traverser MM′ résulte de $x = t \cos D$ : car les arcs semblables MM′, OO′ sont comme les rayons GM et CO ou CM, savoir, $\frac{MM'}{OO'} = \sin \phi = \cos D$, et les temps employés $x$ et $t$ sont inverses des arcs, puisque l'angle horaire P est le même.

Pour un réticule donné, on déterminera $x$ par l'observation du passage d'une étoile équatoriale, ou mieux encore en prenant $x = t \cos D$, après avoir observé une autre étoile dont la déclin. est D. Il est même plus exact de faire cette opération pour plusieurs étoiles, et de prendre pour $x$ la moyenne entre les valeurs obtenues. L'étoile polaire est propre à faire bien connaître $x$. Alors on connaît d'avance le temps $t$ que mettra une étoile à traverser d'un fil à l'autre, à l'aide d'une petite table construite sur la formule $x = t \cos D$; cela servira à vérifier l'exactitude des pointés, et surtout à tenir compte des passages qu'on n'aurait pu observer, soit par défaut d'attention, soit par la présence momentanée de quelque nuage.

Voici plusieurs exemples de calculs où l'on voit la manière de se conduire, selon que la pendule marque le temps vrai ou moyen, et selon que l'on observe le Soleil ou une étoile. La lunette ne porte ici que 3 fils.

Comme l'heure où l'astre passe au méridien est connue d'avance, et que la hauteur de cet astre est = colatitude du lieu ± déclin. (+ quand la déclin. est boréale, — quand elle est australe, v. p. 51), il est facile de se préparer à l'observation en dirigeant la lunette à la hauteur nécessaire pour que l'astre se présente dans le champ, et se rendant attentif une minute avant qu'elle y arrive. Il est clair qu'il n'est utile d'avoir la déclin. qu'à peu près; mais l'asc. dr. des étoiles doit être calculée avec un grand soin, en la corrigeant des précession, nutation et aberration (n° 74).

1[er] CAS. *La pendule indique le temps sidéral, et l'on a observé une étoile.*

Le 21 avril 1830, on a observé le passage méridien de Régulus à la pendule sidérale.

| | | |
|---|---|---|
| 1[er] fil........ | 9h58′28″0 | |
| 2[e]............. | 59.13,0 | 45″0 |
| 3[e]............. | 59.58,2 | 45,2 |
| | 39,2 | |

Heure de la pendule = 9.59.13,07 au passage.
Æ Régulus. ...... = 9.59.19,40 h. sid.
Retard sur le t. sid.. = — 6,33.

2[e] CAS. *La pendule indique le temps moyen, et l'on observe une étoile.*

A l'aide de l'asc. dr. de cet astre, qui est l'heure sid. de son passage au méridien, et de l'asc dr. du Soleil moyen (n° 104), on calcule l'heure moy. correspondante (n° 110). Comparant ensuite cette heure à celle que l'observation donne, la différ. est l'erreur de la pendule.

Le 21 juillet 1830, on a observé Antarès au méridien, à la pendule de temps moyen.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1[er] fil.............. | 8h25′47″5 | 48″3 | | |
| 2[e]................. | 26.35,8 | 48,0 | Æ★ = | 16h19′ 2″77 |
| 3[e]................. | 27.23,8 | | Æ⊙ m. = — | 7.50.59,80 |
| | 19.47,1 | | H = | 8.28. 2,97 |
| Heure moy. observée. | 8.26.35,7 | | Corr. p. 8h 28′ — | 1.23,23 |
| Heure calculée...... | 8.26.39,74 | | H. moy. .. = | 8.26.39,74 |

Pendule retarde de... — 4,04 sur t. moy.

3[e] CAS. *On observe le Soleil, et la pendule indique le temps moyen.*

On note l'instant où chacun des deux bords du Soleil vient toucher un fil : chaque fil donne ainsi deux nombres, dont la différ. est le temps que le disque a mis pour traverser. Cette différ. doit être double du temps que le demi-diam. emploie pour passer au méridien, temps connu (*v.* la 7[e] page du mois, dans la *Conn. des Tems*), ce qui offre un moyen de vérification, lorsqu'on croit utile d'y recourir.

La moyenne entre les heures des six observations de contact avec les fils est l'heure de la pendule à l'instant du passage du centre au méridien. Si elle est juste à l'heure moyenne, elle doit indiquer le *temps moyen à midi vrai ;* autrement la différence est l'erreur de la pendule.

Le 18 mai 1830, on a trouvé

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1er fil...... | 11h54′ 13″2 | 46″8 | |
| 2e......... | 55. 0,0 | 46,6 | |
| 3e.......... | 55.46,6 | — | 56′ 7″,2 |
| 1er......... | 56.27,8 | 46,4 | |
| 2e......... | 57.14,2 | 46,8 | |
| 3e......... | 58. 1,0 | | |
| | 36.42,8 | | |
| H. de la pendule à midi vr. = | 11.56. 7,13 | | |
| Temps moyen à midi vrai. = | 11.56. 6,60 | | |
| Pendule avance sur t. moy... | + 0, 53. | | |

4e cas. *On observe le Soleil, et la pendule est siderale.*

On opère précisément comme il vient d'être expliqué, et la moyenne entre les heures des contacts du limbe avec les fils du réticule doit être égale à l'asc. dr. du Soleil vrai, qui est le compl. à 24h de la distance ☉♈ donnée dans la 2e page des mois de la *Conn. des Tems* (*v.* n° 25). Dans le cas contraire, ajoutant cette distance ☉♈ au résultat obtenu, on a l'erreur de la pendule.

Le 15 avril 1830, on a observé le Soleil au méridien à la pendule siderale.

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1er fil...... | 1.31.18,0 | 44″5 | |
| 2e.......... | 32. 2,5 | 45,0 | |
| 3e.......... | 32.47,5 | — | 33′ 8″,0 |
| 1er.......... | 33.28,5 | 44,5 | |
| 2e.......... | 34.13,0 | 45,0 | |
| 3e.......... | 34.58,0 | | |
| | 18.47,5 | | |
| H. de la pendule à midi vr. = | 1.33. 7,92 | | |
| Dist. ☉♈.............. = | 22.27.23,80 | | |
| Pend. *avance* sur t. sid. de.. | +31,72. | | |

Si la somme avait été au-dessous de 24h, la pendule aurait

*retardé* de ce qui s'en manque. On a pris ici la moyenne entre les deux observations du milieu, comme moyen de vérification du calcul.

122. Il arrive souvent qu'après avoir observé le Soleil à midi vrai, avec la pendule sidérale, on veut mettre une montre à l'heure de temps moyen; il faut alors calculer cette heure, connaissant la sidérale, par le procédé du n° 111. Mais le calcul ci-après est plus prompt, et n'emprunte aux tables solaires que l'équation du temps.

Un chronomètre marque $11^h\,53'$ le 2 octobre 1829, quand le régulateur de

| | |
|---|---|
| temps sidéral indique.................................. | $0^h 41' 39'' 00$ |
| Le régulateur marquait à midi vrai.................. | 0.37.18,17 |
| Temps sid. écoulé depuis midi vrai.................. | 4.20,83 |
| Correction pour $4'\,21''$, table I.......................... | — 0,72 |
| Temps moyen écoulé depuis midi vrai.................. | 4.20,11 |
| Équ. du temps à midi vrai.............................. | +11.49.21,70 |
| Heure de temps moyen, lors de la comparaison...... | 11.53.41,81 |
| Or le chronomètre indiquait.............................. | 11.53. 0,00 |
| Donc il retardait sur le temps moyen de.............. | — 41,81. |

Quand la comparaison avec la pendule sidérale n'est faite que plusieurs heures après midi, il faut tenir compte de la marche diurne de la pendule dans cet intervalle.

Si à l'heure H du chronomètre la pendule sidérale marque S, et à midi vrai M, instant où l'équ. du temps est E, on a pour l'heure H' de temps moyen qui répond à l'heure H du chronomètre

$$H' = (S - M) + E - \alpha - x.$$

$\alpha$ est l'avance de la pendule dans le temps S — M, et $x$ la correction (table I) pour cette durée S — M; en comparant H à H', on a l'avance du chronomètre sur le temps moyen à l'heure H'.

Le soir du 21 août 1829, le chronomètre indiquait $H = 9^h 6'$, et le régulateur sidéral. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $S = 19^h 5' 30'' 46$

| | | |
|---|---|---|
| A midi vrai, l'observation a donné. . . . . . . . . . . . . . . . | $M =$ | 10.1.49,57 |
| Temps sidéral écoulé selon la pendule. . . . . . . | $S - M =$ | 9.3.40,89 |
| Temps moyen à midi vrai. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | $E =$ | + 2.53,80 |
| Avance diurne 5",4 ; en $9^h 4'$ (n° 102). . . . . . . . . . . . | $\alpha =$ | — 2,05 |
| Correction pour $9^h 3' 38''$ (table I). . . . . . . . . . . . . . . . | $x =$ | — 1.29,07 |
| Heure moyenne de la comparaison. . . . . . . . . . . . . . . | $H' =$ | 9.5. 3,57 |
| Or, le chronomètre marquait alors. . . . . . . . . . . . . . . | $H =$ | 9.6. 0,00 |
| Donc il était en avance sur t. moyen de. . . . . . . . . . . | | + 56,43. |

Réciproquement, si le passage du Soleil à midi vrai a été observé quand le chronomètre de temps moyen marque $M$, et qu'on trouve l'heure $H$ quand une pendule sidérale indique $S$, en désignant par $\beta$ la partie d'avance diurne du chronomètre pour le temps $H - M$, et par $y$ la correction (table II) qui change cette durée moy. en sid.,

Temps moyen écoulé depuis midi vrai. $= H - M - \beta$,

Durée en temps sidéral. . . . . . . . . . . $= H - M - \beta + y$.

Soit Æ ⊙ l'asc. dr. du Soleil *à midi vrai*.

On a pour l'heure sid. de la comparaison

$$S' = H - M - \beta + y + Æ\odot.$$

Comparant $S'$ à l'heure $S$ de la pendule au même instant, on a son avance absolue sur le temps sid. On peut remplacer ici Æ ⊙ par $-\odot\Upsilon$, distance donnée pour midi vrai dans la *Conn. des Tems.*

Le 12 mai 1829, à $3^h 42' 50''$ au régulateur sidéral, le chronomètre de temps moyen indiquait. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $H = 12^h 22' 0''$

| | | |
|---|---|---|
| Et à midi vrai. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | $M =$ | 11.55.58,6 |
| Durée moyenne écoulée. . . . . . . . . . | $H - M =$ | 0.26. 1,4 |
| ici $\beta = 0$. Pour 26', on a, table II. . . . . . | $y = +$ | 4,27 |
| A midi vrai. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | $-\odot\Upsilon = -$ | 20.43.59,00 |
| Heure sid. de la comparaison. . . . . . . . . . . . | $S' =$ | 3.42. 6,67 |
| Heure correspondante de la pendule. . . . . . | $S =$ | 3.42.50,00 |
| Pendule avance sur le temps sidéral. . . . . . . . . . | | + 43,33. |

123. Quant à la manière de régler la mire qui atteste que la lunette de passage est exactement dans le méridien, on peut se servir de la méthode des azimuths qui sera exposée n° 215, ou même d'une boussole (n° 223); mais il faut, après coup, en faire la vérification par des observations très exactes. Le procédé le plus facile et le plus usité est le suivant, qui a l'avantage de permettre les observations de passages quand la lunette ne décrit pas tout-à-fait le méridien, pourvu qu'elle en diffère peu, et que son axe de rotation soit bien horizontal, ce qu'on obtient aisément par le moyen du niveau à bulle d'air: il faut en outre que l'axe optique soit exactement perpendiculaire au précédent, que les fils soient verticaux, etc.

Soient (fig. 21) $p$ le pôle, $z$ le zénith, $pzmn$ le méridien, $s$ une étoile à son passage par le fil du milieu de la lunette, lequel est supposé décrire le vertical $isz$ peu éloigné du méridien. On a noté l'heure $h$ de la pendule à cet instant: cherchons l'angle $mzs = x$ de déviation vers l'ouest. Æ est l'asc. dr., D la déclin. de l'étoile, $l$ la latitude du lieu, complément de l'arc $pz$. On tire du triangle sphérique $zps$

$$\frac{\cos \text{D}}{\sin sz} = \frac{\sin x}{\sin p} = \frac{x}{p}.$$

Attendu que la déviation $x$ est très petite, ainsi que l'angle horaire $p$, on peut remplacer le rapport des sinus par celui des arcs. (*V.* p. 60.) Comme en partant du point $m$ où elle était au méridien, l'étoile doit très peu descendre pour arriver en $s$, on a sensiblement $zs = zm = l - \text{D}$; donc

$$p = \frac{x \sin(l - \text{D})}{\cos \text{D}} = nx, \quad (1)$$

en posant $$n = \frac{\sin(l - \text{D})}{\cos \text{D}}. \quad (2)$$

Quand l'étoile était au méridien en $m$, il était l'heure sidérale exprimée par l'asc. dr. en temps, ou Æ; arrivée en $s$, cette heure est devenue $h - \alpha$, $\alpha$ étant l'avance en temps sid.; ainsi

$$p = h - \alpha - \text{Æ} = nx. \quad (3)$$

Supposons maintenant qu'on fasse l'observation du passage d'une autre étoile, quelques momens après la première; on a de même $h' - \alpha - Æ' = n'x$ ; retranchant cette équ. membre à membre de la précédente, on en tire

$$x = \frac{(h' - h) - (Æ' - Æ)}{n' - n}. \qquad (4)$$

On peut calculer les nombres $n$ et $n'$ par l'équ. (2); $h' - h$ est la différence entre les heures sidérales de l'observation des deux passages; $Æ' - Æ$ est la différ. des asc. dr. des deux étoiles : ainsi $x$ est facile à trouver en secondes de temps. *Si* x *est positive, la déviation de la lunette est vers l'ouest; elle est à l'est dans l'autre cas où* x *a le signe* —, pourvu que la lunette soit tournée vers le sud : c'est le contraire quand on observe au nord.

Le numérateur de $x$ doit toujours être fort petit : on a $x = 0$ quand la lunette est dans le méridien, puisque alors

$$h - \alpha = Æ \text{ et } h' - \alpha = Æ'.$$

On voit maintenant qu'il n'est pas nécessaire que l'axe optique de la lunette soit exactement dans le méridien, pour régler la pendule; car une fois la déviation $x$ connue par ce calcul, l'équ. (3) donne $h - \alpha =$

$$\textit{heure sid. du } 1^{er} \textit{ passage au fil} = Æ + nx,$$

d'où l'on conclut l'avance $\alpha$ de la pendule sur le temps sid. ou moyen. Cette détermination doit s'accorder avec l'heure $h' - \alpha = Æ' + n'x$ du second passage.

Il est facile, d'après cela, de fixer la mire dans le méridien; car on la placera d'abord dans l'axe optique, puis on la fera dévier de la petite quantité $x$. Voici comment on pratiquera cette opération : soit $a$ la distance de la mire, on la déplacera (vers l'est ou vers l'ouest, selon que $x$ est négatif ou positif) de la longueur $y$, déterminée par la formule

$$y = 15ax \sin 1'' = Aax, \quad \log A = \bar{5}.86167,$$

$y$ et $a$ sont rapportées à la même unité linéaire, telle que le mètre. Le déplacement de la mire doit se faire dans le sens de la perpendiculaire horizontale menée au rayon visuel. Cette équ. est facile à démontrer; car $x$ étant des secondes de temps, $15x = z$ exprime des secondes de degré, valeur angulaire de la déviation. On résout ensuite le triangle rectangle formé par la distance $a$, sa perpendiculaire $y$ et l'angle $z$ qui lui est opposé, d'où $y = a \tang z = az$, ou plutôt $y = az \sin 1''$, pour exprimer l'arc $z$ en secondes.

Dans notre équation, on a $n' - n = \dfrac{\cos l \sin (D - D')}{\cos D' \cos D}$.

Comme $h' - h$ est la seule partie de la formule (4) qui soit affectée des erreurs d'observation, pour que le calcul soit moins dépendant de ces erreurs, on rend $n' - n$ le plus grand possible. A cet effet, on choisit deux étoiles très distantes en déclin., l'une boréale et l'autre australe; alors la différence $D' - D$ se change en une somme: et si cette somme est d'au moins 50°, et même, s'il se peut, voisine de 90°, le calcul acquiert une grande précision. Il convient que les deux astres passent au méridien après un court intervalle, pour se mettre à l'abri des erreurs de la pendule et des variations de l'axe de la lunette.

Si l'on observe une circompolaire sous le pôle, il faut changer le signe de $n$; et si on la voit à ses deux passages, l'un supérieur, l'autre inférieur, on doit poser $D' = - D$; et comme l'intervalle des passages en temps sidéral est de 12 heures $= Æ' - Æ$, on a

$$x = \frac{h - h' - 12^h \text{ sid.}}{2 \cos l \tang D}.$$

Cette relation est indépendante de l'asc. dr. de l'étoile; on n'est pas obligé d'en calculer la nutation et l'aberration, et l'on en tire un moyen très sûr d'orientation de la lunette.

Comme la valeur de $n$ ne dépend que des déclin. et de la latitude du lieu, on peut la calculer d'avance. Notre table XI donne ces quantités pour la latitude de Paris. La déclin. de

l'étoile n'a pas besoin d'être connue avec beaucoup de précision, puisque $n$ varie très peu pour 1 degré; mais si l'on change de latitude, cette table ne peut plus servir. Lorsque la latitude est boréale et $> l$, $n$ devient négatif.

Du reste, les arcs Æ' et Æ doivent être calculés avec beaucoup de soin, en ayant égard à la précession, à l'aberration et à la nutation, pour avoir la position apparente des étoiles au ciel.

Si la pendule est réglée sur le temps sidéral, le temps $h' - h$ est donné directement par l'observation; mais si elle l'est sur le temps moyen, il faut convertir la durée moyenne $h' - h$ en sidérale, en y ajoutant la petite quantité qu'on trouve dans la table II. Et même, dans le cas où il se serait écoulé un long temps entre les deux observations, il faudrait corriger $h' - h$ de la variation de la pendule dans l'intervalle (n° 102).

L'exemple suivant servira de type de calcul.

Le 15 octobre 1829, ayant observé l'occultation d'Aldébaran par la Lune, aussitôt après j'ai voulu connaître l'heure exacte du phénomène. J'ai observé, à la pendule sidérale, β Pégase et une étoile du Verseau; on a

Verseau...... Æ' = 22h59' 8",03 D' = − 29°44'
β Pégase..... Æ = 22.55.33,03 D = + 27.10.

Les heures $h'$ et $h$ des passages observés étaient

| | | | |
|---|---|---|---|
| Verseau.. | $h'$ = 23h 3' 21",33 | Æ' = 22h59' 8",03 | $n'$ = + 1,127 |
| β Pégase. | $h$ = 22.59.45,33 | Æ = 22.55.33,03 | $n$ = + 0,413 |
| Differ.. | = 3.36,00 | 3.35,00 | + 0,714 |
| | 3.35,00 | | |
| Numér. | = 1,00 | $x = + \frac{1000}{714} = +$ 1",40. | |

La lunette dévie, à l'ouest, de 1",40 en temps.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Verseau.. | Æ' = 22h59' 8",03 | β Pégase.. | Æ = 22h55' 33",03 |
| | $n'x$ = + 1,58 | | $nx$ = + 0,62 |
| Pass. au fil... | 22.59. 9,61 | | 22.55.33,65 |
| | $h'$ = 23. 3.21,33 | | $h$ = 22.59.45,33 |
| | + 4.11,72 | | + 4.11,68. |

La moyenne + 4.11,70 est l'avance de la pendule sur le temps sidéral.

*Des angles horaires.*

124. *Étant donné l'angle horaire d'une étoile, trouver l'heure sidérale vraie ou moyenne.* On donne le nom *d'angle horaire* à l'angle que fait, avec le méridien du lieu, le plan passant par l'astre et par les pôles; c'est la distance angulaire de l'astre au méridien.

Soit abaissé de l'étoile un arc perpendiculaire à l'équateur FEAE′ (fig. 17); cet arc est dans un plan horaire, et il va couper l'équateur en E; AC est dans le méridien. L'angle horaire à cet instant est ACE $=p$. Le point vernal ♈ est en F, procédant vers l'ouest; l'arc FA, en temps, est la durée écoulée depuis le passage du point ♈ au méridien; ainsi FA est l'heure sidér. actuelle; FE est l'asc. dr. de l'étoile; et l'on a, précisément comme n° 109,

$$FA = FE + AE.$$

Si l'étoile est de l'autre côté du méridien, et que son cercle horaire coupe l'équateur en E′, on a encore FA = heure sid., FE′ = asc. dr. ✱, AE′ = angle horaire, situé à l'orient du méridien; puis FA = FE′ — AE′.

Donc, en général,

*Heure sidér.* = Æ✱ ± *angle horaire en temps*. (8)

On prend + quand l'étoile est à l'ouest du méridien, et — quand elle est à l'est.

L'angle horaire est compté à partir du méridien supérieur de 0° à 180° jusqu'au plan horaire, cet angle pouvant être placé à droite ou à gauche du méridien. Mais si l'on entend parler de l'angle horaire qui est formé du côté du méridien inférieur, on prendra encore l'équ. (8); mais le signe + se rapportera au cas où l'étoile est située du côté oriental, et le — dans le cas contraire.

Une fois l'heure sidérale connue, on a ensuite l'heure solaire par l'équ. (2), n° 110; ainsi

*Heure solaire* $=$ Æ✶ — Æ☉ ± *angle horaire*; (9)

bien entendu qu'il s'agit de l'heure solaire vraie ou moyenne, selon qu'on emploie l'asc. dr. du Soleil vrai ou moyen.

Si, par exemple, on a reconnu qu'Arcturus, le 11 août 1830, à pour angle horaire vers l'ouest.................. $p = +$ 3h56′54″,99

| | | |
|---|---|---|
| On trouve Æ✶............. | = | 14. 7.55,19 |
| — Æ☉ moy. à midi moy.... | = — | 9.17.44,63 |
| Heure approchée,............ H. | = | 8.47. 5,55 |
| (Table I), corr. p. 8h 47′6″. ... | — | 1.26,36 |
| H. m. de l'observation........ | = | 8.45.39,19. |

125. *Trouver l'heure par la hauteur absolue d'une étoile.* Le méridien est *pza* (fig. 18), *p* le pôle, *z* le zénith, *q* l'étoile; le plan vertical *zqb*, qui passe par l'astre, coupe l'horizon *kba* en *b*, et le méridien au zénith *z*. On a mesuré la hauteur *h* qui est l'arc *qb*, ou la distance zénithale *z* qui est l'arc *qz*. Avant tout, il faut corriger cette valeur *z* ou *h* de la *réfraction* (n° 66), quantité qu'il faut ajouter à *z* ou retrancher de *h*, pour avoir la valeur qu'aurait cet arc, s'il n'y avait pas d'atmosphère. On doit avoir égard à la pression barométrique et à la température, ainsi qu'on l'a dit n° 67; et si la température de l'air au dehors est différente de celle de l'intérieur, on prend le degré thermométrique extérieur.

Or, on a le triangle sphérique *zpq* dont les trois côtés sont connus, savoir : 1°. *pz* $=$ *colatitude* $c = 90° -$ latitude $l$; 2°. *zq* $=$ dist. zénithale vraie $z = 90° -$ hauteur vraie $h$; 3°. *pq* $=$ dist. polaire $d = 90° \pm$ déclin. D; on prend $+$ quand la déclin. est boréale, — quand elle est australe. Dans ce triangle, on peut calculer l'angle horaire *p* formé par le méridien *zp* et le cercle horaire *pq*; c'est la distance de l'astre au méridien. En temps, *p* est l'heure sidér. écoulée depuis le passage par ce plan, si l'astre est vers l'ouest, ou celle qui s'écoulera jusqu'à ce qu'il entre dans ce plan, si l'astre est vers l'est.

Les formules des triangles sphériques (équ. 39, page 6) qui

se rapportent au cas où les trois côtés sont connus, deviennent ici

$$2k = z + d + c,$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} p = \frac{\sin(k-c)\sin(k-d)}{\sin c \,.\, \sin d}, \qquad (10)$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} p = \frac{\sin k \,.\, \sin(k-z)}{\sin c \,.\, \sin d}. \qquad (11)$$

La 1re équ. donne l'arc auxiliaire $k$, qui, introduit dans l'une des suivantes, fait trouver l'arc $\frac{1}{2}p$ en degrés; on multiplie par 8, et l'on a l'arc $p$ en temps sidér. (n° 72), et par suite l'heure vraie ou moyenne (n° 124).

126. Remarquez qu'il faut connaître l'asc. dr. et la déclin. de l'étoile, corrigées des précession, nutation et aberration (n° 74). En outre, on doit savoir quelle est la position géographique de l'observatoire, puisque la latitude $l$, ou son complément $c$, est l'une des données de l'opération.

On emploie celle des équ. (10) ou (11), qui donne lieu à un calcul plus facile: la 1re est symétrique, n'emploie que des sinus, et est d'une application simple qui ne permet guère qu'on s'y trompe; la 2e exige une soustraction de moins.

On a coutume de mesurer plusieurs hauteurs successives, de noter chaque heure d'observation, et de prendre la moyenne. On regarde la moyenne entre les hauteurs comme répondant à la moyenne entre les heures, ce qui est très sensiblement vrai, quand la totalité des observations ne dépasse pas 10 à 12 minutes et que l'astre est loin du méridien: car le procédé a d'autant plus de précision que l'astre est plus voisin du premier *vertical*, c'est-à-dire que le plan vertical mené par l'astre approche plus d'être perpendiculaire au méridien; en effet, le mouvement vertical de l'astre est alors plus rapide. A Paris, près de ce plan, ce mouvement est d'environ 10″ pour 1″ de temps. L'expression générale de cet arc est 15″ × cos latit., qui donne ce mouvement en tout lieu du globe.

Le 9 juin 1830 au soir, dans un lieu dont la colatitude est $c = 41° 19' 10''$, on a pris quatre distances zénithales de $\alpha$ de l'Aigle vers l'est.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| à 9h14'37"6 | | | 17°6.... | $\bar{1}$.9708 |
| 16.47,6 | 4 dist. zén.. | 303°53'35" | 765m4.... | 31 |
| 18.21,6 | Quart...... | 75.58.23,7 | ............ | 2.3771 |
| 20.13,2 | Réfr ........ | 3.44,3 | | |
| 70. 0,0 | $z$ = | 76. 2. 8,0 | 224",3... | 2.3510 |
| à 9.17.30,0 | $d$ = | 81.34.14,8 | dist. pol. d'Ataïr. | |
| on a | $c$ = | 41.19.10,0 | colatitude du lieu. | |
| D = 8°25'45"24 | $2k$ = | 198.55.32,8 | | |
| Æ=19h42.31,33 | $k$ = | 99.27.46,4 | c. sin $c$....... | 0.1802873 |
| | $k - d$ = | 17.53.31,6..... | sin.......... | 9.4874574 |
| | $k - c$ = | 58. 8.36,4..... | sin.......... | 9.9290980 |
| | | | sin $d$. .....— | 9.9952829 |
| (Équ. 9, n° 124). | | | *V.* note p. 42. | 19.6015598 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Æ★ = 19h42'31"33 | $\frac{1}{2}p$ = 39°12'16"6....... | sin..... | 9.8007709 |
| $p$ — 5.13.38,21 | $p$ = 5h13.38"12‴,8 | | |
| (1) — 5. 9.21,14 = asc. dr. ☉ moy. à midi m. | | | (*V.* n° 104.) |
| 9.19.31,98 | | Æ☉ vr. = | 5h8' 5"74 |
| T. I. — 1.31,67 corr. p. 9h 19'32" | | — Éq. temps = | +1.15,20 |
| 9.18. 0,31 = h. moy. de l'observation. | | | 5.9.20,94 |
| 9.17.30,00 = h. du chronomètre. | | | + 20 |
| — 30,31 = retard sur t. moy. | | (1)..... | 5.9.21,14. |

127. *Trouver l'heure connaissant la hauteur absolue* h *du centre du Soleil, ou sa distance zénithale* z. Les équ. (10) et (11) du n° 125 font connaître l'angle horaire $p$ de l'astre, qui, en temps, est l'heure vraie quand l'astre est du côté de l'ouest; s'il est vers l'est, l'heure est $24^h - p$.

Le calcul est ici absolument le même que pour les étoiles, mais on doit faire plusieurs remarques essentielles.

1°. Il faut corriger $h$ ou $z$ de la *réfraction — parallaxe* (nos 68 et 90); cet arc retranché de $h$, ou ajouté à $z$, donne la valeur apparente, comme s'il n'y avait pas d'atmosphère, et que l'astre fût vu du centre de la Terre, où l'observateur est censé transporté avec son horizon et son méridien.

2°. Outre la latitude du lieu, il faut encore connaître ici sa

longitude approchée; car la déclin. du Soleil varie sans cesse, et il faut avoir l'heure de Paris contemporaine à celle où l'on observe, pour trouver cette déclin. (n° 29). Mais comme cette dernière varie très lentement, il n'est pas nécessaire de connaître cette longitude à la rigueur.

3°. Le calcul est un peu plus court que pour une étoile; car l'arc $p$ donne de suite l'heure vraie: d'ailleurs on n'a pas de correction de précession, nutation et aberration; mais il faut ici chercher la parallaxe de hauteur. On a des tables d'où on la tire à vue.

Le matin du 1er mai 1830, on a fait quatre observations de distances zénithales du bord supérieur du Soleil, et l'on a trouvé

| | | | |
|---|---|---|---|
| A | 7h 25′ 59″,2 | 4 dist. zénith.... | 253° 29′ 40″ |
| | 26.57,2 | Quart......... | 63.22.25 |
| | 28.46,8 | Réfr. — parall... | + 1.47,3 |
| | 36.28,8 | Demi-diam...... | + 15.45,5 |
| | 118.12,0 | | z = 63.39.57,8. |
| Moy. = | 7. 29.33,0. | | |

Lorsqu'on mesure plusieurs hauteurs successives du Soleil, il convient de les prendre en nombre pair, et d'observer alternativement le bord supérieur et le bord inférieur, parce que la moyenne est la hauteur du centre, ce qui évite la correction du demi-diamètre.

Il faut aussi prendre la hauteur du baromètre et l'indication du thermomètre centigrade, pour corriger de la réfraction. On avait ici

| | | |
|---|---|---|
| Therm. 17°,4........ | $\bar{1}$.9712 | (V. n° 68.) |
| Barom. 767m,5...... | 43 | |
| z = 63° 40′.......... | 2.0857 | |
| Réfr. = 115″,12....... | 2.0612 | |
| — Parall. = — 7,81 | | |
| 107,31 = 1′ 47″,3 = réfr. — parall. | | |

Il s'agit ensuite d'avoir la déclin. du Soleil, le 30 avril 1830: à midi vrai de Paris, elle est = 14° 41′ 55″ B, et croît de 21′ 9″,4 en 24h, ou 52″,89 par heure (n° 17). Je supposerai que

l'observation soit faite à Paris; si elle l'était sous un autre méridien, on chercherait l'heure contemporaine en cette ville, et l'on calculerait la déclin. pour cette heure, comme on va le faire pour l'heure vr. ci-après. On croit que le chronomètre retardait sur le temps moy. de 30″, et comme ce temps retarde alors de 4′ 0″ sur le Soleil, l'observation s'est faite le 30 avril à $19^h\,32'\,42''$ t. vr.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $19^h 29' 33''$ | | |
| Retard...... | 30 | | 52″83 |
| Équ. temps. | 4. 0 | | 19,567 |
| | 19.34. 3 t. vr. | | 528,30 |
| | | | 475,47 |
| | | | 26,42 |
| | | | 3,17 |
| | | | 37 |

Var. en déclin..... 1033,73 = 17′ 13″7
Déclin. le 30 avril. ........ 14.41.55

D = 14.59. 8,7 B.
$d$ = 75. 0.51,3.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z$ = | 63°39′57″8 | | |
| $d$ = | 75. 0.51,3 | | |
| $c$ = | 41. 9.4640 | | |
| $2k$ = | 179.50.35,1 | | |
| $k$ = | 89.55.17,5 | Comp. sin $c$... | 0.1816417 |
| $k-d$ = | 14.54.26,2 | sin........... | 9.4106019 |
| $k-c$ = | 48.45.31,5 | sin........... | 9.8761835 |
| | | sin $d$......... — | 9.9849728 |
| | | (*V.* note p.42). | 19.4834543 |
| $\frac{1}{2}p$...... | 33°28′9″0 | sin........... | 9.7417271 |

En temps. $4^h 27' 53'' 12''' = p$

| | |
|---|---|
| 7.32. 6,8 | compl. à $12^h$, heure vr. de l'observation; |
| 11.57.57,6 | t. moy. à midi vr. |
| 7.30. 4,4 | h. moy. de l'observation. |
| 7.29.33,0 | h. du chronomètre. |
| — 31,4 | retard sur t. moy. |

128. Remarquez que nous avons employé le compl. arithm. de log. sin $c$ au lieu de ce log. qu'il aurait fallu soustraire. Ce

n'est pas parce qu'une soustraction est un peu plus difficile à faire qu'une addition, que nous en avons usé ainsi; car le temps qu'on perd à prendre le complément est sans utilité. (*V.* p. 17.) Mais comme log. sin *c* se rapporte à un observatoire fixe, pour lequel ce sinus est une constante qui se reproduit souvent, on en prend le compl. une fois pour toutes, et l'on n'a qu'à le copier quand il est nécessaire : c'est ce qui arrive ici. En général, les complémens additifs qu'on substitue ordinairement aux quantités soustractives, n'offrent d'avantage véritable que dans les calculs analogues à celui-ci, et l'on ne doit y recourir que dans les cas semblables. Au reste, comme on a ici deux log. soustractifs, l'opération serait en effet plus difficile à faire, si l'on ne se servait pas du compl. log. sin *c*.

Quant à l'équ. du temps, elle est le 1er mai.......... $= 11^h57'59''1$
Mais comme il faut l'avoir pour $7^h29'$ du mat., c.-à-d. pour $4^h31'$ avant midi, ou $4^h,5$, on prend la variation diurne, $8'',1$, et l'on en conclut la variation horaire $0'',34$, d'où... $-\ 1,5$

$11.57.57,6$

$$\begin{array}{r} 8''1 \\ 8,1 \\ 4,0 \\ \hline 20''',2 = 0'',34. \end{array} \qquad \begin{array}{r} 0''34 \\ 4,5 \\ \hline 1,36 \\ 0,17 \\ \hline 1,53. \end{array}$$

129. Dans l'origine du calcul, nous avons supposé que le chronomètre retardait de 30″ : cette présomption s'est vérifiée ; mais elle aurait pu se trouver fautive, et comme nous ne l'avons fait servir qu'à la recherche de la déclin. et de l'équ. du temps, qui varient très peu dans la durée dont il s'agit, le résultat n'en serait pas sensiblement atteint.

Cependant, si le calcul montrait qu'on a commis une erreur dans la supposition, capable d'influer sur le résultat, il faudrait recommencer l'opération en partant du retard que le calcul aurait fait connaître. Cela ne donnerait lieu qu'au changement des derniers chiffres des log., ce qui serait très facile.

Nous avons développé le calcul dans tous ses détails, pour

en bien faire concevoir le mécanisme. Cette méthode est une des plus exactes pour se procurer l'heure, et on la préfère, en mer, à toute autre, en sorte qu'on en fait une continuelle application. Nous donnerons ici un second exemple, pour montrer la manière de ranger les chiffres, et servir de type de calcul.

Le 2 mai 1828, en un lieu dont la colatitude est 41° 19' 10", et sous le méridien de Paris, on a mesuré quatre distances zénithales des bords supérieur et inférieur du Soleil alternativement.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 7h 27' 24"8 | | | 12° ...... | 1.9800 |
| | 29.28,8 | 4 dist. zén.. | 252° 10' 22"0 | 766m,2. .. | 35 |
| | 30.50,0 | Quart. .... | 63. 2.35,5 | .............. | 2.0740 |
| | 32. 6,4 | Réf.— par.. | 1.46,4 (1) | | |
| | 119.50,0 | $z =$ | 63. 4.21,9 | 114",16. .. | 2.0575 |
| A | 7. 29.57,5 | $d =$ | 74.36.18,2 (2) | Réfr. .. | = 1' 54" 16 |
| Retard; | 40,0 | [illegible] = | 41.19.10,0 | Parall.. | = — 7,78 |
| Éq. temps. | 3. 7,0 | [illegible] = | 178.59.50,1 | (1). ..... | 1.46,38 |
| H. vr... | 7.33.44,5 = —4h 44 | $k =$ | 89.29.55,0 | c. sin $c$. | 0.1802873 |
| Var. déc. | 17' 57" | $k - d =$ | 14.53.36,8 | sin. ... | 9.4099738 |
| Le 2 mai. | 17.57 | $k - c =$ | 48.10.45,0 | sin. .. | 9.8722924 |
| | 8.58,5. | | | sin $d$.— | 9.9841305 |
| 44",875 = 44" 52"',5 var. horaire. | | | | | 19.4784230 |
| | 4,44 | $\frac{1}{2}p =$ | 33° 16' 1",9 ..... | sin. ... | 9.7392115 |
| | 179,500 | | | | |
| | 17,950 en temps | $p =$ | 4h 26' 8" 15"' ... | compl. . | 7h 33' 51" 7 t. vr. |
| | 1,795 | | | Éq. temps. | 11.56.53,0 |
| | 199,245 = 3' 19"2 | | | | 7.30.44,7 t. m. |
| Decl. à midi... | 15.27. 1,0 | | | Chronom.. | 7.29.57,5 |
| (2) | D = 15.23.41,8 | | | Retarde. .. | — 47,2 |

130. Dans l'exemple suivant, nous avons appliqué l'équ. (11), qui exige une soustraction de moins que (10) : ici la latitude est australe, $l = 35° 30'$, d'où $c = 125° 30'$.

On a mesuré des hauteurs du Soleil le matin du 18 octobre 1830 ; celle du

centre, corrigée de réfr. — parall., a donné $z = 61° 7' 26''$. On a reconnu (*) qu'il est alors à Paris 16h 34′ 10″ t. vr., le 17 octobre. La variation en déclin. est 21′ 58″ par jour, et 54″,92 par heure. Le mouvement en déclin. pour 16h,57 est........................................ 15′ 10″

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | Déclin. le 17 à midi....... | = 9.10.14 A |
| A 16h 12′ 41″,1 t. moy. | $z =$ 61° 7′ 26″ | | D = 9.25.24 A |
| | $d =$ 99.25.24 | sin.... | 9.9940995 |
| | $c =$ 125.30. 0 | sin.... | 9.9106860 |
| | $2k =$ 286. 2.50 | | — 9.9047855 |
| | $k =$ 143. 1.25 | sin .... | 9.7792254 |
| | $k - z =$ 81.53.59 | sin.... | 9.9956453 |
| | | cos².... | 19.8700852 |
| | $\frac{1}{2}p =$ 30°33.43,7 | cos.... | 9.9350426 |

8 fois............... $p =$ 4h 4.29,8 = dist. au méridien.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Ou le 17 à............. | 19.55.30,2 | t. vr. ............ | 19.55.30,2 t. vr. |
| ☉ avance de............. | — 14,37,9 | à Paris.... | 16.34.10,0 t. vr. |
| T. moy. de l'observ..... | 19.40.52,3 | ngit. = | 3.21.20,2 |
| Montre marque......... | 16.12.41,1 | | à l'est de Paris. |
| Retarde de............. | 3.28.11,2 | sur le méridien du lieu. | |

---

(*) Voici les calculs auxiliaires de détail :

| | | |
|---|---|---|
| Montre réglée sur Paris marque le 18 matin....... | | 16h12′41″1 t m. |
| Retardait à l'instant du départ du port..... | + | 3. 0,4 |
| Retard diurne 3″,78 ; en 61 jours de navigation. .. | + | 3.50,6 |
| Soleil avance sur le temps moyen................. | + | 14.37,9 |
| Heure de Paris à l'instant de l'observation......... | | 16.34.10,0 t. vr. |

| | |
|---|---|
| Var. en déclin. 21′58″ par jour. | En équ. du temps. 11″6 |
| 21.58 | 11,6 |
| 10,59 | 5,8 |
| 54″92 = 54″55 par heure. | 29″,0 = 0″5 |
| 16,57 | 16,57 |
| 549,2 | Moitié....... 8,29 |
| 329,52 | T. moy. à midi = 11.45.30,4 |
| 27,46 | Équ. du temps.... 11.45.22,1 |
| 3,84 | Soleil avance de... 14.37,9 |
| 910,62 = 15′ 10″ var. de déclin. | |

On voit par cet exemple comment, de la connaissance de l'heure de Paris conclue de la marche du chronomètre, et de l'heure contemporaine du lieu, trouvée par des hauteurs absolues du Soleil, on déduit la longitude.

131. Le plus souvent, en mer, ce n'est pas la distance zénith. de l'astre qu'on observe, mais sa hauteur $h$ : pour appliquer nos formules, il faut donc commencer par retrancher $h$ de 90°, pour obtenir $z$. Mais il est alors préférable d'exprimer ces équations en $h$, sous la forme suivante :

$$2m = l + d + h,$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} p = \frac{\cos m . \sin (m - h)}{\cos l \sin d}. \qquad (12)$$

| | | |
|---|---|---|
| Par ex., le 11 nov. 1830, après midi, la pendule marquait | | 2h34′ 41″7 |
| Son retard présumé sur le temps moyen est.............. | + | 2. 0,0 |
| — Équ. du temps (elle est négative) (*)............... | + | 15.48,5 |
| Heure vr. présumée du lieu lors de l'observation. ..... | | 2.52.30,2 |
| Longitude du lieu à l'ouest de Paris.................. | + | 22,5 |
| Heure vr. présumée de Paris........................ | $t$ = | 2.52.52,7. |
| La variation horaire en déclin. (*) est 41″,3 ; donc, dans le temps $t$ = 2h,881, elle s'élève à.................... | | 1.59 |
| Déclin. ☉ aust. croissante à midi du 11 novembre. ... | | 17.22.37 A |
| Déclin ☉ lors de l'observation..................... | D = | 17.24.36 A |

(*) Voici les calculs auxiliaires de détail :

Var. en déclin. 16′ 31″ par jour,
16.31
8.15,5
41″3 = 41″17,5 par heure.
2,881
82,6
33,0
3,3
4
119,3 = 1′ 59″,3.

En équ. du temps. 7″3
7,3
3,6
18‴,2 = 0″3
2,88
Var en 2h,88..... 0,864
11.44.10,6
T. moy. à midi...... 11.44.11,5
Équ. du temps....... — 15.48,5

On a trouvé la hauteur $h$ ci-après du Soleil, après la correction de réfraction ........................ $h = 17^\circ 40' 58''$
Compl. de la déclin. = dist. polaire ............ $d = 107.24.36$
Latitude du lieu ........................ $l = 43.7.20$

| | | | |
|---|---|---|---|
| Compl. cos $l$ .... | 0.1367383 | | $2m = 168.12.54$ |
| cos $m$ ... | 9.0114111 | ............ | $m = 84.6.27$ |
| sin ..... | 9.9621494 | ........ | $m - h = 66.25.29$ |
| sin $d$ .... | — 9.9796337 | | |
| | 19.1306651 | | |
| sin ...... | 9.5653325 | ........... | $\frac{1}{2}p = 21^\circ 33' 55'' 6$ |
| | | 8 fois... en temps $p$ = | $2^h 52.31,4$ |
| | | Équ. du temps. ... — | 15.48,5 |
| | | H. moy. de l'observ. | 2.36.42,9 |
| | | Pendule marque. .. | 2.34.41,7 |
| | | Retard sur t. moy. . — | 2. 1,2. |

132. *Étant donnée la hauteur d'un bord de la Lune, trouver son angle horaire et l'heure du lieu.* Les deux bords supérieur et inférieur de la Lune ne sont visibles à la fois que pendant quelques jours du mois, vers la pleine Lune; on ne peut donc ordinairement mesurer la hauteur que de l'un de ces bords, et trouver celle du centre comme on l'a fait p. 176, pour le Soleil. Voici comment celle-ci se tire de la première.

On cherche la parallaxe horizontale, réduite à la latitude du lieu (p. 122), puis celle de hauteur, et la réfraction, en ayant égard au baromètre et au thermomètre (p. 84) : ajoutant *parall. — réfr.*, on change la hauteur apparente du bord en hauteur vraie. On corrige du demi-diamètre horizontal (p. 58), et l'on a la hauteur du centre. Bien entendu que comme, par ce calcul, l'observateur se trouve transporté au centre du globe terrestre, il ne faut pas faire subir à ce demi-diamètre l'accroissement dû à la hauteur (p. 61). Cette opération doit être faite dans tous les cas où l'on veut la hauteur vraie du centre de la Lune, quand on a observé celle de l'un des bords.

On est censé connaître à peu près l'heure vraie du lieu et celle de Paris; on se propose seulement de corriger cette quan-

tité. On calcule l'asc. dr. et la déclin. de la Lune pour cette heure, puis l'angle horaire correspondant à la hauteur et l'heure vraie, par la formule (10, p. 174), comme s'il s'agissait d'une étoile. Le résultat se trouve, en général, différent de l'heure supposée : on refait alors tout le calcul, en ayant égard aux différ. 2$^{es}$ (p. 102), et prenant l'heure trouvée pour hypothèse ; et il faut le recommencer jusqu'à ce que le calcul redonne enfin l'heure qui a servi de base aux opérations. Rien n'est plus ordinaire en Astronomie que ces suppositions successives qui se corrigent de plus en plus, et conduisent à la solution demandée.

Le 17 décemb. 1823, à $14^h 54'$, t. vr. (ou le matin du 18, à $2^h 54'$), on a mesuré des hauteurs du bord inférieur de la Lune, dont la moyenne est $47° 44' 1'',1$, en un lieu dont la latitude est $10° 1' 50''$ N, et la longitude $2^h 0' 16'',4$ ouest de Paris : on demande de rectifier l'heure de l'observation. Voici les données de ce calcul, telles qu'on les tire de la *Conn. des Tems* et des principes démontrés précédemment.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Parall. horiz. équ. | 60' 50'' 75 | Heure du lieu...... | $14^h 54'$ 0'' |
| Corr. de latitude... | — 0,23 | Longitude ouest.... | 2. 0. 16,4 |
| Parall. hor. du lieu. | 60.50,52 | H. appr. pour Paris. | 16.54.16,4 |
| Parall. de hauteur.. | 40.55,26 | D'où ☉♈ = | 6.17 31,6 |
| Réfraction........ | — 53,13 | Æ ☾ = | 5.57.56,7 |
| Haut. app. du bord. | 47° 44' 1'' 1 | D ☾ = | 25° 8' 8'' |
| Haut. vr. du bord.. | 48.24. 3,23 | Angle horaire $p$ = | $2^h 42$. 21,5 |
| Demi-diam. horiz. . | 16.34,77 | Heure vr. du lieu = | 14.59.49,2 |
| Haut. vr. du centre. | 48.40.38,00 | Erreur........ — | 5.49,2. |

On recommence le calcul, en supposant que l'heure vraie du lieu est $14^h 59' 49'',2$, et cherchant, pour cet instant, l'heure vraie de Paris, l'asc. dr. et la déclin. de la Lune, puis l'angle horaire ; mais il faut tenir compte des différ. secondes. On trouve

| | | | |
|---|---|---|---|
| Heure vr. de Paris. | $17^h$ 0' 5''6 | Angle hor...$p$ = | $2^h 42' 17''$0 |
| ☉♈ = | 6.19.30,0 | Æ ☾ = | 5.58.15,0 |
| Déclin. ☾ = + | 25.11. 8,0 | H. vr. du lieu. = | 15. 0. 2,0. |

L'erreur n'est plus que de — 13'', qui disparaît par un calcul ultérieur ; on a donc enfin $14^h 59' 48'',8$ pour l'heure vraie demandée. (*V.* le [illegible]ex., n° 177.)

Comme ces calculs sont très longs, on évite autant qu'on peut de déterminer l'heure par des observations des hauteurs absolues de la Lune.

Pour les planètes, on fait un calcul analogue, mais qui est beaucoup plus facile, parce que les variations d'asc. dr. et de déclin. sont très lentes.

133. *Connaissant l'heure, trouver la hauteur d'un astre.* Dans notre triangle sphérique $pqz$ (fig. 18), nous connaissons deux côtés et l'angle compris, savoir : la distance polaire $pq = d$, la colatitude $pz = c$, comme précédemment, et enfin l'angle horaire $p$ qui résulte de l'heure donnée, sidér., moy. ou vraie, par les équ. (8 et 9) du nº 124. En résolvant ce triangle, on obtient pour la distance zénith. vraie $z$ (équ. 40, p. 6),

$$\cos z = \sin l \sin D\,(1 + \cot l \cot D \cos p). \qquad (13)$$

Les équ. du nº 124 donnent

$$\pm \textit{ angle horaire } p = \textit{heure sid.} - Æ\star,$$
$$= \textit{heure solaire} + Æ\odot - Æ\star. \qquad (14)$$

On emploie Æ$\odot$ pour l'heure proposée, et l'on prend — quand l'astre est du côté de l'est; + quand il est à l'ouest. Et s'il s'agit du Soleil, l'heure vraie est l'angle horaire en temps quand l'astre est vers le couchant; lorsqu'il est à l'est, on retranche l'heure vraie de $24^h$.

134. Il faut, avant d'appliquer l'équ. (13), faire éprouver aux données toutes les préparations qui ont été indiquées dans les exemples précédens, et si l'on veut obtenir la distance zénithale apparente $z'$, il faut retrancher du résultat obtenu $z$, la réfraction et ajouter la parallaxe : ces deux corrections s'appliquent, comme on voit, en sens contraire de celui qu'on prend dans d'autres cas.

Le 21 octobre 1830, on demande quelle est la hauteur du Soleil à $4^h\,20'\,32''$ du soir, temps vr. dans le lieu dont la longitude est $1^h\,17'\,46''$ ouest, et la latitude $40°\,52'\,10''$ N. Traduisant l'heure en arc, on a $p = 65°\,8'$ : au même instant, on compte, à Paris, $5^h\,38'\,18''$, d'où l'on conclut la déclin. de l'astre.

Var. en déclin. + 21′ 23″ par jour.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | 21.23 | 53″46 | 5′ 7″7 |
| | 10.41,5 | 5,755 | 10°37.16,0 A |
| Par heure... | + 53″ 27‴,5 | 267,30 | D = 10.42.23,7 A |
| | = 53″,46 | 37,42 | on prend D en — |
| | | 2,94 | |
| | 5′ 7″,7 = | + 307,66 | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| cot $l$...... | 0.0628362 | sin $l$...... | 9.8158019 |
| cot D...... | 0.7233752 | sin D...... | 9.2689978 — |
| cos $p$...... | 9.6237743 | — 2,570311.. | 0.1959857 — |
| | 0.4099857 — | cos $z$...... | 9.2807854 + |
| Nombre = — 2,570311 | | | $z$ = 78° 59′ 42″,8.. |

Si l'on veut avoir la dist. zénith. apparente, on retranchera de $z$, *réfr.* — *parall.*

Quelle est la hauteur d'Ataïr, vers l'est, le 9 juin 1830, à $9^h 18'$ du soir, temps moy. à Paris, en un lieu dont la latitude est 48° 40′ 50″. Ce problème est l'inverse de celui de la page 175; D et Æ conservent les mêmes valeurs.

Æ★ = $19^h 42' 31''33$ D = 8° 25′ 45″,24 B
Æ⊙ moy. = — 5. 9.21,14 à midi.
Heure moy. = — 9.18. 0,31
Correction = — 1.31,67 (table II, pour $9^h 18'$).

$p$ = 5.13.38,21 = 78° 24′ 33″,2.

| | | | |
|---|---|---|---|
| cot $l$...... | 9.9440496 | sin $l$...... | 9.8756631 |
| cot D...... | 0.8291855 | sin D...... | 9.1660977 |
| cos $p$...... | 9.3030237 | 2,191952.. | 0.3408311 |
| | 0.0762588 | cos $z$...... | 9.3825919 |
| Nombre = 1,191952 | | | $z$ = 76° 2′ 8″,1. |

Ce résultat s'accorde avec ce qu'on a vu page 175.

135. L'équ. (13) ne se prête pas au calcul logarithmique, et l'on peut la préparer pour cet usage, mais sans qu'il en résulte un avantage notable. Voici ces formules tirées des équ. (1, 3 et 5), p. 7:

$$\tan \phi = \cot D \cos p,$$

$$\cos z = \frac{\sin D \cos(\phi - c)}{\cos \phi}.$$

La 1[re] équ. détermine l'arc auxiliaire $\phi$, qu'on introduit dans la 2[e] avec le signe que le calcul donne.

En reprenant le dernier exemple, pour Atair, on a

| | |
|---|---|
| cot D.... 0.8291855 | sin D.... 9.1660977 |
| cos $p$.... 9.3030237 | cos $(\phi-c)$. 9.9899644 |
| tang $\phi$... 0.1322092 | cos $\phi$... — 9.7734700 |
| $\phi = 53°35'22''$ | cos $z$..... 9.3825921 |
| $c = 41.19.10$ | à très peu près, comme ci-dessus. |
| $\phi - c = 12.16.12$ | |

*Méthode des hauteurs correspondantes.*

136. Lorsqu'on a une lunette méridienne bien orientée, il est bien facile de trouver l'heure sidérale, vraie ou moyenne, par l'observation du passage d'un astre au méridien, puisqu'on connaît l'heure de ce passage, d'après ce qu'on a vu p. 156; et quant aux procédés d'orientation de cette lunette, les procédés exposés p. 166 sont d'une application facile : au reste, nous renvoyons, pour ce sujet, à ce que nous avons dit dans l'*Uranographie*, n° 413.

Faute de lunette méridienne, on recourt à la méthode des *hauteurs correspondantes*, qui consiste à noter les heures que marque la pendule quand un astre se trouve *à la même hauteur des deux côtés du méridien*. L'heure du milieu est celle du passage par ce plan; heure qui d'ailleurs est déjà connue; en la comparant à celle de la pendule, on en conclut l'avance ou le retard.

Ce procédé suppose une continuité de ciel serein qui n'est pas ordinaire dans nos climats; il faut aussi que l'observatoire soit fixe, ce qui ne permet guère de s'en servir en mer. Du reste il est fort précis.

Soient donc $t$ et $t'$ les heures marquées par une montre lorsqu'un astre se trouve en A et B (fig. 19) à la même hauteur des deux côtés du méridien PN; on suppose $t' > t$, c.-à-d. que si l'on arrive, dans l'intervalle, à 12 heures, on continuera de

compter $13^h$, $14^h$,... au lieu de $1^h$, $2^h$,... Si la marche de la montre s'est conservée uniforme dans cette durée, le temps écoulé pour aller de A en B est donné $= t' - t$, et l'astre a parcouru AB, ou le demi-angle APB; dans le temps $\frac{1}{2}t' - \frac{1}{2}t$. Ajoutant l'heure $t$ où l'astre était en A, on voit que l'instant du passage en N est arrivé quand la montre marquait l'heure

$$H = \tfrac{1}{2}(t + t').$$

Pour la précision, il convient que l'astre observé soit au moins à 12 heures de distance du méridien; et plus l'astre est éloigné de ce plan (plus il s'approche du *premier vertical*), plus l'observation est exacte, parce que le mouvement vertical a plus de rapidité. Il est donc préférable de porter l'observation sur un astre qui soit vers 90° de distance azimuthale du méridien.

Quand on observe une étoile, en comparant l'heure H que donne le calcul avec celle à laquelle on sait que le passage doit réellement se faire (nº 114), on connaît l'erreur de la montre; et s'il s'agit du Soleil, on a l'heure qui était marquée à midi vrai, du moins à une petite correction près, dont nous parlerons bientôt.

On est dans l'usage de prendre, des deux côtés du méridien, plusieurs hauteurs successives, et de noter l'heure de chaque observation. Dans ce cas, il est commode de placer successivement l'alidade de l'instrument sur des graduations équidistantes, qui procèdent, par exemple, de 10′ en 10′, et d'attendre que l'astre se présente au fil horizontal de la lunette. Mais il faut bien remarquer qu'il n'est nullement nécessaire que ces graduations désignent des hauteurs véritables de l'astre; car c'est un avantage propre à la méthode que nous exposons ici, qu'il est inutile de connaître ces hauteurs absolues, pour obtenir l'heure indiquée lors du passage, et qu'il suffit que les hauteurs soient respectivement *les mêmes des deux côtés du méridien.* Seulement quand l'instrument est réglé par un niveau à bulle d'air, il faut avoir grand soin que les indications de cette bulle, sur son tube, soient exactement les mêmes dans les deux observations correspondantes.

Lorsqu'on suit ce procédé, $t$ désigne dans notre formule la moyenne des heures d'observation avant le passage, et $t'$ la moyenne après.

137. Voici un exemple, dans lequel on voit que les diverses valeurs de H ne sont pas rigoureusement les mêmes, comme cela devrait avoir lieu : la cause en est dans les petites erreurs d'observations, de réfraction, etc. On rend le résultat indépendant de ces défauts en prenant la moyenne des nombres H pour valeur exacte.

| Hauteurs. | Est. | Ouest. | Sommes. |
|---|---|---|---|
| 0'....... | 7h51' 16"6....... | 15h37' 40"6....... | 23h28' 57"2 |
| 10'....... | 52.28,6....... | 36.30,8....... | 28.59,4 |
| 20'....... | 53.39,2....... | 35.20,8....... | 29. 0,0 |
| 30'....... | 54.50,4....... | 34. 8,8....... | 28.59,2 |
| 40'....... | 56. 2,0....... | 32.58,0....... | 29. 0,0 |
| 50'....... | 57.13,6....... | 31.48,0....... | 29. 1,6 |
| | | | 53.57,4 |
| | | Moyenne.. | 23.28.59,57 |
| | | Moitié H = | 11.44.29,78. |

L'astre observé était le Soleil; en sorte que la montre, à midi vrai, aurait retardé de 15' 30",22 sur le temps vrai; mais il y a une correction à faire, dont nous allons bientôt nous occuper.

Si l'on eût observé une étoile, il aurait fallu calculer l'heure vraie, moyenne ou sidérale de son passage (n° 114), et y comparer la valeur trouvée de H, pour en conclure l'avance ou le retard sur le temps vrai, moy. ou sidér. Mais il arrive rarement que l'on prenne des hauteurs correspondantes d'étoile, parce que ceux de ces astres qui sont le soir loin du méridien ne peuvent souvent être vus de nuit quand ils reviennent le matin à même hauteur; aussi cette méthode ne s'applique-t-elle guère qu'aux observations du Soleil.

138. Le plus souvent on sait à peu près quelle est l'avance $a$ de la montre sur le temps moyen; pour se préparer à l'observation du Soleil, le soir, il convient de connaître l'heure de la montre où il faut se rendre attentif, afin de ne pas se fatiguer à l'at-

tendre trop tôt, ou courir le risque de manquer l'astre en l'observant trop tard.

Soit $t$ l'heure du matin indiquée par la montre; il sera en effet $t - a$ de temps moyen, et $t - a - e$ de temps vrai, $e$ désignant l'équation du temps (nº 108). La distance au méridien, en temps, sera donc $12^h - t + a + e$, qui est par conséquent l'heure vraie du soir où le Soleil se retrouvera à la même hauteur que le matin. L'heure moyenne sera donc $12^h - t + a + 2e$: la montre qui avance de $a$ marquera en effet $12^h - t + 2a + 2e$, ou plutôt

$$12^h + 2(e + a) - t.$$

Lorsqu'on observe une étoile, on fait $e = 0$, et l'on a

$$12^h + 2a - t$$

pour l'heure de la montre, lors de l'observation correspondante.

Ainsi, dans notre exemple, prenons la dernière observation du matin, $t = 7^h 57' 14''$; car celles du soir se font en remontant, attendu que l'astre descend sans cesse, et que c'est la plus grande hauteur qui doit être vue la première, tandis que le matin, elle était la dernière. On présume que la montre retarde d'une minute, $a = -1'$. On a l'équ. du temps $e = -14' 27''$; $a + e = -15' 27''$; le double est $- 30' 54''$; ainsi

$$\begin{array}{rr} & 12^h \\ & - 0.30'54'' \\ -t = & - 7.57.14 \\ \hline \end{array}$$

L'heure de la hauteur correspondante est ......... $3.31.52$.

C'est quand la montre marque environ $3^h 31'$ qu'il faut se préparer à l'observation.

139. Toute cette théorie suppose que l'astre conserve sa déclinaison constante, et comme celle du Soleil varie du matin au soir, la valeur de $H$ doit subir une correction que nous allons trouver.

PM (fig. 19) est le méridien, Z le zénith, P le pôle, A le

Soleil observé le matin : comme en passant du cercle horaire AP à PB, situé de l'autre côté du méridien, à même distance, l'astre s'est rapproché du pôle en $i$, il ne se retrouve pas sur le cercle horizontal ANB, c.-à-d. à même hauteur, lorsqu'il est arrivé sur le cercle horaire PB, qui est à même distance du méridien, et il doit continuer à descendre jusqu'en C, pour y atteindre.

Or, le cercle horaire PC n'étant pas, comme PB, à la même distance horaire du méridien que PA, la moitié de l'angle APC, n'est plus l'angle $MPB = MPA = p$, et en diffère d'un arc que nous devons calculer.

Le matin, l'angle horaire est $p$ ; le soir il est $p+\alpha$, et l'angle $APC = 2p + \alpha$, dont la moitié est $p + \frac{1}{2}\alpha$ ; en sorte que pour que cette moitié, ou la moyenne $\frac{1}{2}(t+t')$, soit réduite à $p$, il en faudrait retrancher $\frac{1}{2}\alpha$ ; ainsi $x = -\frac{1}{2}\alpha$ est la correction que doit subir cette moyenne, et l'heure de la pendule à l'instant du passage est

$$H = \tfrac{1}{2}(t+t') + x.$$

Pour trouver l'arc $\alpha$, soient $ZA = z =$ dist. zénith. du Soleil, D sa déclin. quand il est en A, $l$ la latitude du lieu, dont l'arc PZ est le complément, ou $PZ = 90° - l$. Le triangle PZA, d'après la formule fondamentale de la Trigonométrie sphérique (33, page 4), donne

$$\cos z = \sin l \sin D + \cos l \cos D \cos p.$$

Dans le mouvement du Soleil, $l$ reste constant, ainsi que $z$ qui redevient le même en C ; mais D et $p$ varient ensemble, savoir : D de $\delta$, et $p$ de $\alpha$. Pour obtenir le changement $\alpha$ que $p$ éprouve quand D croît de $\delta$, il faut donc remplacer dans notre équ. $p$ par $p+\alpha$, et D par $D+\delta$. En développant et retranchant l'équ. précédente, il vient

$$(\sin l \cos D - \cos l \sin D \cos p)\delta = \cos l \cos D \sin p \cdot \alpha.$$

$\alpha$ et $\delta$ sont de petits arcs exprimés en secondes. Soit $v$ la variation diurne, aussi en secondes, qu'éprouve D, dans le temps

écoulé $t'-t=2\theta$, le changement est donné par cette proportion

$$24^h : v :: 2\theta : \delta = \tfrac{1}{12}\theta v :$$

la durée $\theta$ est exprimée en heures et fractions décimales.

D'un autre côté, l'arc $\alpha$ devient des secondes de temps, en changeant $\alpha$ en $15\alpha$ (n° 70) ; ainsi l'on a, en temps,

$$\alpha = \frac{\theta v}{180}\left(\frac{\tang l}{\sin p} - \tang D \cot p\right).$$

On prend pour l'arc $p$ la demi-durée écoulée $\theta$, traduite en degrés; D est la déclin. à l'instant du passage. Comme $\alpha$ est fort petit, la valeur n'est pas sensiblement altérée par ces hypothèses. Ainsi il vient pour la correction $x = -\frac{1}{2}\alpha$,

$$x = \frac{\theta v}{360}\left(\cot\theta \tang D - \frac{\tang l}{\sin\theta}\right).$$

1°. D est la déclin. du Soleil à midi pour le jour et le lieu proposés; on la tire de la *Conn. des Tems*, en suivant le principe donné n° 29. On prend D en — quand l'astre est dans les signes inférieurs. La latitude $l$ du lieu prend aussi le signe — dans l'hémisphère austral.

2°. $v$ est la variation diurne en déclin., donnée dans la colonne *différence* de la *Conn. des Tems*. Il convient de prendre pour $v$ la moyenne entre les variations diurnes des deux jours consécutifs que le midi sépare (*). On donne à $v$ le signe — quand l'astre s'éloigne du pôle boréal.

3°. $\theta = \frac{1}{2}(t'-t)$ désigne la demi-durée écoulée, qu'on exprime en heures de temps vrai et fractions décimales; mais on traduit $\theta$ en degrés sous les signes cot et sin. On a $\sin\theta$ positif, et $\cot\theta$ prend le signe — quand $\theta > 6^h$. Si la pendule a une

(*) Le log. de $v$ est donné pour chaque jour dans les tables astronomiques de M. Schumacher. La *Conn. des Tems* recevrait une addition utile à l'Astronomie et à la Navigation si elle contenait ces logarithmes, qui facilitent beaucoup divers calculs. (*V.* note p. 45.)

marche très différente de celle du Soleil, il faut ramener $\frac{1}{2}(t' - t)$ à être exprimé en temps vrai (nº 102).

4º. Quand la première observation est faite le soir, et la seconde le lendemain matin, le passage se fait au méridien inférieur (à minuit); D est la déclin. du Soleil à cet instant, $\nu$ est la variation de déclin. de l'astre entre deux midis consécutifs, et le dernier terme de la valeur de $x$ prend le signe $+$, au lieu de $-$.

Reprenons l'exemple précédent, qui est du 17 octobre 1827. On a le temps écoulé $= 7^h\,40'\,30''$; ainsi,

$$\theta = 3^h\,50'\,15'' = 3^h,837 = 57^\circ\,33'\,45'',$$
$$\nu = -22'\,4'',5 = -1324'',5, \qquad D = -9^\circ\,4'\,15''.$$

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| θ .... 0.58399 | A..... | 1.14974 − | ........ | 1.14974 + | | |
| ν .... 3.12205 − | cot θ... | 9.80314 | tang *l*. | 0.05595 | | 19″03 |
| c.360. 3̄.44370 | tang D. | 9.20317 − | sin θ − | 9.92633 | | 1,43 |
| A.... 1.14974 − | | 0.15665 + | | 1.27936 | $x =$ | + 20,46. |
| | 1er terme... | 1″,43. | 2e... | 19,03. | | |

| | |
|---|---|
| Or, la moyenne des heures observées est......... | H = 11h 44′ 29″78 |
| Correction.... | $x$ = + 20,46 |
| Heure marquée, par la montre, au passage........ | 11.44.50,24 |
| Temps moyen à midi vrai................... | 11.45.33,20 |
| Montre retarde sur le temps moyen............. | — 42,96. |

140. Comme ce calcul est assez long, on construit, dans tous les observatoires fixes, une table de corrections $x$ pour chaque valeur de $\theta$ croissant de 10′ en 10′ de temps, et pour la latitude du lieu. On a alors

$$x = m\nu \tan D - n\nu,$$

en posant $\qquad m = \dfrac{\theta \cot \theta}{360}, \quad n = \dfrac{\theta \tan l}{360 \sin \theta};$

et la table donne les valeurs de $m$ et $n$ pour chaque temps écoulé $\theta$.

141. Lorsqu'il arrive qu'à l'instant où l'on devrait observer la hauteur correspondante, les nuages, ou le défaut d'attention, font manquer l'heure de l'observation, on la fait quelques instans plus tard; on trouve aisément,

1°. De combien l'astre descend dans un temps donné;

2°. De quelle hauteur il s'en manque qu'on n'ait observé celle qui était correspondante.

Or, le mouvement de l'astre dans le sens vertical est sensiblement uniforme et proportionnel au temps, dans une courte durée et loin du méridien. On peut donc connaître, par une proportion, de combien de minutes la hauteur correspondante précède celle qu'on lui a substituée, et la faute se trouve réparée.

Cette remarque est surtout utile en mer, parce que l'usage du sextant ne permet guère de saisir le Soleil juste quand il est le soir à la même hauteur que le matin. Mais on la prend le soir à peu près égale à celle du matin, et l'on mesure la vitesse verticale de l'astre, par le temps qu'il met à descendre d'un petit arc déterminé.

Avec le cercle répétiteur, on rencontre les mêmes difficultés, lorsqu'on veut le faire servir à la mesure des hauteurs correspondantes.

| | |
|---|---|
| Par exemple, après avoir observé le Soleil à 8h 10′ 45″,6 du matin, le soir on a pris la hauteur trop tôt, et celle qu'on a mesurée s'est trouvée plus grande de 30′ d'arc; on l'a prise à............................. | 15h13′34″4 |
| Pour la rendre correspondante à la 1re, on en mesure une autre un peu plus tard, et l'on trouve que pour descendre de 10′ d'arc, l'astre emploie 1′ 14″,5 de temps; partant, il lui faut pour 30′............................. | 3.43,5 |
| La hauteur correspondante le soir était donc à......... | 15.17.17,9 |
| Celle du matin était à............................... | 8.10.45,6 |
| Somme......... | 23.28. 3,5. |
| Donc la pendule marquait au passage................ | 11.44. 1,75, |

sauf la correction $x$, qu'on peut aisément calculer.

Au reste, on trouve que, en $\phi$ secondes de temps, un astre monte verticalement de $s$ secondes d'arc

$$s \sin z = 15\,\phi \cos l \cos D \sin \theta.$$

(*V.* n° 163, où cette formule est démontrée.) $z$ est la distance zénithale de l'astre, $l$ la latitude du lieu, D la déclin., $\theta$ l'angle

horaire. Mais cette équ. ne détermine $s$ que quand la valeur de $z$ est connue, et nous avons déjà fait remarquer que l'avantage principal de la méthode des hauteurs correspondantes consiste à ne pas avoir besoin de connaître $z$.

142. Cette théorie suppose que la réfraction astronomique est égale lors des observations à l'est et à l'ouest; mais c'est ce qui n'arrive presque jamais, attendu que le baromètre et le thermomètre varient sans cesse. Le résultat doit donc subir une petite correction, surtout si l'astre a été observé près de l'horizon : c'est ce qu'on a toujours négligé de faire, mais la précision exige qu'on en tienne compte. Voici comment on calcule cette correction.

Soit $h$ la hauteur vraie à l'est, $r$ la réfraction; la hauteur apparente est $h+r$. On a de même $h'+r'$ pour celle qu'on observe à l'ouest, et la condition prescrite est que

$$h+r=h'+r' \quad \text{ou} \quad h=h'-(r-r').$$

Supposons $r>r'$. On voit que la hauteur $h'$ à l'ouest est trop forte de $r-r'$ pour être la même qu'à l'est; la réfraction a fait juger l'astre à égale hauteur des deux parts, tandis qu'il aurait fallu le laisser encore descendre vers l'ouest de $r-r'$, pour que sa position fût rigoureusement correspondante; on l'a observé trop tôt. L'heure indiquée par la montre doit donc être augmentée du temps $c$, nécessaire pour que l'astre puisse descendre de $r-r'$.

Mais on a pris, à l'est, plusieurs hauteurs successives, et l'on a trouvé le nombre $s$ de secondes d'arc que l'astre décrit verticalement dans un temps $\tau$; une proportion donne le temps pour décrire l'arc $r-r'$;

$$s:\tau::r-r':\frac{\tau(r-r')}{s}.$$

Telle est la correction à faire à l'heure de la montre lors de l'observation à l'ouest. Bien entendu qu'elle devient négative quand $r'>r$; alors l'astre a été observé trop tard à l'ouest. Prenant la moitié, on trouve

$$c = \frac{\tau (r - r')}{2s},$$

quantité dont il faut corriger l'heure H, p. 187, puisque la moyenne des heures doit être augmentée du 4ᵉ terme de la proportion, et que H est la moitié de cette moyenne.

Ce procédé exige, il est vrai, pour avoir les réfractions $r$ et $r'$, qu'on connaisse la hauteur de l'astre, ce qui paraît ôter à la méthode un de ses avantages, puisque cette hauteur n'était pas nécessaire à connaître. Mais, outre qu'on ne peut, sans erreur, négliger la réfraction, il est clair qu'on n'a besoin de connaître cette hauteur qu'à peu près; car un défaut dans cette hauteur influe très peu sur la différ. $r - r'$ des réfractions.

Dans notre exemple du n° 137, prenons les diff. des hauteurs et des heures extrêmes; nous voyons que le Soleil parcourt 50' de hauteur verticale en 5'57",0 de temps. Ainsi, $s = 3000''$ et $\tau = 357''$. La hauteur était 10°; le baromètre et le thermomètre marquaient $757^{mm}$ et 12° le matin, $770^{mm}$ et 3° le soir; on en tire (page 84) $r = 316'',2$, $r' = 332'',9$, $r - r' = -16'',7$, et $c = -\frac{357'' \times 16,7}{2.3000} = -0'',99$ : il faut donc diminuer de cette quantité la moyenne H. Il est facile d'en conclure qu'après la correction $x$, p. 192, l'heure de la montre, à l'instant du passage, est 11ʰ 44' 49",25, et qu'elle avance de 43",95 sur le temps moyen.

*Sur la détermination de la latitude du lieu par des passages méridiens.*

143. *Par les doubles passages des circompolaires.* Cette méthode, pour obtenir la latitude, est la meilleure de toutes, parce qu'elle est indépendante de la déclin. de l'étoile, de l'aberration et de la nutation, et que les erreurs des réfractions sont très peu influentes. Elle consiste à observer les hauteurs $ra'$, $ra$ (fig. 20) d'une circompolaire à son double passage au méridien supérieur et inférieur en $a'$ et $a$, avec un mural, ou tout autre instrument qui soit exactement dans ce plan. On peut

13..

aussi se servir du cercle répétiteur, en procédant ainsi qu'il sera bientôt expliqué n° 145. On corrige les deux hauteurs observées de la réfraction, et leur moyenne est *pr*, ou la latitude demandée *l*.

Soient *h* et *h'* les hauteurs, *r* et *r'* les réfractions, on a

$$l = \tfrac{1}{2}(h + h' - r - r').$$

Si l'on a observé *za*, *za'*, ou les distances zénith. *z* et *z'*, la colatitude *c* sera

$$c = \tfrac{1}{2}(z + z' + r + r').$$

L'erreur des réfractions peut influer sur le résultat; mais tant que l'étoile ne s'approche pas à plus de 15 à 20° de l'horizon, il y a très peu de différences entre les tables des divers auteurs.

Supposons qu'en février 1830, on ait mesuré les distances zénithales ci-après, de $\delta$ petite Ourse, à Calais, le baromètre marquant 764$^{mm}$,5 et le thermomètre centigrade + 10° à la culmination inférieure, et qu'à la supérieure ces instrumens aient donné 764$^{mm}$ et + 4°. Voici le calcul des réfractions, suivant notre table (*v.* p. 84):

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z' = 42°\,26'\,5$.... | 1.7428 | $z = 35°\,36',8$..... | 1.6369 |
| 764,5...... | 26 | 764......... | 23 |
| + 10°...... | $\bar{1}$.9832 | + 4°........ | $\bar{1}$.9932 |
| $r' = 53'',5$.. | 1.7286 | $r = 42'',9$... | 1.6324. |

| | |
|---|---|
| $z' =$ | 42°26′26″8 |
| $z =$ | 35.36.52,8 |
| $r' =$ | 53,5 |
| $r =$ | 42,9 |
| | 78. 4.56,0 |
| Moitié... $c =$ | 39. 2.28,0 |
| Compl... $l =$ | 50.57.32,0. |

On peut même tirer de là la dist. polaire *pa* de l'étoile, puisqu'elle est la demi-diff. des dist. zénith. corrigées de la réfraction. On trouve ici $d = 3°\,24'\,52'',3$.

144. *Par des hauteurs méridiennes simples.* Soit *pzn* le

méridien ( fig. 20 ), $kp$ l'horizon, $z$ le zénith, $p$ le pôle, $kc$ l'équateur, $s$ ou $s'$ un astre au méridien, $sc$ ou $sc'$ sa déclin. D, $sp$ ou $s'p$ sa distance $d$ au pôle, complément de D; l'arc $cn$ est l'inclinaison de l'équateur ou la colatitude, compl. de la latitude cherchée $l$, $cn = pz = c = 90° - l$.

On mesure la hauteur $h$ de l'astre $s$ ou $s'$, ou sa distance $z$ au zénith; on corrige de la réfr. et de la parallaxe : il est clair qu'on a $cn = sn - sc$. Et si l'astre est en $s'$, au-dessous de l'équateur, on a $cn = s'n + s'c$. Cette dernière équ. revient à la précédente, en prenant la déclin. négative, quand elle est australe. Ainsi, $90° - l = h - D$, d'où $l = 90° + D - h$. Donc, à cause de $d = 90° - D$, $z = 90° - h$, on a

$$\begin{aligned} l &= 90° + D - h = z + D \\ &= 90° + z - d = 180° - h - d. \end{aligned} \quad (1)$$

On donne à D le signe — quand la déclin. est australe.

Ces formules supposent que l'astre passe au méridien du côté du sud, entre le zénith et l'horizon. Mais les étoiles circompolaires ont deux passages, l'un en $a'$ au méridien supérieur entre le pôle et le zénith, l'autre en $a$ au méridien inférieur entre le pôle et l'horizon boréal. Les hauteurs méridiennes sont $ra'$ ou $ra$, les distances zénithales $a'z$ ou $az$. Le même raisonnement que ci-dessus conduit à l'équ. $l = h \mp d$, — dans le 1[er] cas, + dans le dernier.

Donc, *au passage d'une étoile circompolaire entre le pôle et le zénith,*

$$\begin{aligned} l &= h - d = D - z \\ &= 90° - z - d = h + D - 90°; \end{aligned} \quad (2)$$

*et entre le pôle et l'horizon boréal,*

$$\begin{aligned} l &= h + d = 90° + d - z \\ &= 90° + h - D = 180° - z - D. \end{aligned} \quad (3)$$

Pour reconnaître, à l'inspection du ciel, lequel de ces deux derniers cas a lieu, on se figure un arc qui de la polaire va à ε de la queue de la grande Ourse (*v.* fig. 2); cet arc passe sur le pôle, près de la polaire.

La méthode que nous venons d'exposer est extrêmement commode pour avoir la latitude du lieu, parce que l'observation est facile, et l'on n'a besoin, pour ainsi dire, d'aucun calcul. Il faut corriger $z$ ou $h$ de la réfraction et de la parallaxe; calculer $d$ ou D, en ayant égard à la nutation, à l'aberration et à la précession.

Les marins se servent beaucoup de ce procédé. Ils observent le Soleil pour en obtenir la hauteur à midi vrai, et comme dans les instans voisins, cette hauteur varie peu, une petite erreur sur l'heure de la montre à midi vrai n'influe pas sensiblement sur le résultat. Ils trouvent les élémens du calcul dans la *Conn. des Tems,* en estimant à peu près l'heure contemporaine de Paris (*v.* n° 29), d'après la longitude approchée du lieu. S'il s'agit d'une étoile, il faut d'abord connaître l'heure du passage (n° 114), et celle de la montre au même moment, afin de saisir l'astre à cet instant.

Remarquez que le Soleil présente beaucoup plus de facilité que les étoiles, parce qu'on n'a pas besoin de faire des corrections de précession, nutation et aberration, et qu'il n'est nécessaire que d'avoir égard à la réfraction et à la parallaxe de hauteur.

Étant en mer à $2^h\ 15'$ environ de longitude est, on mesure une hauteur du Soleil à midi vrai, le 25 octobre 1830, et l'on trouve qu'elle est $33°\ 39'\ 7''$; en la corrigeant de la réfr. — parall., cette hauteur est réduite à,

$$h = \quad 33°37'36''5$$

On compte alors à Paris $9^h\ 45'$ du matin, et la déclin. de la *Conn. des Tems* ($12°\ 1'\ 45''$ A) devient. $\quad D = -\ 11.59.47,6$

$$+\ 90°$$

L'équ. $l = 90° + D - h$ donne.................. $\quad l = \quad 44.22.35,9.$

145. *Par des hauteurs circomméridiennes*, c.-à-d. l'astre étant observé près du méridien.

Le plus grand inconvénient de la méthode précédente est de ne donner qu'une seule valeur de la latitude, parce que l'astre ne peut être observé qu'à l'instant où il traverse le méridien. Le procédé que nous allons exposer est dû à Delambre;

il n'exige pas que l'astre soit dans le méridien, et par conséquent permet de répéter les observations pendant un certain temps; chacune donne une valeur de la latitude; ces valeurs doivent très peu différer entre elles, et leur moyenne est considérée comme indépendante des erreurs d'observation.

Le pôle est en $p$ (fig. 21), le zénith en $z$, $pzmo$ est le méridien, $s$ un astre près de ce plan, $m$ le lieu où cet astre y entre, $ps$ son cercle horaire. On a mesuré la hauteur $H = s$ de l'astre en $s$, ou sa dist. zénith. $Z = zs$, que nous supposerons corrigée de la réfraction et de la parallaxe, comme on l'a dit n°s 68 et 91 : il s'agit d'en conclure la hauteur ou la dist. zénith., quand l'astre est en $m$ au méridien. On a visiblement

$$ps = pm = d = 90^\circ - D, \quad pz = 90^\circ - l,$$
$$zm = pm - pz = ps - pz = l - D.$$

Du centre $z$, tracez un arc $so$; vous avez $zs = zo$. Le point $o$ est à même hauteur que $s$ : faites $mo = x$, quantité dont l'astre doit encore monter, partant de $s$, pour atteindre en $m$ au méridien; et calculez d'abord ce petit arc $x$, pour en conclure la hauteur méridienne de l'astre, et par suite la latitude du lieu.

La Trigonométrie sphérique donne, pour le triangle $pzs$, (équ. 33, p. 4),

$$\cos zs = \cos pz . \cos ps + \sin pz . \sin ps . \cos p$$
$$= \sin l . \sin D + \cos l . \cos D . \cos p.$$

Mettons $1 - 2\sin^2 \frac{1}{2} p$ pour $\cos p$;

$$\cos zs = \sin l \sin D + \cos l \cos D - 2\cos l \cos D \sin^2 \tfrac{1}{2} p$$
$$= \cos(l - D) - 2\cos l \cos D \sin^2 \tfrac{1}{2} p.$$

Or, $zs = oz = zm + x$; le 1er membre devient donc

$$\cos zs = \cos x \cos zm - \sin x \sin zm$$
$$= (1 - \tfrac{1}{2} x^2) \cos(l - D) - x \sin(l - D),$$

en développant par les séries (24 et 25), page 3, savoir

$\cos x = 1 - \frac{1}{2}x^2$, $\sin x = x$, car $x$ étant très petit, on peut négliger les troisièmes puissances de cet arc. En égalant donc ces valeurs de cos $zs$, réduisant et changeant les signes, notre équ. devient

$$\tfrac{1}{2}x^2 \cos(l-\text{D}) + x \sin(l-\text{D}) = 2 \cos l \cos \text{D} \sin^2 \tfrac{1}{2}p. \quad \text{(A)}$$

C'est de cette équ. qu'il s'agit de tirer la valeur de l'inconnue $x$. D'abord nous en négligeons le carré, savoir le 1^er terme de l'équ. qui est fort petit, et nous avons, pour première approximation,

$$x = \frac{2 \cos l \cos \text{D}}{\sin(l-\text{D})} . \sin^2 \tfrac{1}{2}p.$$

On a visiblement (n° 144), $l - \text{D} =$ la dist. zénith. $z$ de l'astre lorsqu'il est au méridien $= 90° -$ la hauteur méridienne $h$. D'ailleurs, $x$ est ici la longueur d'un arc pris sur la circonférence dont le rayon est un : pour l'exprimer en secondes, il faut changer $x$ en $x \sin 1''$ (*v.* p. 3); ainsi on trouve pour le nombre de secondes de l'arc $x$,

$$x = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}p}{\sin 1''} \times \frac{\cos l \cos \text{D}}{\cos h}.$$

Le second facteur reste constant pour toutes les valeurs de $p$, c'est-à-dire pour toutes les observations qu'on fera près du méridien ; le 1^er facteur varie seul ; faisons

$$k = \frac{2 \sin^2 \frac{1}{2}p}{\sin 1''}, \quad \text{(B)}$$

et nous aurons

$$x = k . \frac{\cos l \cos \text{D}}{\cos h}. \quad \text{(C)}$$

On peut ici remplacer cos $h$ par sin $z$.

Pour la facilité du calcul, on réduit les valeurs de (B) en table, d'où l'on tire à vue celles de $k$ qui répondent aux angles horaires $p$; c'est-à-dire que connaissant la distance $p$ de l'astre au méridien, en temps, on trouve $k$: c'est la table X des *réductions au méridien*. (*V.* n° 287.)

On introduira ce nombre $k$ dans la formule (C); un calcul très facile fera donc connaître la correction $x$, qui ajoutée à la hauteur H observée en $s$, ou retranchée de la dist. zénith. Z, donnera la valeur de $h$, ou de $z$, qui est celle de l'astre quand il est au méridien même, savoir :

$$h = \mathrm{H} + x,$$
$$z = \mathrm{Z} - x. \qquad \text{(D)}$$

Cela fait, l'équ. (1), page 197, donnera la latitude $l$; car on retombe sur la théorie du n° 144, et l'on est dans le même cas que si l'astre eût été observé au méridien sud.

Ordinairement on prend plusieurs hauteurs successives (*) H', H'',..., et l'on note les heures $t$, $t''$,..., qui s'y rapportent. Chaque hauteur comporte sa correction $x'$, $x''$,... qu'on calcule comme il vient d'être dit; d'où résultent autant de hauteurs méridiennes $\mathrm{H}' + x'$, $\mathrm{H}'' + x''$,... qui doivent être très peu différentes les unes des autres: la moyenne entre $n$ observations est considérée comme compensant les erreurs; elle est

$$\frac{\mathrm{H}' + \mathrm{H}'' + \ldots}{n} + \frac{x' + x'' + \ldots}{n} \qquad \text{(E)}$$

= *la moyenne* H *entre toutes les hauteurs*

+ *la moyenne* x *entre toutes les corrections.*

De ces deux parties, la 1re H se lit sur l'instrument dont on se sert pour observer (du moins en corrigeant de la réfr. et de la parallaxe); quant à la seconde, comme le facteur $k$ dans l'équ. (C) varie seul avec $p$, il faudra prendre pour $k$ la moyenne entre les valeurs $k'$, $k''$,... qu'on tire de la table X en correspondance avec les divers angles horaires $p'$, $p''$,...; cela suit de ce que $\frac{\cos l \cos \mathrm{D}}{\cos h}$ est un facteur commun de toutes les quantités $k'$, $k''$,....

(*) On peut continuer les observations tant que, pendant 1'' de temps, la hauteur ne change pas de plus de 1'' d'arc.

146. Ainsi, 1°. on observe diverses hauteurs ou dist. zénith. consécutives d'un astre près du méridien, tant avant qu'après son passage, et près de ce plan; on note les heures correspondantes indiquées par la montre.

2°. On calcule l'heure du passage de l'astre (c'est midi vrai, quand il s'agit du Soleil), et l'on en conclut l'heure P que doit marquer la montre à cet instant, d'après sa marche connue (n° 102).

3°. On prend les différences entre cette dernière heure P et les heures $t'$, $t''$,... indiquées pour chaque observation; ces différ. sont, en minutes et secondes de temps, les valeurs des angles horaires $p'$, $p''$,...; ces angles servent à trouver, par la table X, les nombres $k'$, $k''$,... : ce sont autant de réductions au méridien; leur moyenne est la valeur de $k$ qu'il faut introduire dans l'équ. (C) pour obtenir la correction $x$.

4°. Pour calculer $x$, il faut observer que l'équ. (C) contient la latitude $l$, et la hauteur $h$, ou la dist. zénith. $z$ de l'astre au méridien, qui sont précisément les inconnues de la question. Mais on y emploie pour $l$ une valeur approchée, qui est toujours connue, ne fût-ce que celle qu'on tire des équ. (1, p. 197) en y prenant pour $h$ ou $z$, les arcs obtenus par les observations, et considérés comme étant ceux qui subsistent au passage méridien. Et quant à $h$ ou $z$, on tire cet arc de la même équ., savoir :

$$h = 90° + D - l, \quad z = l - D.$$

Ces valeurs approchées ôtent, il est vrai, au calcul sa précision; mais comme le coefficient $k$ est un très petit arc, il est permis d'altérer un peu l'autre facteur, sans changer sensiblement le résultat, sauf à recommencer ensuite le calcul, avec la valeur de $l$ à laquelle on a été conduit.

5°. Enfin, une fois qu'on connaît la correction $x$ que doit subir la moyenne H ou Z, les équ. (D) donnent la hauteur $h$, ou la dist. zénith. $z$, qui répond au méridien, l'astre étant $m$. Il ne reste plus, pour avoir la latitude cherchée $l$, qu'à introduire pour $h$, ou pour $z$, sa valeur dans l'équ. (1) du n° 144.

Bien entendu que H ou Z est corrigé de la réfraction (en

ayant égard au baromètre et au thermomètre, comme on l'a dit n° 68) et de la parallaxe ; que la déclin. D prend le signe — quand elle est australe; et qu'enfin, si l'on a observé une étoile, on en corrigera l'asc. dr. et la déclin. des précession, nutation et aberration, corrections qui sont toutes faites, pour le Soleil, dans la *Conn. des Tems.*

Il n'est pas nécessaire que l'heure soit connue avec une extrême précision, et pourvu qu'on ait pris un égal nombre de hauteurs avant le passage qu'après, le résultat sera toujours sensiblement exact. Les observations faites après le passage répondent, il est vrai, à des valeurs négatives de $p$ ; mais comme $k$ contient le carré de $\sin \frac{1}{2} p$, les nombres $k'$, $k''$,... sont toujours positifs des deux côtés du méridien.

On voit que, par ce procédé, on obtient pour $l$ une quantité égale à la moyenne entre toutes les latitudes qu'on aurait déduites des diverses observations, comme si l'on eût fait en entier, pour chacune, le calcul de l'équ. (C); c'est donc comme si plusieurs astronomes avaient observé ensemble l'astre dans le méridien, et le résultat doit être considéré comme exempt des erreurs commises dans toutes ces observations.

147. Nous avons supposé que l'astre passe au méridien du côté du sud ; mais, pour les circompolaires, il faut examiner si ce passage est supérieur ou inférieur; car, suivant les cas, on doit choisir entre les équ. (2) ou (3) du n° 144. Le passage se faisant en $a'$ (fig. 20) *entre le pôle et le zénith*, il n'y a rien à changer à l'équ. (D), en se conformant d'ailleurs à l'équ. (2), p. 197; mais s'il a lieu *entre le pôle et l'horizon boréal* en $a$, les équ. (D) exigent qu'on prenne $x$ en signe contraire, attendu que l'astre entre au méridien en descendant, au lieu de monter ; on se sert alors de l'équ. (3). Ainsi, il faudra employer dans l'équ. (C), pour $h$ ou $z$, la valeur ci-après,

1°. Pour le *passage du côté du sud*, on a

$$h = 90° + D - l, \quad z = l - D.$$

2°. Pour les *circompolaires entre le pôle et le zénith*,

$$h = 90° + l - D, \quad z = D - l.$$

3°. Pour les *circompolaires au-dessous du pôle*,

$$h = l + D - 90°, \quad z = 180° - l - D.$$

Mais après avoir trouvé $x$ par l'équ. (C), on obtiendra une valeur plus exacte de $h$ ou $z$ par les équ. (D); seulement dans le dernier cas, on prendra $x$ en signe contraire dans les équ. (D). Après quoi on tirera $l$ des équ. précédentes, ou de celles de la p. 197.

Le 10 octob. 1830, on a pris six hauteurs du Soleil, près du méridien; la pendule retardait de 1′ 5″,9 sur le t. moy., et comme ce temps retarde alors de 12′ 52″,1 sur le Soleil vrai (d'après la *Conn. des Tems*), on en conclut qu'à midi vrai la pendule marquait $11^h 46' 2''$. La déclin. ☉ est D = 6° 33′ 6″ A, et la moyenne des six hauteurs observées, corrigée de réfr. — parall. est H = 40° 35′ 40″, ce qui indique que la latitude diffère peu de $l$ = 42° 51′ (par l'équ. 1, n° 144). On a trouvé

| | | | |
|---|---|---|---|
| Pendule.... | 11h 46′ 2″ à midi vrai. | | |
| Observ. à... | 11.40.15 | Diff... 5′ 47″ | $k$ = 65″7 |
| | 44. 8 | ....... 1.54 | 7,1 |
| | 45.40 | ....... 0.22 | 0,3 |
| | 47.22 | ....... — 1.20 | 3,5 |
| | 49.11 | ....... — 3. 9 | 19,6 |
| | 54.49 | ....... — 8.47 | 151,5 |
| | | | 247,6 $k$=41″,27. |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 90° | $k$....... 1.6156345 | | |
| $l$ = 42°51′ 0″..cos $l$..... 9.8651849 | | 90° + D = | 83°26′54″ |
| D = —6.33. 6...cos D.... 9.9971545 | | — H = — | 40.35.40 |
| $h$ = 40.35.54...cos $h$.. — 9.8804078 | | — $x$ = — | 39,6 |
| $x$ = 39″,59. 1.5975661 | | $l$ = | 42.50.34,4. |

Comme ce résultat diffère un peu de la valeur qu'on a supposée pour $l$, on peut refaire le calcul en prenant $l$ égal à l'arc qu'on vient d'obtenir. Mais comme cette opération, qui n'exige d'ailleurs que le changement de quelques chiffres, conduit au même nombre pour $x$, on retrouve pour $l$ la même quantité: c'est donc celle qu'on cherche, et l'erreur de la supposition n'a pas influencé le résultat.

Voici un exemple d'observation d'étoile.

On a pris, à Florence, dix distances zénith. de Fomalhaut

près du méridien, le 14 novembre 1830; la moyenne, corrigée de la réfraction, est Z = 74° 18′ 10″,75 : la position de cette étoile, en ayant égard à la nutation, la précession et l'aberration, est

$$Æ\star = 22^h 48' 16'',80, \qquad D = -30^\circ 31' 3'',08,$$

La pendule suivait le temps moyen. Comme la longitude de Florence est 35′ 42″ de temps à l'est du méridien de Paris, et que l'asc. dr. moy. du Soleil croît, dans cette durée, de 5″,87, cette asc. dr. à midi moy. de Florence est plus petite que celle de Paris de 5″,87 (table II), parce que midi y arrive plus tôt qu'en cette dernière ville de 35′ 42″, temps pendant lequel l'asc. dr. du Soleil moyen continue de croître (n° 107). On a (n° 104) pour cette asc. dr. à midi moy. de Paris, 15ʰ32′17″,13; donc, elle est 15ʰ32′11″,26 à midi moy. de Florence.

Calcul de l'heure du passage (n° 114).

| | | | |
|---|---|---|---|
| Æ★ ........ = | 22ʰ48′ 16″80 | On suppose $l$ = | 43°47′ 0″ |
| —Æ☉ moy. = — | 15.32.11,26 | On a D = — | 30.31.3,08 |
| | 7.16. 5,54 | $z$ = | 74.18.3 |
| Correction........ — | 1.11,45 (table I). | | |
| Pendule avance. — | 1.23,09 sur temps moy. | | |
| | 7.13.31,00 heure de la pendule au passage. | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Observ. à | 7. 6. 3 | Différ.... 7′ 28″; d'où $k$ = | 109″46 |
| | 7.11 | .......... 6.20 ............ | 78,75 |
| | 8.17 | .......... 5.14 ............ | 53,77 |
| | 10.27 | .......... 3. 4 ............ | 18,47 |
| | 12.50 | .......... 0.41 ............ | 0,92 |
| | 14. 2 | ........— 0.31 ............ | 0,52 |
| | 15.33 | ........— 2. 2 ............ | 8,12 |
| | 16.49 | ........— 3.18 ............ | 21,38 |
| | 18.24 | ........— 4.53 ............ | 46,82 |
| | 19.35 | ........— 6. 4 ............ | 72,26 |
| | | 10ᵉ ou $k$ = 41″,047...... | 410,47 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| $k$...... | 1.61328 ............ | | |
| cos $l$... | 9.85851 | Z = | 74° 18′ 10″75 |
| cos D.. | 9.93524 | — $x$ = — | 26,52 |
| sin $z$.— | 9.98349 | D = — | 30.31. 3,08 |
| $x$. .... | 1.42354... 26″,52 = $x$, | | 43.46.41,15 = $l$. |

Voici encore deux exemples tirés du *Système métrique*, t. I, p. 286 et 587.

On a fait 14 observations de β petite Ourse, près de son passage supérieur au méridien, à Dunkerque, le 7 mars 1796 : la pendule suivait le temps sidéral. On suppose $l = 51°\,2'\,0''$ ; on avait $D = 74°\,59'\,8'',49$, $Z = 23°\,57'\,27'',36$.

Æ★ = 14h51′30″
Pendule...... 0. 8.37 retard sur t. sid.

Marque....... 15. 0. 7 à l'instant du passage.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Observ. à..... | 14.50.58 | Differ...... 9′ 9″; | d'où $k$ = 164″37 |
| | 52. 9 | 7.58 | 124,61 |
| | 53.37 | 6.30 | 82,95 |
| | 55. 9 | 4.58 | 48,43 |
| | 56.32 | 3.35 | 25,21 |
| | 58. 6 | 2. 1 | 7,99 |
| | 59.13 | 0.54 | 1,59 |
| | 15. 0.34 | 0.27 | 0,40 |
| | 1.58 | 1.51 | 6,72 |
| | 3. 2 | 2.55 | 16,70 |
| | 4.25 | 4.18 | 36,30 |
| | 5.35 | 5.28 | 58,68 |
| | 6.55 | 6.48 | 90,79 |
| | 8.45 | 8.38 | 146,33 |
| | | | 14$k$ = 811,07 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| D = 74°59′8″49 | cos D... 9.41340 | | |
| $l$ = 51. 2.0 | cos $l$.... 9.79856 | | |
| z = 23.57.8,49 | sin z..— 9.60850 | | |
| | 1.60346 | | |
| | 14$k$.... 2.90906 | | |
| | 14...— 1.14613 | D = | 74.59. 8,49 |
| $x$ = 23″,25 .... $x$..... | 1.36639 ....... | $x$ = + | 23,25 |

La moy. des dist. zénith. corrigée de la réfr... — Z = — 23.57.27,36

Latitude de Dunkerque.. $l$ = 51. 2. 4,38.

Le 27 janv. 1794, à Barcelonne, on a pris 16 dist. zénith. de β petite Ourse;

la moyenne corrigée de la réfraction était $Z = 63.37.15,66$. On a trouvé $16k = 1623,39$. D'ailleurs, c'était un passage inférieur, et l'on avait

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 180° |
| $\cos l$ ....... | 9.87527 | | | Valeur supposée $-l=$ | $-$ 41.22.40 |
| $\cos D$ ...... | 9.41320 | | | $-D=$ | $-$ 74.59.36 |
| $\sin z$ .....$-$ | 9.95228 | 180° | | $z=$ | 63.37.44 |
| | $\bar{1}$.33619 | $-D=$ | $-$ 74.59.36,34 | | |
| $16k$ ....... | 3.21042 | $-x=$ | $-$ 22,00 | | |
| 16 .......$-$ | 1.20412 | $-Z=$ | $-$ 63.37.15,66 | | |
| $x = 22''00$.. | 1.34249 | $l=$ | 41.22.46,00. | | |

148. On aura soin que la pendule marque le temps sidéral lorsqu'on observera une étoile, et le temps vrai s'il s'agit du Soleil; et même elle ne doit, ni avancer, ni retarder sur cette espèce de temps. S'il n'en est pas ainsi, au lieu de corriger les durées écoulées qui servent à trouver $k', k'' \ldots$, voici comment on tient compte des erreurs de la marche de la pendule.

Supposons qu'elle avance de $a$ secondes en 24 heures sur le temps dont il s'agit, c'est-à-dire sur la durée de la révolution complète de l'astre ($a$ sera négatif dans le cas d'un retard). Il est clair que chaque angle horaire indiqué $p'$, doit être réduit dans le rapport assigné, ainsi qu'il a été dit n° 102. Ainsi, $p$ doit être remplacé par $(1 - 0,000011.a)\,p = \alpha p$, en posant, pour abréger,

$$\alpha = 1 - 0,000011.a.$$

$\sin^2 \frac{1}{2} p$ sera donc changé en $\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha p)$; mais comme cet arc est toujours fort petit, attendu que $\alpha$ est peu différent d'un, et que $p$ ne dépasse pas 16′ de temps, ce qui répond, au plus, à un arc de 3 à 4 degrés, on peut sensiblement dire que $\sin^2 \frac{1}{2}(\alpha p) = \alpha^2 \sin^2 \frac{1}{2} p$. D'ailleurs, $\alpha^2 = 1 - 0,000022.a$, en négligeant le carré du 2ᵉ terme; on voit donc qu'il suffit, pour avoir égard à l'avance de la pendule, de remplacer $k', k'' \ldots$ par $ik', ik'', \ldots$ en prenant

$$i = 1 - 0,000022.a. \qquad \text{(F)}$$

Ainsi, l'on doit remplacer la moyenne $k$ par $ik$, c.-à-d. introduire le facteur $i$ dans l'équ. (C) qui devient

$$x = ik.\frac{\cos l \cos D}{\cos h}. \qquad (G)$$

Par exemple, lorsque la pendule marque le temps moyen, et qu'on observe une étoile, il y a un retard de 235",909 en $24^h$ sur la marche de l'astre, et il faut prendre (n° 73) $a = -235'',909$; en sorte que le facteur $i$ devient alors

$$i = 1,005483, \quad \log i = 0.0023748.$$

Réciproquement, si l'on observe le Soleil et que la pendule indique le temps sidéral, la différ. entre les deux distances ⊙♈ consécutives, à la date proposée, sera la valeur de $a$.

Ce calcul est fort simple, nous en donnerons plus tard une application.

149. Lorsqu'on a pris des hauteurs du Soleil, et qu'on exige une extrême précision, il faut avoir égard au changement de déclin. de l'astre dans la durée des observations. En effet, la hauteur corrigée $H'$, qui répond à la distance $p'$ au méridien et à la correction $x'$ (équ. C), donne la hauteur méridienne $H' + x'$, quand la déclin. ne change pas. Mais si, de cet instant jusqu'à midi vrai, l'astre se rapproche de $\iota$ du pôle boréal à chaque minute de temps, dans les $t'$ minutes qui restent pour atteindre au méridien, la déclin. croît et l'astre monte de $\iota t'$; ainsi, la hauteur méridienne est augmentée de $\iota t'$, et cette hauteur est $H' + x' + \iota t'$ : pour la 2ᵉ observation, elle est $H'' + x'' + \iota t''$, et ainsi des autres.

On voit donc qu'il faut ajouter la quantité $\iota(t' + t'' + \ldots)$ au numérateur de la 2ᵉ fraction (E), pour avoir la moyenne des $n$ résultats; mais on devra prendre en — les $t$ qui se rapportent aux angles horaires à l'ouest.

Ainsi, la hauteur méridienne, au lieu d'être $H + x$, est en effet $H + x + \frac{\iota(t' + t'' + \ldots)}{n}$, c'est-à-dire qu'il faut augmenter $x$ d'une quantité $x' = \iota \times$ la moyenne des distances au méridien. Soient E, O, les sommes des angles horaires observés tant avant qu'après midi vrai, et *exprimés en minutes de*

*temps;* la moyenne est $\frac{E - O}{n}$. Il faut donc augmenter $x$ de la quantité

$$x' = \frac{\iota(E - O)}{n},$$

$\iota$ étant le mouvement en secondes d'arc de la déclin. du Soleil en 1' de temps. On prend $\iota$ en — quand l'astre s'éloigne du pôle visible. $x'$ est aussi exprimé en secondes d'arc. Il est très facile de calculer $\iota$; on cherche, dans la *Conn. des Tems*, la variation diurne de la déclin. solaire, et l'on en tire la variation horaire (n° 16), puis on divise par 60.

Ainsi, dans l'exemple de la p. 204, E = 8' 3", O = 13' 16", differ. E — O = — 5' 13" = — 5',21, dont le sixième est — 0,87. D'un autre côté, le Soleil s'éloigne du pôle boréal de 22' 45" par jour, ou 57" par heure, savoir $\iota$ = — 0",95. Le produit est $x' = +$ 0",83. Ajoutant à $x$ = 39",59, la correction de H est $x$ = 40",42, et la latitude est enfin..... $l$ = 42° 50' 33",6.

150. Jusqu'ici, nous avons négligé le terme en $x^2$ dans l'équ. (A) : ce terme n'a le plus souvent qu'une valeur insensible, du moins si l'on se contente de dixièmes de seconde pour $k$ et $l$, et si l'on ne s'écarte pas du méridien au-delà de 8 à 10 minutes de temps, de chaque côté. On est toujours maître de remplir ces conditions, et la théorie précédente suffit très bien. D'ailleurs on gagne peu, pour la précision, à prolonger la durée des observations, et 16' sont assez pour prendre 12 à 20 mesures de distances au zénith, qui suffisent pour détruire les erreurs de divisions du limbe, celles du pointé et des influences atmosphériques.

Toutefois il est utile de savoir quelle est la grandeur des parties négligées; tenons donc compte des $x^2$ dans l'équ. (A), qui devient, par transposition,

$$x \sin(l - D) = 2 \cos l \cos D \sin^2 \tfrac{1}{2} p - \tfrac{1}{2} x^2 \cos(l - D);$$

et divisant par $\sin(l - D) = \sin z = \cos h$,

$$x = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{\cos l \cos D}{\cos h} - \tfrac{1}{2} x^2 \tang h.$$

Mettons dans $x^2$, pour $x$, sa valeur approchée (C), qui est le 1[er] terme, et il vient

$$x = 2 \sin^2 \tfrac{1}{2}p \cdot \frac{\cos l \cos D}{\cos h} - 2 \sin^4 \tfrac{1}{2}p \tang h \left( \frac{\cos l \cos D}{\cos h} \right)^2:$$

enfin, changeons $x$ en $x \sin 1''$, pour exprimer $x$ en secondes, puis conservons la valeur (B) pour $k$, et faisons $m = \frac{2 \sin^4 \frac{1}{2}p}{\sin 1''}$; et nous trouvons, en introduisant, lorsque cela est nécessaire, le facteur $i$, comme ci-devant (équ. G);

$$x = k \left( i \, \frac{\cos l \cos D}{\cos h} \right) - m \tang h \left( i \, \frac{\cos l \cos D}{\cos h} \right)^2, \qquad \text{(K)}$$

On peut ici remplacer $\cos h$ par $\sin z$, et $\tang h$ par $\cot z$.

Nous répéterons que l'équ. (K) sert à trouver $x$ en secondes, et par suite $h$ ou $z$ par l'équ. (D); que cet arc $h$ ou $z$ s'applique avec l'équ. (1, p. 197), lorsque l'astre passe au méridien du côté du sud, et avec (2) quand il entre dans ce plan entre le pôle et le zénith; enfin, s'il passe entre le pôle et l'horizon, il faut prendre $x$ en signe contraire et se servir de l'équ. (3).

Telle est l'équ. rigoureuse et complète qui sert aux applications les plus précises. On trouve dans notre table les valeurs de $m$, et l'on en prend la moyenne, précisément comme on le fait pour celles de $k$. Dans les exemples proposés, lorsque la table ne s'étend pas jusqu'aux angles horaires qui y sont employés, on calcule directement les valeurs de $k$ et de $m$ qui dépassent celles de cette table. (*V.* l'ex. p. 213.)

On a pris, le 1[er] novembre 1812, six distances zénithales de $\alpha$ Verseau près du méridien; la moyenne, corrigée de la réfraction, est Z = 49° 53′ 37″,52. Voici d'abord le calcul de l'heure de la pendule à l'instant du passage. Elle marque le temps moyen, sur lequel elle retarde de 14′ 45″,11.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $Æ_\star$ = | 21h56′41″95 | | | On suppose $l$ = | 48°40′0″ |
| ⊙♈ = | 9.35.28,90 | | | On a − D = + | 1.10.24,98 |
| | 7.32.10,85 | | | Éq. p. 203 $z$ = | 49.50.24,98 |
| Corr., l. I.…. | − 1.14,08 | | | | |
| Retard……. | − 14.45,11 sur t. moy. | | | | |
| Pendule……. | 7.16.11,66 à l'instant du passage. | | | | |
| Observ. à…. | 7. 3.52,4 | Diff. 12′19″3 | $k$ = 298″05 | $m$ = | 0″22 |
| | 9.22,9 | 6.48,8 …… | 91,14 | | 0,02 |
| | 15.46,4 | 0.25,3 …… | 0,35 | | 0,05 |
| | 19.44,5 | − 3.32,8 …… | 24,69 | | 0,00 |
| | 25.17,0 | − 9. 5,3 …… | 162,17 | | 0,06 |
| | 30.38,5 | −14.26,8 …… | 409,66 | | 0,40 |
| $i$……… | 0.00237 | Sommes… | 986,06 | | 0,70 |
| cos $l$…. | 9.81983 | Sixième.. $k$ = | 164,343 | $m$ = | 0,12 |
| cos D… | 9.99991 | | | | |
| sin $z$.. − | 9.88324 | cot $z$….. | 9.92627 | Z = | 49°53′37″52 |
| | 9.93887…. | double… | 9.87774 | D = − | 1.10.24,98 |
| $k$…… | 2.21575 | $m$……. | $\bar{1}$.07918 | − $x$ = − | 2.22,68 |
| 142″76.. | 2.15462 | 0,08….. | $\bar{2}$.88319 | $l$ = | 48.40.49,86, latit. cherchée. |
| − 0,08 | | | | | |
| 142,68 = 2′22″,68 = $x$. | | | | | |

De toutes les étoiles, celles dont on préfère l'observation, sont la polaire et δ petite Ourse. La marche de ces circompolaires est si lente, qu'on a tout le loisir de faire les observations, et qu'on peut même les prolonger plus de 30′ de temps avant et après leur passage au méridien. Car dès que la hauteur n'est pas très grande, les termes négligés sont longtemps sans avoir d'influence, et l'on est en droit d'appliquer l'équ. (K); mais il est encore un motif important qui fait donner la préférence à ces étoiles.

Si l'on observe des passages du Soleil, on est obligé de recourir aux tables pour avoir la déclin. de l'astre, et les erreurs de ces tables se portent en entier sur la latitude obtenue. Les étoiles n'ont pas cet inconvénient d'une manière aussi marquée, parce que les catalogues sont beaucoup plus sûrs que les tables solaires; mais en observant l'une des circompolaires α et δ pe-

tite Ourse, aux deux passages inférieur et supérieur, on peut obtenir une latitude indépendante des erreurs sur la déclin. de l'étoile. Car soient $l$ la latitude cherchée, D la déclin. de l'astre tirée des tables; $e$ l'erreur inconnue dont cet arc est affecté, en sorte que cette déclin. soit $D + e$, $z$ et $z'$ les distances zénithales méridiennes aux deux passages, telles qu'on les tire du calcul de l'équ. (K), on a (équ. 2 et 3, p. 197),

$$\text{passage supérieur}\ldots\ l = D + e - z,$$
$$\text{passage inférieur}\ldots\ l = 180^\circ - D - e - z'.$$

Or, lorsqu'on calcule la latitude avec la déclin. fautive D, on en tire deux valeurs $l'$ et $l''$ (savoir, en faisant $e$ nul),

$$\text{passage supérieur}\ldots\ l' = D - z = l - e,$$
$$\text{passage inférieur}\ldots\ l'' = 180^\circ - D - z' = l + e.$$

La moyenne, ou demi-somme des résultats, est visiblement $\frac{1}{2}(l' + l'') = l$, c'est-à-dire que cette moyenne est aussi exacte que si la déclin. D n'avait pas été défectueuse. Mais en outre la demi-différ. est $\frac{1}{2}(l'' - l') = e =$ l'erreur du catalogue, ce qui offre un moyen de corriger la table par observation.

Le 13 mai 1819, on a pris 14 distances zénithales de la polaire près de la culmination inférieure, à Shanklin, dans l'île de Wight. La moyenne, corrigée de la réfraction, a donné $Z = 41^\circ\ 1'\ 54'',10$. On suppose $l = 50^\circ\ 37'\ 33''$, et l'on a $D = 88^\circ.20.28,87$. Les observations étaient faites avec un chronomètre réglé sur le temps moyen, mais il retardait par jour, sur cette durée, de. . . . . . . . . . . . . . . — 2″45

Retard du temps moyen sur temps sid.. — 235,91

log $i$ = 0,0023930. . . . . . . . . . . 238,36.

On trouve d'ailleurs que l'heure indiquée par le chronomètre à l'instant du passage est $9^h\ 37'\ 32''$. Voici le tableau des heures d'observations comparées à la précédente, et des valeurs correspondantes de $k$ et de $m$ tirées de la table XIV : les moyennes sont $k = 490'',858$, $m = 1'',008$.

Chronom. . $9^h 37' 32''$ lors du passage.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Observ..... 9.13.15 | Diff.... 24′ 17″ | $k =$ 1156″75 | $m =$ 3″24 |
| 16.40 .......... | 20.52 ....... | 854,35 ..... | 1,77 |
| 21.21 .......... | 16.11 ....... | 514,03 ...... | 0,64 |
| 33.55 .......... | 3.37 ....... | 25,68 ..... | 0,06 |
| 36.44 .......... | 0.48 ....... | 1,26 ..... | 0,00 |
| 39.55 .......... | 2.23 ....... | 11,15 ..... | 0,00 |
| 42.27 .......... | 4.55 ....... | 47,46 ..... | 0,01 |
| 45.40 .......... | 8. 8 ....... | 129,87 ..... | 0,04 |
| 48.56 .......... | 11.24 ....... | 255,12 ..... | 0,15 |
| 51.53 .......... | 14.21 ....... | 404,20 ..... | 0,39 |
| 54.40 .......... | 17. 8 ....... | 576,12 ..... | 0,81 |
| 56.48 .......... | 19.16 ....... | 728,43 ..... | 1,29 |
| 9.59.40 .......... | 22. 8 ....... | 961,14 ..... | 2,24 |
| 10. 2.20 .......... | 24.48 ....... | 1206,45 ..... | 3,53 |
| | Sommes... | 6872,01 | 14,11 |
| | $14^e$. . $k =$ | 490,858 | $m =$ 1,008 |

180° $i$.... 0.0023930

$l =$ 50° 37′ 33″.... cos $l$.... 9.8023509

D = 88.20.28,87.. cos D... 8.4615707

$z =$ 41. 1.58,13.. sin $z$... 9.8172286   cot $z$.... 0.06035

$\bar{2}$.4490860...double.. $\bar{4}$.89817

$k$....... 2.6909559 . $m$......0.00346

$x$....... 1.1400419   0″,0009.. $\bar{4}$.96198

$x =$ 13″,8051  L'équ. (3) donne 180°

— 9   — Z = — 41. 1.54,10

— D = — 88.20.28,87

— $x$ = —   13,80

Latitude cherchée.. $l =$ 50.37.23,23.

Quand $p$ excède les limites de la table, on calcule directement $k$ sur l'équ. (B) (*V.* n° 285.) Mais $\sin^2 np = n^2 \sin^2 p$ quand $p$ est très petit : on peut donc prendre la moitié de $p$, et quadrupler la valeur de $k$ correspondante. Ainsi, pour $p = 22' 8''$, prenez $11' 4''$, qui donne $240'',42$ ; quatre fois ce nombre produit $961'',68$, qui ne diffère pas sensiblement de $961'',14$, employé ci-dessus.

Supposons maintenant qu'on ait fait des observations de la même étoile à son passage supérieur ; on aura d'autres valeurs

de $z$ et de $k$; une partie du calcul précédent sera conservée, et donnera une autre quantité pour $x$, puis pour $l$. Soit donc

| | | |
|---|---|---|
| Passage supérieur... | $l' = 50°37'23''63$ | |
| Passage inférieur.... | $l'' = 50.37.23,23$ | |
| Moyenne........... | $l = 50.37.23,43$ | latitude vraie. |
| Demi-différ......... | $e = -$ 0,20, | |

c'est-à-dire que la déclin. supposée est trop forte de 0",20.

On trouve dans la *Base du système métrique*, t. II, p. 613, qu'en observant, à Barcelone, ζ de la grande Ourse près des passages au méridien, les moyennes des latitudes obtenues sont

| | | |
|---|---|---|
| Passage supérieur.... | $l' = 41°22'43''365$ | |
| Passage inférieur. .. | $l'' = 41.22.44,806$ | |
| Somme.. = | 8,171 | Diff. + 1,441 |
| Moy. on vraie latitude. | = 41.22.44,085 | |
| Demi-diff.. $e$ = | 0,720. | |

C'est l'erreur de la déclinaison, qu'on a prise = 56° 0' 16" 50.
La vraie déclin. de ξ grande Ourse est donc D = 56.0.17,22.

*Autres procédés pour obtenir la latitude du lieu.*

151. *Par la hauteur d'un astre, mesurée à une heure connue.* Dans le triangle sphérique $qzp$ (fig. 18) formé par l'astre $q$, le zénith $z$ et le pôle $p$, on connaît deux côtés et un angle opposé, savoir : 1°. $pq = 90° - D$, 2°. $qz = 90° - h$, et 3°. l'angle horaire $p$, qui résulte de l'heure de l'observation (n° 124). On résout ce triangle par les équ. de la Trigonométrie sphérique (p. 7),

$$\tang \phi = \cos p \cot D,$$

$$\sin(l + \phi) = \frac{\sin h \cos \phi}{\sin D}$$

On tire de la 1re de ces équ. la valeur de l'arc auxiliaire $\phi$ ; puis, conservant à $\phi$ le signe qu'à donné le calcul, la 2e fait connaître $l + \phi$, et par suite $l$.

Le problème tombe dans les cas douteux, c'est-à-dire qu'il a deux solutions quand $h > D$, pourvu que les deux valeurs

de $l$ soient $< 90°$ : mais il n'y a qu'une solution lorsque $h < D$, et aucune quand $h > D$ avec $p > 90°$, ou bien $h < D$ avec $p > 90°$; on ne fait dans ces règles aucune attention au signe de D.

On se sert de cette méthode, lorsqu'on est sûr de l'heure, comme, par exemple, quand on a pris des hauteurs correspondantes (n° 136) : mais elle a peu de précision quand l'astre est observé loin du méridien, parce qu'une petite erreur sur l'heure influe alors beaucoup sur la valeur qu'on obtient pour $l$.

Le 6 octobre 1830 matin, on a pris une hauteur du Soleil, qui, toutes corrections faites, était $h = 33° 43' 46'',1$; il était au temps moyen. 10ʰ34′ 3″9

| | |
|---|---|
| Soleil avance de... | 11.44,5 |
| Donc en temps vrai. | 10.45.48,4 |

Ainsi, l'angle horaire est $p = 1^h 14' 11'',6 = 18° 32' 54''$; enfin, on a... $D = -5° 1' 17''$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| cos $p$....... | 9.9768339 | sin $h$...... | 9.7445061 |
| cot D...... | 1.0561849 − | cos $\varphi$...... | 8.9651249 + |
| | | sin D..... | − 8.9421451 − |
| tang $\varphi$...... | 1.0330188 − | sin $(l+\varphi)$. | 9.7674859 − |
| $\varphi =$ | − 84° 42′ 18″ | $l + \varphi =$ | − 144° 9′ 56″ |
| $l + \varphi =$ | − 35.50. 4 | et = | − 35.50. 4. |
| $l =$ | 48.52.14 | | |

La valeur $l + \varphi > 90°$ ne convient pas au problème, parce qu'elle donnerait $l$ négatif.

Le 20 septembre 1828 matin, en un lieu près de Paris, on a observé quatre distances zénith. du Soleil, savoir,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A | 6ʰ59′ 46″8 | | | | |
| | 7. 2.23,2 | 4 dist. zén.. | 310° 10′ 30″ | 10°..... | $\bar{1}$.9832 |
| | 7. 6. 4,0 | Quart..... | 77.32.37,5 | ............. | 2.4288 |
| | 7. 7.44,8 | Réf. — par.. | 4.11,3 | 765,5.... | 31 |
| Moy. | 7. 3.59,7 | a = | 77.36.48,8 | | 2.4151. |
| Équ. du t. | 6′ 37″ 7 | D = | 1° 5′ 33″,3. | Réfr.... | 259,9 |
| | 7ʰ10.37,4 t. vr. | | | Par... − | 8,6 |
| | | | | | 251,3 |

$p = 4.49.22,6 = 72° 20' 39''$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\cos p$ ........ | 9.4818704 | | |
| $\cot D$ ........ | 1.7196155 | $\sin D$ ..... | — 8.2803056 |
| $\tan g\, \varphi$ ........ | 1.2014859 | $\sin h$ ...... | 9.3314360 |
| $\varphi =$ | 86° 24′ 7″ | $\cos \varphi$ ...... | 8.7976597 |
| $l + \varphi =$ | 135. 5.30 ....... | sin ........ | 9.8487901. |
| $l =$ | 48.41.23. | | |

La latitude a été obtenue par d'autres procédés; celle-ci n'est en erreur que de 33″, quoique les observations fussent faites très loin du méridien. La seconde valeur de $l+\varphi$, supplément de la 1re, ne convient pas à la question, parce qu'elle donnerait $l$ négatif.

152. *Par hauteurs de la polaire.* La méthode que nous allons exposer est due à M. Littrow; elle consiste à mesurer des hauteurs de l'étoile polaire en un lieu quelconque de son cours, et à noter les heures correspondantes. On groupe les observations par 4, ou par 6, consécutives, et pour chaque groupe, on regarde la moyenne des hauteurs comme contemporaine à la moyenne des heures. On y applique ensuite le calcul suivant.

Le pôle est en $p$ (fig. 31), le zénith en $z$; le méridien est $zp$, $n$ la polaire en un point quelconque de son cercle diurne $nin'$, $zp = 90° - l$; la distance polaire $pn = d$; enfin, $zn = 90° - h$, $h$ étant la hauteur de l'étoile, corrigée de la réfraction. Comme l'arc $d$ n'est que d'environ 100′, les côtés $zp$, $zn$, ne diffèrent entre eux que d'un petit arc $x$ que nous nous proposons de calculer; $zp - zn = x$; ainsi $h - l = x$, d'où

$$l = h - x.$$

Soit $p$ l'angle horaire actuel $zpn$ de l'étoile, dans la position où elle a été observée; le triangle sphérique $zpn$ donne (équ. 33, page 4)

$$\cos zn = \cos pn \cos pz + \sin pn \sin pz \cos p,$$
$$\sin h = \cos d . \sin(h - x) + \sin d \cos(h - x) \cos p.$$

Développons sin et $\cos(h - x)$, et divisons toute l'équ. par $\sin h$,

$$1 = \cos d\,(\cos x - \sin x \cot h)$$
$$+ \sin d\,(\cos x \cot h + \sin x) \cos p,$$

$$1 = \cos x\,(\cos d + \sin d \cot h \cos p) - \sin x\,(\cos d \cot h - \sin d \cos p):$$

ou $$1 = a \cos x - b \sin x, \qquad (1)$$

en posant $$a = \cos d + \sin d \cot h \cos p,$$
$$b = \cos d \cot h - \sin d \cos p.$$

Or on a vu, qu'au $4^e$ ordre près (*v.* page 3), $\sin d = d - \frac{1}{6}d^3$, $\cos d = 1 - \frac{1}{2}d^2$, d'où

$$a = 1 + d \cos p \cot h - \tfrac{1}{2}d^2 - \tfrac{1}{6}d^3 \cos p \cot h,$$
$$b = \cot h - d \cos p - \tfrac{1}{2}d^2 \cot h + \tfrac{1}{6}d^3 \cos p.$$

Mais d'un autre côté, A, B, C désignant des coefficiens inconnus indépendans de $d$, on peut poser

$$x = Ad + Bd^2 + Cd^3. \qquad (2)$$

Nous ne mettons ici aucun terme exempt de $d$; car si l'étoile était située au pôle même, $x$ serait visiblement nul; d'où l'on voit que $x$ est une fonction de $d$, telle que $d=0$ doit donner $x=0$; $d$ et $x$ sont nuls ensemble. Développons les sinus et cosinus de ce trinome, toujours jusqu'au $3^e$ ordre, et nous aurons

$$\cos x = 1 - \tfrac{1}{2}A^2 d^2 - ABd^3,$$
$$\sin x = Ad + Bd^2 + (C - \tfrac{1}{6}A^3)\,d^3.$$

Substituant ces expressions dans l'équ. (1), ainsi que les valeurs de $a$ et $b$, il vient, en ordonnant par rapport à $d$,

$$1 = 1 + \cos p \cot h . d - \tfrac{1}{2}d^2 - \tfrac{1}{6}d^3 \cos p \cot h$$
$$- \tfrac{1}{2}A^2 d^2 - \tfrac{1}{2}A^2 d^3 \cos p \cot h - ABd^3$$
$$- A \cot h . d + A \cos p\, d^2 + \tfrac{1}{2}Ad^3 \cot h + Bd^3 \cos p$$
$$- B \cot h . d^2 - (C - \tfrac{1}{6}A^3)\,d^3 \cot h.$$

Cette équ. est identique, et les termes où $d$ est affecté des

mêmes puissances doivent s'entre-détruire séparément : elle se partage donc en d'autres qui vont servir à déterminer les coefficiens A, B, C.

1°. $\cos p \cot h - A \cot h = 0$, d'où $A = \cos p$;

2°. $-\frac{1}{2} - \frac{1}{2}A^2 + A \cos p - B \cot h = 0$, devient
$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos^2 p = B \cot h$; ainsi $B = -\frac{1}{2}\sin^2 p \tang h$;

3°. Les termes du 3ᵉ ordre en B s'entre-détruisent, et il reste, en suprimant le facteur commun $d^2 \cot h$,

$$-\frac{1}{6}\cos p - \frac{1}{2}A^2 \cos p + \frac{1}{2}A - \left(C - \frac{1}{6}A^3\right) = 0,$$

d'où l'on tire $C = \frac{1}{3}\cos p \sin^2 p$.

Substituons ces valeurs dans l'équ. (2) ; et pour que $x$ et $d$ soient *exprimés en secondes d'arc*, changeons ces lettres en $x \sin 1''$ et $d \sin 1''$ (*v.* à ce sujet ce qui a été dit p. 3); nous aurons

$$x = d \cos p - \frac{1}{2}\sin^2 p \tang h \sin 1'' d^2 + \frac{1}{3}\cos p \sin^2 p \sin^2 1'' d^3.$$

Substituant cette expression dans $l = h - x$, et faisant pour abréger

$$\alpha = \frac{1}{2}\sin 1'', \quad \beta = \frac{1}{3}\sin^2 1'',$$

nous aurons enfin cette équ.

$$l = h - (d \cos p) + \alpha (d \sin p)^2 \tang h - \beta (d \cos p)(d \sin p)^2.$$

Dans cette formule, $d$ et les trois derniers termes expriment des nombres de secondes d'arcs, et l'on trouve que

$$\log \alpha = \bar{6}.3845449, \quad \log \beta = \overline{12}.89403.$$

Voici l'usage qu'on fait de cette équation.

L'asc. dr. et la déclin. de la polaire sont connues, étant corrigées des précession, nutation et aberration (le *Nautical almanach* et l'*Annuaire* de M. Schumacher, donnent ces arcs tout calculés) : ainsi $d$ est connu en secondes d'arc.

On note l'heure moy. ou sid. de l'observation de hauteur

de la polaire, et l'on en conclut l'angle horaire $p$ en degrés (n° 124), par la formule

$$\pm p = \text{heure sid.} - Æ\star = \text{heure sol.} + Æ\odot - Æ\star.$$

On prend + quand la polaire est du côté de l'ouest, et — vers l'est. Il faut avoir égard au signe de cos $p$ : car lorsque $p > 6^h$ ou 90°, ce cos est négatif, et le 2ᵉ et le 4ᵉ termes changent de signe et prennent un + au lieu de —. Le calcul de la formule est sans difficulté.

Par exemple, le 6 octobre 1827 au soir, on a trouvé :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Montre à | 6ʰ49′33″2 | H. moy. ....... | 6ʰ57′12″54 |
| | 6.56.22,8 | Æ⊙ moy....... | 12.57.27,84 |
| | 6.58.54,0 | Correct. (table II). | 1. 8,54 |
| | 7. 1.44,0 | Æ★ à l'est...— | 0.59.49,05 |
| | 27.46.34,0 | — $p$ = | 18.55.59,87 |
| Moy.... | 6.56.38,5 | Suppl....= | 5ʰ 4′ 0″13 |
| Retard.. | + 34,04 | = | 76° 0. 1,95 |
| H. moy. | 6.57.12,54. | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4 dist. zénith. = | 163° 46′ 6″ | Quart........ | 40° 56′ 31″50 |
| | | Barom. 760ᵐ. Th. 12°. Réf. .... | 50,12 |
| D = | 88° 23′ 27″32 | $z$ = | 40.57.21,62 |
| $d$ = | 1.36.32,68 = 5792″,68 | $h$ = | 49. 2.38,38 |
| $d$...... | 3.7628795 ........................ | | 3.76288 |
| cos $p$.... | 9.3836587 + | sin $p$.... | 9.98691 |
| 1401″,32... | 3.1465382 + | | 3.74979 |
| | 7.49958 ............ | double.. | 7.49958 |
| $\beta$....... | $\overline{12}$.89403 | tang $h$.. | 0.06151 |
| | | $\alpha$....... | 6.38454 |
| 0″,35.... | $\overline{1}$.54015 | 88″,2.. | 1.94563. |

| | |
|---|---|
| $h$ = | 49° 2′38″38 |
| 3ᵉ terme... | + 1.28,23 |
| 2ᵉ........ | — 23.21,32 = — 1401″,32. |
| 4ᵉ........ | — 0,35 |
| $l$ = | 48.40.44,94. |

Le 11 novembre 1823, on a obtenu près de Dieppe

$h = 49° 8' 20'',3$, à $17^h 19' 53'',5$ t. moy.; on a

$AR★ = 0^h 58' 32'',4$, $d = 1° 37' 32'',2 = 5852'',2$.

A $17^h 19' 53'' 5$ t. moy.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| AR☉ m. | 15.14.15,0 | $d$....... | 3.7673192 | ........... | 3.76732 |
| AR★..— | 0.58.32,4 | cos $p$... | 9.6076140 — | sin..... | 9.96107 |
| $p$ = | $7^h$35.36,1 | — 39′31″,01. | 3.3749332 — | | 3.72839 |
| = | 113°54′ 1,5 | | 7.45678 | ...... double. | 7.45678 |
| | | β...... | $\overline{12}$.89403 | tang $h$.. | 0.06296 |
| | | | | α..... | $\overline{6}$.38454 |
| $h$ = | 49° 8′ 20″30 | 0″,53. | $\overline{1}$.72574 | 80″,22.. | 1.90428. |
| — $d$ cos $p$ = | + 39.31,01 | | | | |
| 3e terme.. | + 1.20,22 | | | | |
| 4e....... | + 0,53 | | | | |
| $l$ = | 49.49.12,06. | | | | |

Cette formule ne peut guère convenir qu'à α et δ de la petite Ourse, parce que la série n'est convergente qu'autant que la distance polaire $d$ est un très petit arc. Mais le procédé suivant peut être appliqué à toutes les circompolaires.

Soit $h$ la hauteur d'une de ces étoiles $n$ (fig. 31) observée à un instant quelconque, hauteur corrigée de la réfraction : désignons toujours par $p$ l'angle horaire donné par l'heure de l'observation; $z$ est le zénith, $p$ le pôle, et il s'agit de résoudre le triangle sphérique $znp$, pour en tirer le côté $zp$ = colatitude $= 90° - l$. En abaissant l'arc $nq$ perpendiculaire sur $zp$, faisant $pq = x$, $nq = y$, on trouve dans le triangle rectangle $npq$,

$$\tang x = \tang d \cos p, \quad \cos y = \frac{\cos d}{\cos x}.$$

Or, dans le triangle rectangle $znq$, où $zq = zp - pq = 90° - l - x$, $zn$ = dist. zénith. $= 90° - h$, on a $\cos zn = \cos zq . \cos nq$; donc

$$\tang x = \tang d \cos p,$$

$$\sin(l + x) = \frac{\cos x \sin h}{\cos d}.$$

La première de ces équ. donne l'arc auxiliaire $x$; la seconde $l+x$; ainsi l'on en tire $l$, puisque la grandeur et le signe de $x$ sont connus.

Dans le premier des exemples précédens, on a trouvé $p=76^\circ\ 0'\ 1'',95$, $d=1^\circ\ 36'\ 32'',68$, et $h=49^\circ\ 2'\ 38'',38$; voici le calcul.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | sin $h$......... | 9.8780694 |
| cos $p$...... | 9.3836587 | cos $x$.......... | 9.9999900 |
| tang $d$..... | 8.4485686 | cos $d$......... | — 9.9998288 |
| tang $x$..... | 7.8322273 | sin $(l+x)$.... | 9.8782306 |
| | $x = 0^\circ\ 23'\ 21'',67$ | | $l+x = 49^\circ\ 4'\ 6''55$ |
| | | | $-x = -\ 23.21,67$ |
| | | | $l = 48.40.44,88.$ |

On remarquera que lorsque $d$ est très petit, le calcul n'a pas toute la précision désirable, et qu'il faudrait employer plus de 7 décimales aux log. Ainsi, pour la polaire, cette théorie est moins avantageuse que la précédente.

A $4^h$ de distance ouest de la polaire au méridien, on en a trouvé la hauteur, qui, corrigée de la réfraction, a été de $h=50^\circ\ 47'\ 43'',6$; on demande la latitude du lieu. On a $d=1^d\ 38'=5880''$, $p=60^\circ$.

1re *méthode.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| $d$......... | 3.7693773 | ............ | 3.76938 |
| cos $p$...... | 9.6989700 | sin $p$.... | 9.93753 |
| — 2940'',0.... | 3.4683473 | | 3.70691 |
| | 7.41382 | double... | 7.41382 |
| $\beta$......... | $\overline{12}.89403$ | tang $h$.. | 0.08846 |
| | | $\alpha$...... | $\overline{6}.38454$ |
| 0'',60..... | $\overline{1}.77619$ | 77'',00... | 1.88682. |

$h = 50^\circ 47' 43''60$
$+\ \ 1.17,00$
$-\ 49.\ 0,00$
$-\ \ \ 0,60$

$l = 50.\ 0.\ 0,00.$

*2e méthode*

| | | | |
|---|---|---|---|
| tang $d$. . . . . | 8.4550699 | cos $x$. . . . . | 9.9999559 |
| cos $p$. . . . . . | 9.6989700 | sin $h$. . . . . | 9.8892424 |
| tang $x$. . . . . | 8.1540399 | cos $d$. . . . — | 9.9998235 |
| $x =$ | 0°49′ 0″6 | sin $(l + x)$. | 9.8893748. |
| $l + x =$ | 50.49. 0,1 | | |
| Diff. $=$ | 49.59.59,5 $= l$. | | |

153. *Trouver à la fois l'heure et la latitude par deux hauteurs successives d'un même astre en deux lieux de son cours, ou par les hauteurs de deux astres, mesurées à des instans quelconques.*

Soient $s$ et $s'$ (fig. 33) les deux positions où l'on a pris les distances zénithales $sz = z$, $s'z = z'$, que nous supposons corrigées de la réfraction, etc. On connaît aussi les distances polaires $sp = d$, $s'p = d'$, en ayant égard aux précession, nutation et aberration, corrections qui, pour le Soleil et la Lune sont toutes faites dans la *Conn. des Tems :* nous avons enseigné, n° 74, à les faire pour les étoiles. Il s'agit de résoudre les trois triangles sphériques $sps'$, $szs'$ et $zsp$, pour tirer du dernier la valeur du côté $zp$, qui est la colatitude $c = 90° - l$, et celle de l'angle horaire $zps = p$, de l'une des observations.

Voici comment on gouverne ces calculs.

D'abord l'angle $sps' = t$ est connu. En effet,

1°. Si l'on a observé deux fois le même astre en deux lieux différens de son cours, cet angle $t$ est le temps sid. ou solaire vrai écoulé entre les deux observations, selon que l'astre est une étoile ou le Soleil; ce temps sera traduit en degrés. Si la montre marche comme le temps moy., on réduira aisément la durée écoulée à exprimer un temps sid. dans le 1er cas, et un temps vrai dans le 2e (p. 150, etc.).

2°. Quand on observe deux astres différens, l'angle $t$ est la diff. de leurs asc. dr. actuelles, si l'on mesure les deux hauteurs au même moment : plus généralement

$$t = Æ' - Æ \pm \text{temps écoulé}.$$

On prend + lorsque l'astre observé le 1^er^ est le plus oriental (celui dont l'asc. dr. Æ' est la plus grande ; il faut — dans l'autre cas. On exprimera $t$ en degrés. (*V.* n° 70.)

154. Résolvons maintenant nos trois triangles successifs $sps'$, $szs'$ et $zsp$, en recourant aux formules usitées dans la Trigonométrie sphérique.

1°. Dans $sps'$, on connaît les deux côtés $s'p = d'$, $sp = d$, et l'angle compris $s'ps = t$; il faut en tirer les valeurs du côté $ss' = \delta$, et de l'angle $s'sp = \psi$. On a (page 8, et page 4, équ. 32)

$$\sin\phi = \cos\tfrac{1}{2}t\sqrt{\sin d.\sin d'}, \qquad (a)$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\delta = \sin\left(\frac{d+d'}{2}+\phi\right).\sin\left(\frac{d+d'}{2}-\phi\right), \qquad (b)$$

$$\sin\psi = \frac{\sin t.\sin d'}{\sin\delta}. \qquad (c)$$

2°. Dans le triangle $szs'$, les trois côtés sont connus, savoir : $sz = z$, $s'z = z'$ et $ss' = \delta$ qu'on vient de trouver ; on en tire l'angle $s'sz = x$ (*v.* l'équ. 39, p. 6) par les formules

$$2k = z + z' + \delta, \qquad (d)$$

$$\sin^2\tfrac{1}{2}x = \frac{\sin(k-z).\sin(k-\delta)}{\sin z.\sin\delta}. \qquad (e)$$

En sorte que maintenant on connaît l'angle $y = zsp$, savoir : $zsp = s'sp - s'sz$, ou

$$y = \psi \pm x. \qquad (f)$$

Nous mettons ici ±, parce que $x$ étant donné par une extraction de racine, sa valeur comporte ce double signe. Mais il faut observer que si l'arc $ss'$ prolongé va couper le méridien en un point $m$ situé hors de l'étendue de l'arc $zp$ qui joint le pôle au zénith, cas qui est le plus ordinaire, il faut prendre le signe — : on prendrait +, si, comme dans la fig. 34, l'arc $ss'$ prolongé coupait le méridien en $m$, entre le pôle et le zénith. Dans le premier cas, l'arc $pz < pm$ ; on a dans l'autre, au contraire, $pz > pm$. (*V.* la fig. 34.)

Il est rare que les deux solutions puissent être admises, et qu'on soit embarrassé sur le choix du + ou du —; comme la latitude cherchée est toujours à peu près connue d'avance, on peut continuer le calcul dans les deux hypothèses, et voir quelle est celle qui s'accorde avec les circonstances connues.

3°. Enfin dans le triangle $zsp$, on connaît deux côtés et l'angle compris, savoir : $sz = z$, $sp = d$, et l'angle $zsp = y$ qu'on vient d'obtenir. On peut calculer le côté $zp = c =$ colatitude $= 90° - l$, et l'angle horaire $zps = p$ de l'observation de l'astre $s$ (*v.* page 8, et p. 4, équ. 32),

$$\sin \nu = \cos \tfrac{1}{2} y \sqrt{\sin d . \sin z}, \qquad (g)$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} c = \sin \left(\frac{d+z}{2} + \nu\right) . \sin \left(\frac{d+z}{2} - \nu\right), \qquad (h)$$

$$\sin p = \frac{\sin z . \sin y}{\sin c}. \qquad (i)$$

155. Voici la marche des calculs que ces formules exigent. On considère les arcs $\varphi$, $\delta$, $\psi$, $k$, $x$, $y$ et $\nu$, comme des auxiliaires, dont on obtient les valeurs successives par les sept premières équ.; chacune de ces valeurs doit être introduite, avec le signe que le calcul détermine, dans les équ. suivantes, en sorte que chacun de ces arcs sert à trouver celui qui vient après. Une fois que $y$ et $\nu$ sont connus, les équ. ($h$ et $i$) font enfin connaître la colatitude $c$ et l'angle $p$, distance de l'astre $s$ au méridien, lequel traduit en temps, donne l'heure où il a été observé. C'est l'heure vraie s'il s'agit du Soleil, l'heure sid. pour une étoile (*v.* n° 124) : on en déduit ensuite l'heure moy. et le retard ou l'avance de la montre sur le temps moyen.

Il est vrai que ces opérations sont compliquées, car elles exigent le secours de 22 log. différens, et il faut avoir une grande attention aux signes des facteurs. Aussi les marins ne recourent-ils à cette méthode que lorsqu'ils ne peuvent s'en dispenser, et souvent ils ne connaissent, ni l'heure, ni la latitude du lieu, avec la précision nécessaire à la sûreté de la navigation.

156. Les exemples suivans serviront de types de calculs dans tous les cas. On a soin que l'une des hauteurs soit prise près du méridien, et l'autre près du premier vertical, parce que alors les erreurs d'observation ne s'influencent pas réciproquement, l'une se portant en entier sur $l$ et l'autre sur $p$; et l'on sait (pages 174 et 197) que ce sont les circonstances d'observation où les erreurs respectives sont moins fortes, lorsqu'on ne veut déterminer que l'une ou l'autre de ces inconnues.

On désigne par $d$ et $z$ les données qui se rapportent à l'astre le plus éloigné du méridien; $d'$ et $z'$ sont relatifs à celui qui en est proche. Mais on peut prendre des désignations réciproques, et c'est même un moyen de vérifier le calcul, en le recommençant dans cette supposition renversée; c'est-à-dire qu'on change partout $d$ et $z$ en $d'$ et $z'$, et qu'on refait toutes les opérations, conservant à ces quatre arcs les désignations ci-dessus.

Comme on ne doit pas employer de sinus d'arcs voisins de 90° quand on exige quelque précision, on peut résoudre nos triangles par les équ. suivantes, auxquelles on adjoindra $d$, $e$ et $f$. C'est la solution de Delambre. (*Astr.*, I, p. 523.) $\chi$ et $\xi$ sont des arcs auxiliaires que ces équ. déterminent

$$\text{tang}\,\chi = \text{tang}\,d' \cos t,$$

$$\cos d' = \frac{\cos d' \cos(d - \chi)}{\cos \chi}, \quad \text{tang}\,\psi = \frac{\sin \chi \;\text{tang}\,t}{\sin(d - \chi)};$$

$$\text{tang}\,\xi = \text{tang}\,z \cos y,$$

$$\sin l = \frac{\cos z \cos(d - \xi)}{\cos \xi}, \quad \text{tang}\,p = \frac{\sin \xi \;\text{tang}\,y}{\sin(d - \xi)}.$$

157. Le 19 septembre 1830, on mesure des hauteurs d'Arcturus vers l'ouest et d'Atair près du méridien; voici, toutes corrections faites, les moyennes entre les observations et entre les heures de temps moyen.

| | | |
|---|---|---|
| Arcturus.. à 8h 2′ 47″8 t. m. | $z = 73°19′26″5$, | $d = 69°55′36″4$ |
| Altaïr...... à 8.22. 3,0 | $z' = 40.53.56,3$ | $d' = 81.34. 0,0$ |
| Différ...... = 0.19.15,2 t. moy. écoulé. | | Somme = 151.29.36,4 |
| Correct... + 3,16 (table II). | | (1) $\frac{1}{2} = 75.44.48,2$ |
| − 19.18,36 t. sid. écoulé. | | |
| Æ...... − 14. 7.54,67 | (*Calcul de t.*) | |
| Æ′...... + 19.42.31,58 | | |
| $t = 5.15.18,55$ | quart. $t = 78°49′38″,3$, | $\frac{1}{2}t = 39°24′49″,1$. |
| sin $d$...... 9.9727834 | (*Calcul des équ. a et b.*) | |
| sin $d'$...... 9.9952785 | cos $\frac{1}{2}t$... 9.8879449 | |
| 19.9680619... | moitié... 9.9840310 | |
| $\varphi = 48°7′57″1$ | sin $\varphi$... 9.8719759 | |
| (1) = 75.44.48,2 | | |
| Somme... 123.52.45,3... | sin..... 9.9191910 | |
| Différ..... 27.36.51,1... | sin..... 9.6660643 | (*Calcul de l'équ. c.*) |
| (*Calcul de l'équ. e.*) | 19.5852553 | sin $d'$... 9.9952785 |
| $\frac{1}{2}\delta = 38.20.26,6$ | sin $\frac{1}{2}\delta$... 9.7926276 | sin $t$... 9.9916901 |
| $\delta = 76.40.53,2$... | sin..... 9.9881594.......... | − 9.9881594 |
| $z = 73.19.26,5$... | sin..... 9.9813396 | |
| $z' = 40.53.56,3$ | | |
| $2k = 190.54.16,0$ | − 9.9694990 | sin $\psi$... 9.9988092 |
| $k = 95.27. 8,0$ | | |
| $k - \delta = 18.46.14,8$... | sin..... 9.5075629 | $\psi = 85°45′32″5$ |
| $k - z = 22. 7.41,5$... | sin..... 9.5759727 | (2) $x = 42.16.24,2$ |
| | 19.1140366 | $y = 43.29. 8,3$ |
| (2) $\frac{1}{2}x = 21. 8.12,1$... | sin..... 9.5570183 | $\frac{1}{2}y = 21.44.34,1$ |
| sin $d$...... 9.9727834 | (*Calcul de l'équ. g.*) | $d = 69.55.36,4$ |
| sin $z$...... 9.9813396 | cos $\frac{1}{2}y$... 9.9679484 | $z = 73.19.26,5$ |
| 19.9541230... | moitié... 9.9770615 | Som. 143.15. 2,9 |
| $\nu = 61°46′17″,3$ | sin $\nu$... 9.9450099 | $\frac{1}{2}$...... 71.37.31,5 |
| (*Calcul de l'équ. i.*) | (*Calcul de l'équ. h.*) | $\nu = 61.46.17,3$ |
| sin $z$...... 9.9813396 | sin..... 9.8613026... | Som. 133.23.48,8 |
| sin $y$...... 9.8376975 | sin..... 9.2333444... | Diff. 9.51.14,2 |
| (3) sin $c$... − 9.8195187 | 19.0946470 | |
| sin $p$...... 9.995184 | sin..... 9.5473235. | $\frac{1}{2}c = 20°38′54″5$ |
| $p = 87°18′8″$ | = 5h49′12″53 | (3) $c = 41.17.49,0$ |
| | Æ = 14. 7.54,67 | $l = 48.42.11,0$ |
| | Æ☉ moy. = − 11.51.29,76 | |
| | 8. 5.37,44 | |
| (Table I)...... − | 1,18,56 | |
| Heure moy. de l'observ.. | 8. 4.18,88 | pour Arcturus. |
| Chronomètre marquait.. | 8. 2.47,80 | |
| Retarde sur t. moy...... − | 1.31,08. | |

Les observations en mer n'ont pas assez de précision pour que l'on compte sur l'exactitude des secondes ; on se contente des log. à cinq décimales, ce qui abrège le calcul. Dans l'exemple suivant, nous en avons agi ainsi. Les déclin. du Soleil y sont déduites de l'heure vraie de Paris à l'instant des observations, d'après la différence de longitude ; elles datent du 12 août 1825 : on prend $y = \psi + x$.

| | | |
|---|---|---|
| Matin....... $9^h42'$ t. vr. | $z = 33°10'26''$ | $d = 75°1'24''$ |
| Soir....... 15.40 | $z' = 52.39.21$ | $d' = 75.6.6$ |
| $t = 5{,}58 = 89°30'$ | | moy. = 75.3.45 |
| $\frac{1}{2}t = 44°45'0''$ | (*Calcul de l'équ.* a.) | |
| sin $d$....... 9.98499 | | |
| sin $d'$....... 9.98515 | cos $\frac{1}{2}t$.... 9.85137 | |
| 19.97014... | Moitié.... 9.98507 | |
| $\varphi = 43°19'45$... | sin $\varphi$..... 9.83644 | |
| $\frac{1}{2}(d + d') = 75.3.45$ | (*Calcul des équ.* b *et* c.) | |
| Somme = 118.23.30 | sin....... 9.94434 | |
| Diff. = 31.44.0 | sin....... 9.72096 | (*Calcul de l'équ.* c.) |
| (*Calcul de* d, e, f.) | 19.66530 | sin $d'$..... 9.98515 |
| $\frac{1}{2}\delta = 42.51.40$... | sin....... 9.83265 | sin $t$..... 9.99998 |
| $\delta = 85.43.20$... | sin....... 9.99879 | sin $\delta$..... — 9.99879 |
| $z = 33.10.26$... | sin....... 9.73813 | |
| $z' = 52.39.21$ | | |
| $2k = 171.33.7$ | 9.73692 | sin $\psi$..... 9.98634 |
| $k = 85.46.34$ | | |
| $k - \delta = 0.3.14$... | sin....... 6.97338 | $\psi = 75°42'20''$ |
| $k - z = 52.36.8$... | sin....... 9.90006 | $x = 4.14.28$ |
| | 17.13652 | $y = 79.56.48$ |
| $\frac{1}{2}x = 2.7.14$... | sin....... 8.56826 | $\frac{1}{2}y = 39.58.24$ |
| sin $d$....... 9.98499 | | $d = 75.1.30$ |
| sin $z$....... 9.73813 | cos $\frac{1}{2}y$.... 9.88442 | $z = 33.10.26$ |
| 19.72312 | Moitié.... 9.86156 | Som. = 108.11.56 |
| $v = 33°51'35''$ | sin $k$..... 9.74598 | $\frac{1}{2} = 54.5.58$ |
| (*Calcul de l'équ.* i.) | (*Calcul de l'équ.* h.) | $v = 33.51.35$ |
| sin $z$....... 9.73813 | sin....... 9.99972... | Somme.. 87.57.33 |
| sin $y$....... 9.99327 | sin....... 9.53901... | Diff..... 20.14.23 |
| sin c....... — 9.97827 | 19.53873 | |
| sin $p$....... 9.75313 | sin....... 9.76936... | $\frac{1}{2}c = 36.0.50$ |
| $p = 34°30'0'' = 2^h18'0''$ t. vr. | | $c = 72.1.40$ |
| Distance au méridien = 9.42.0 | | $l = 17.58.20$. |

La montre est juste à l'heure solaire vraie.

158. Les formules du n° 154 s'appliquent pareillement au cas où l'on a observé deux fois consécutives le même astre ; on fait $d = d'$. Mais comme alors le triangle $sps'$ (fig. 33) est isocèle, il est plus simple de se servir des équ. de la page 9, qui sont relatives à ces sortes de triangles ; elles remplacent les équ. (*a*), (*b*) et (*c*) : ces équ. sont

$$\sin \tfrac{1}{2}\delta = \sin d \sin \tfrac{1}{2} t, \qquad (a')$$

$$\cot \psi = \cos d \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t. \qquad (b')$$

Ces formules sont particulièrement destinées aux observations du Soleil, qui sont les plus ordinaires en mer, parce que cet astre est plus facile à voir en même temps que l'horizon. Alors on suppose que la déclin. du Soleil est constante pendant le temps écoulé entre les observations : mais on la prend égale à celle qui a lieu à l'heure vraie du milieu. Les autres équ. demeurent les mêmes que précédemment. On doit calculer dans cette méthode 19 log. différens.

Le 6 octobre 1830, on a mesuré deux hauteurs du Soleil ; en ayant égard à la longitude du lieu, on a obtenu l'heure de Paris qui répond à l'instant du milieu, et ensuite la déclin. D de l'astre pour cette heure. Toutes corrections faites, on a trouvé

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Matin....... | $7^h\,5'\,49'',0$ t. vr. | | $z = 81°22'\,17'',4$ | | $D = -5°\,9'\,48'',1$ |
| Soir......... | 13. 2.47,8 | | $z' = 56.16.13,9$ | | $d = 95.\ 9.48,1$ |
| $t =$ | 5.66.58,8 | | | | |
| $\tfrac{1}{2}t =$ | 44°37.21,0 | | | (1) $\tfrac{1}{2}\delta =$ | 44.23.36,6 |
| *(Calcul de l'équ. a'.)* | | *(Calcul de l'équ. b'.)* | | (2) $\psi =$ | 95. 4.32,0 |
| sin $d$........ | 9.9982342 | cos $d$... | 8.9542218—, | (3) $x =$ | 56. 2.42,0 |
| sin $\tfrac{1}{2}t$...... | 9.8466046 | tang $\tfrac{1}{2}t$. | 9.9942770 | $y =$ | 39. 1.50,0 |
| (1) sin $\tfrac{1}{2}\delta$... | 9.8448388 | (2) cot $\psi$. | 8.9484988—, | $\tfrac{1}{2}y =$ | 19.30.55,0 |

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| (*Calcul de* d, e, f.) | | | | (*Calcul de l'équ.* g.) | |
| $\delta =$ | 88°47′13″2... | sin..... | 9.9999027 | | |
| $z =$ | 81.22.17,4... | sin..... | 9.9950565 | ......... | 9.9950565 |
| $z' =$ | 56.16.13,9 | | | sin $d$.. | 9.9982342 |
| $2k =$ | 226.25.44,5 | | − 9.9949592 | | 19.9932907 |
| $k =$ | 113.12.52,2 | | | | |
| $k - \delta =$ | 24.25.39,0... | sin..... | 9.6165191 | | 9.9966453 |
| $k - z =$ | 31.50.34,8... | sin..... | 9.7222995 | cos $\frac{1}{2}y$. | 9.9743055 |
| (*Calcul de l'équ.* h.) | | | 19.3438594 | sin $v$.. | 9.9709508 |
| $\frac{1}{2}(d+z) =$ | 88.16. 2,8 | | | (4) $v =$ | 69°16′35″8 |
| (4) $v =$ | 69.16.35,8... | sin..... | 9.6719297 | (3) $\frac{1}{2}x =$ | 28. 1.21,0 |
| Somme. $=$ | 157.32.38,6... | sin..... | 9.5820326 | (*Calcul de l'équ.* i.) | |
| Diff.... $=$ | 18.59.27,0... | sin..... | 9.5124400 | sin $z$... | 9.9950565 |
| | | | 19.0944726 | sin $y$.. | 9.7991577 |
| $\frac{1}{2}c =$ | 20.38.38,9... | sin..... | 9.5472363 | sin $c$..− | 9.8194438 |
| $c =$ | 41.17.17,8 | $p =$ | 70°39′31″0 | sin $p$.. | 9.9747704 |
| $l =$ | 48.42.42,2 | $=$ | 4h42.38,1 = dist. au méridien. | | |
| | Heure du matin $=$ | | 7.17.21,9 t. vr. | | |
| | Équ. du temps. $-$ | | 11.42,1 | | |
| | T. m. de l'obs.. | | 7. 5.39,8 | | |
| | Chronomètre.. | | 7. 5.49,0 | | |
| | Avance sur t. m. $+$ | | 9,2. | | |

159. Les observations en mer donnent directement les hauteurs $h$, $h'$ du Soleil, et l'on préfère se servir d'équ. qui comprennent ces arcs, au lieu des dist. zénith. qu'on n'obtient que par une soustraction. On se sert aussi de la déclin. D, plutôt que de sa distance polaire $d$. Les équ. prennent alors la forme suivante :

$$\sin \tfrac{1}{2}\delta = \cos D \sin \tfrac{1}{2} t, \qquad (a')$$

$$\cot \psi = \sin D \operatorname{tang} \tfrac{1}{2} t, \qquad (b')$$

$$2a = \delta + h + h',$$

$$\sin^2 \beta = \frac{\cos a \sin (a - h')}{\cos h \sin \delta}, \qquad (c')$$

$$\gamma = \tfrac{1}{2}\psi \pm \beta,$$

$$\sin l = \cos (h - D) - 2 \cos h \cos D \sin^2 \gamma. \qquad (d')$$

On prend D négatif pour les déclin. australes ; la 4ᵉ équ. est conforme à celle de l'angle horaire n° 131 (équ. 12, p. 181) :

quant à la dernière, c'est l'équ. (34), page 4, appliquée au triangle sphérique *zps* : cette formule (*d'*) ne se prête pas au calcul des log., mais elle s'applique aisément, surtout lorsqu'on se sert des tables de sinus naturels.

Dans l'exemple suivant, à la date du 4 décembre 1825, on a marqué les heures vraies de Paris, et les hauteurs corrigées du centre du Soleil.

| | | |
|---|---|---|
| A 3h 8' | $h = 31°46' 9''$ | $D = -22°18'19''$ |
| A 12.20 | $h' = 15. 8.40$ | $h - D = 54. 4.28$ |
| = 9.12... 8e.... $\frac{1}{2}t = 69. 0. 0.$ | | |
| (*Equ.* a'.) | (*Equ.* b'.) | $\delta = 119.28.20$ |
| cos D.......... 9.96622 | sin D..... 9.57926 − | $h = 31.46. 9$ |
| sin $\frac{1}{2}t$.......... 9.97015 | tang $\frac{1}{2}t$.... 0.41582 | $h' = 15. 8.40$ |
| sin $\frac{1}{2}\delta$.......... 9.93637 | cot $\psi$........ 9.99508 − | 166.23. 9 |
| (1) $\frac{1}{2}\delta = 59° 44' 10''$ | (2) $\psi = 134°40'30''$ | |
| $\delta = 119.28.20$ | cos $\alpha$...... 9.07380........ | $\alpha = 83.11.35$ |
| | sin........ 9.96731...... | $\alpha - h' = 68. 2.55$ |
| cos $h$ ......... 9.92951... | cos $h$.....− 9.92951 | (2) $\frac{1}{2}\psi = 67.20.15$ |
| cos D......... 9.96622 | sin $\delta$.....− 9.93982 | (3) $\beta = 22.40. 5$ |
| (4) $\sin^2 \gamma$..... 9.69393 | $\sin^2 \beta$.... 19.17178 | (4) $\gamma = 44.40.10$ |
| 2............. 0.30103 | (3) sin $\beta$.. 9.58589 | |
| 9.89069........... ..... | − 0.77749 | |
| | cos $(h - D)$ = 0.58673 | |
| | sin $l = -$ 0.19076... | $l = -10° 59' 50''$ A. |

Nous ferons remarquer que nous appelons ici $\beta$ l'angle que nous avions nommé $\frac{1}{2}x$ dans la fig. 33, et que $\gamma$ désigne celui que nous avions appelé $\frac{1}{2}y$. Pour appliquer la méthode à la recherche de l'angle horaire, qui n'est ordinairement pas le sujet principal de ces opérations, on se servira de l'équ. (*i*) p. 224.

160. Lorsqu'on fait usage de cette méthode en mer, il faut corriger l'une des hauteurs pour la réduire à l'horizon de l'autre, attendu que le vaisseau a marché dans l'intervalle des deux observations, et que le procédé suppose que celles-ci sont faites en un même lieu.

Soit S (fig. 41) le Soleil, en un point quelconque du ciel; Z, Z' les zéniths des deux stations d'où S a été observé; SZ est

le complément de la hauteur $h$, qu'on a mesurée sous le zénith Z, SZ' est le complément de la hauteur $h'$, qu'on aurait trouvée si l'astre S eût été vu sous Z' : on a $SZ = 90° - h$, $SZ' = 90° - h'$; $h$ est connu, et l'on demande $h'$.

Pour résoudre ce problème, on sait quelle est la direction qu'a suivie le navire (le rhumb de vent où l'on a gouverné), c'est-à-dire l'azimuth $a$ de la route. On connaît en outre le chemin $\varphi$ qu'on a parcouru, d'après la vitesse de la marche donnée par le lock. Cet instrument ne fait connaître, il est vrai, que des résultats approchés; mais ils suffisent à l'objet qu'on a en vue. Les marins mesurent le chemin en milles, qui sont des minutes de degré de grand cercle.

Dans le triangle sphérique $SZZ'$, on connaît deux côtés et l'angle compris, $SZ = 90° - h$; l'arc céleste $ZZ' = \varphi$ est d'autant de minutes qu'on a décrit de milles, puisque sa projection sur le globe terrestre est l'espace qu'on a parcouru; enfin l'angle $SZZ' = \alpha$ que fait le vertical SZ du Soleil avec la route. Cet angle $\alpha$ n'a pas besoin d'être connu avec précision, et on le mesure à la boussole, à l'instant où l'on prend la petite hauteur $h$. On peut encore le calculer; car si P est le pôle, PZ, PZ' sont les méridiens des stations, et l'on a

$$\text{angle } Z'ZS = Z'ZP + SZP,$$

ou $\alpha = $ azimuth $a$ de la route + azimuth A de l'astre,

$$\alpha = a + A.$$

Il y a des cas où $\alpha = a - A$, ou $A - a$ (*v.* ci-après, nº 231); c'est ce qu'on reconnaît aisément d'après l'état supposé des choses : $a$ est donné par la direction où le navire est gouverné, et A l'est par un calcul (nº 215), ou par une mesure actuelle.

Maintenant résolvons le triangle $SZZ'$, pour trouver $SZ'$. $ZZ'$ étant fort petit, SZ diffère peu de $SZ'$; et posant $d = h' - h =$ diff. des hauteurs, $d$ est fort petit. On a

$$\sin h' = \sin h \cos\varphi + \cos h \sin\varphi \cos\alpha.$$

En reproduisant ici le calcul de la p. 115, on trouvera

$$d = \phi \cos \alpha - \tfrac{1}{2} \phi^2 \operatorname{tang} h \sin^2 \alpha.$$

Ce dernier terme est toujours négligeable; ainsi

$$d = \phi \cos \alpha = h' - h.$$

La quantité $d$ est exprimée en minutes, comme l'espace parcouru $\phi$; $\cos \alpha$ peut être positif ou négatif. Ainsi $d$ est connu en grandeur et en signe, $h' = h + d$, et $d$ est la correction que $h$ doit éprouver.

On est dans l'usage de réduire la petite hauteur, celle qui a été mesurée le plus loin du méridien, à l'horizon de la plus grande hauteur; notre méthode donne alors la latitude de ce dernier lieu.

Par exemple, si la petite hauteur du Soleil est $h = 28° 23' 50''$, toutes corrections faites; que le navire ait parcouru 12,6 milles, dans une direction du sud vers l'est, telle qu'on ait l'azimuth............. $a = 11°15'\ 0''$ S. E.,
que l'azimuth du Soleil soit aussi sud-est............ $A = 50.37.30$ S. E.,

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | on trouve.......... | $\alpha = 39.22.30.$ |
| 12',6.... | 1.10037 | Haut. obs... | $h = 28.23.50$ |
| cos $\alpha$.... | 9.88819 | | $d = +\ 9.42$ |
| 9',74.... | 0,98856 | Haut. réduite. | $h' = 28.33.32$ |

De même, si l'azimuth de la route est.............. $a = 157.30.\ 0$ N. E.,
que l'azimuth du Soleil soit.............................. $A = 33.45.\ 0$ N. O.,

| | | | |
|---|---|---|---|
| on a $\phi = 31$ milles $= 31'$, | | | $\alpha = a + A = 191.15.$ |
| 31'.... | 1.49136 | On donne | $h = 19°51'36''$ |
| cos $\alpha$.. | 9.99157 — | | $d = -\ 30.24$ |
| — 30',4.. | 1.48293 — | donc | $h' = 19.21.12.$ |

Quand la petite hauteur a été mesurée la dernière, on la réduit à l'horizon de la première, et le calcul fait connaître la latitude de ce dernier lieu.

Il ne faut pas oublier de corriger l'heure à laquelle on a observé la petite hauteur, de la différ. des méridiens des stations, pour réduire cette heure à celle qu'on aurait trouvée sur l'horizon de la plus grande hauteur, si l'on eût mesuré en effet

la petite, au même instant physique où elle a été prise sous un autre méridien.

161. Dans le cas général où l'on observe deux astres, si l'on veut se servir des tables de sinus naturels, on peut remplacer les équ. ($a$ et $b$), p. 223, qui donnent l'arc $\delta$, et les équ. ($g$ et $h$), p. 224, qui donnent $c$, par les formules suivantes, où les arcs auxiliaires $\phi$ et $\nu$ ne sont pas introduits, ce qui rend inutiles deux des quatre équ. dont il s'agit, et simplifie beaucoup les calculs.

$$\cos\delta = \cos(d' - d) - 2\sin d \sin d' \sin^2 \tfrac{1}{2} t, \qquad (b'')$$

$$\sin l = \cos(z - d) - 2\sin d \sin z \sin^2 \tfrac{1}{2} y. \qquad (h'')$$

Reprenons le 1er exemple, p. 226, pour y appliquer ces formules.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2........ | 0.3010300 — | | | |
| sin $d$...... | 9.9727834....... | $d = 69°55'36''4$ | | |
| sin $d'$.... | 9.9952785 | $d' = 81.34.\ 0,0$ | | |
| sin² ½ $t$... | 9.6054304 | $d' - d = 11.38.23,6$... | cos = | 0.9794351 |
| | 9.87452[illegible] —........................................ | | | — 0.7490700 |
| | Comme ci-devant.. | $\delta = 76.40.53,2$... | cos $\delta$ = + | 0.2303651. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 2........ | 0.3010300 — | | | |
| sin $z$..... | 9.9813396....... | $z = 73°19'26''5$ | | |
| sin $d$..... | 9.9727834 | $d = 69.55.36,4$ | | |
| sin² ½ $y$.. | 9.1374376 | $z - d = 3.23.50,1$ | cos = | 0.9982425 |
| | 9.3925906 ................................ | | | — 0.2469395 |
| | Comme ci-devant.. | $l = 48.42.11,1$ | sin $l$ = | 0.7513030. |

162. On connaît ordinairement la latitude et l'heure à fort peu près, et l'on se propose d'obtenir ces quantités avec plus de précision : on préfère alors calculer l'heure par la hauteur absolue la plus éloignée du méridien, en se servant de la latitude estimée. (V. p. 125, la méthode des angles horaires.) Ensuite on trouve la latitude par la hauteur la plus voisine du méridien. (V. p. 214.) Cela ne présente aucune difficulté ; seulement il faut recommencer les calculs, lorsque les résultats auxquels on est conduit diffèrent notablement de ce qu'on avait

supposé. On se sert alors des valeurs de la latitude et de l'heure qu'on a obtenues.

Au reste, le procédé suivant, qui est usité en mer, quoique assez défectueux, est d'une application facile.

163. *Méthode de Douwes,* pour trouver la latitude sans connaître l'heure, en se servant de deux hauteurs du Soleil. Soient $h$ et $h'$ ces hauteurs corrigées de la réfrac. — parallaxe : on regarde la déclin. D qui répond à l'heure du milieu entre les observations comme constante pendant tout l'intervalle.

Soient $p$ et $p'$ les angles horaires inconnus qui répondent aux deux hauteurs $h$ et $h'$; $h$ et $p$ sont relatifs à la moindre hauteur, $h'$ et $p'$ à la plus grande; on connaît le temps vrai écoulé de l'une à l'autre. Dans la fig. 33, $s$ est l'astre à un instant, $s'$ à un autre moment, $ss'$ l'arc parcouru, $z$ le zénith, $p$ le pôle.

Les triangles sphériques $zsp$, $zs'p$, donnent, comme n° 145,

$$\sin h = \sin l \sin D + \cos l \cos D \cos p, \qquad (1)$$
$$\sin h' = \sin l \sin D + \cos l \cos D \cos p';$$

et retranchant la 1re équ. de la 2e,

$$\sin h' - \sin h = \cos l \cos D (\cos p' - \cos p).$$

Mais d'après l'équ. (9), page 2, on a

$$\cos p' - \cos p = 2 \sin \tfrac{1}{2}(p + p') \sin \tfrac{1}{2}(p - p'),$$
$$(*) \quad \sin h' - \sin h = 2 \cos l \cos D \sin y \sin \theta,$$

(*) Faisons de même $\sin h' - \sin h = 2 \sin \frac{1}{2}(h' - h) \cos \frac{1}{2}(h' + h)$, et nous aurons

$$\sin \tfrac{1}{2}(h' - h) \cos \tfrac{1}{2}(h' + h) = \cos l \cos D \sin \tfrac{1}{2}(p - p') \sin \tfrac{1}{2}(p + p').$$

Or, si les deux observations sont très rapprochées l'une de l'autre, $h$ et $h'$ diffèrent très peu, et de même pour $p$ et $p'$; on peut donc substituer les arcs $h' - h$, $p' - p$ à leurs sinus, et poser

$$\cos \tfrac{1}{2}(h' + h) = \cos h, \qquad \sin \tfrac{1}{2}(p + p') = \sin p;$$

donc $$(h' - h) \cos h = \cos l \cos D (p - p') \sin p.$$

$h' - h$ est le petit arc dont l'astre monte ou descend pendant le temps $\varphi$ mesuré par l'angle horaire $p - p'$; on a donc $15\varphi = p - p'$. Faisons $h' - h = s$, et nous aurons l'équ. de la p. 193, qui indique le mouvement vertical $s$ d'un astre dans le temps $\varphi$, qu'on suppose très court.

en faisant pour abréger

$$y = \tfrac{1}{2}(p + p') = \text{moyenne des angles horaires},$$

$$\theta = \tfrac{1}{2}(p - p') = \text{demi-temps écoulé}.$$

Soit donc posé

$$N = 2 \cos l \cos D, \qquad (2)$$

il vient

$$\sin h' - \sin h = N \sin y \sin \theta;$$

d'où

$$\sin y = \frac{\sin h' - \sin h}{N \sin \theta}. \qquad (3)$$

D'ailleurs on tire des valeurs ci-dessus de $y$ et de $\theta$

$$p = y + \theta, \qquad (4)$$

et l'équ. (1) mise sous la même forme qu'au n° 145, donne enfin

$$\cos(l - D) = \sin h + N \sin^2 \tfrac{1}{2} p. \qquad (5)$$

164. Voici l'usage qu'on fait de ces équ.

Quoique l'heure du lieu ne soit pas connue, on a le demi-temps écoulé $\theta$; ainsi on ôte les heures des deux observations et l'on en prend la différence, dont la moitié, exprimée en arc, est $\theta$. On remarquera que si les hauteurs sont prises des deux côtés du méridien, il faut, après midi, continuer de compter $13^h$, $14^h$,... au lieu de $1^h$, $2^h$,... $\theta$ est la demi-diff. des deux temps notés.

On calculera successivement log N, $y$ et $p$, par les équ. (2), (3) et (4); on se sert, pour valeur de $l$, de la latitude estimée. Enfin, l'équ. (5) fait connaître $l - D$, et par suite $l$.

Il arrive souvent que le résultat du calcul est une valeur de $l$ très différente de celle qu'on a supposée; alors on recommence l'opération, en partant, pour hypothèse, de la valeur de $l$ qui a été obtenue, ce qui n'exige que de petits changemens aux dernières décimales des log. Les tables de sinus naturels sont ici d'un secours très commode, et cette méthode perd sa brièveté quand on est privé de ces tables.

Reprenons l'exemple du 6 octobre 1830, p. 228, et supposons $l = 48^\circ 40'$, $D = -5^\circ 9' 48''$; on a trouvé

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Matin.. | 7ʰ 5′ 49″ 0 t. vr. | $h$ = | 8° 37′ 42″ 6 | sin = | 0.1500271 |
| Soir.... | 13. 2.47,8 | $h'$ = | 33.43.46 | sin = | 0.5552724 |
| 2θ = | 5.56.58,8 | | 9.6077180 .. | Numér. = | 0.4052453 |
| 2........ | 0.3010300 | N... — | 0.1190967 | | |
| cos $l$..... | 9.8198325 | sin θ — | 9.8466046........ | θ = | 44° 37′ 21″ 0 |
| cos D..... | 9.9982342 | sin $y$... | 9.6420167 | $y$ = | 26. 0.40,5 |
| log N... = | 0.1190967 | sin $h$ = | 0.1500271 | $p$ = | 70.38. 1,5 |
| sin² ½ $p$... | 9.5240030 | N sin² = | 0.4396425 | ½ $p$ = | 35.19. 0,8 |
| | 9.6430997 | cos = | 0.5896696 | $l$ — D = | 53.51.59,1 |
| | | | | D = | —5. 9.48,1 |
| | | | | $l$ = | 48.42.11,0. |

Comme la latitude obtenue excède de plus de 2′ celle qu'on a supposée, il faut refaire l'opération en partant de cette valeur de $l$; on retombera à fort peu près sur celle-ci, savoir $l = 48^\circ 42' 36'',4$, qui est la latitude demandée.

Quant à l'angle horaire $p$, le calcul corrigé donne $p = 70^\circ 39' 14'',2 = 4^h 42' 36'',9 =$ distance au méridien lors de l'observation du matin, qui s'est faite à $7^h 5' 49'',0$ : ainsi la montre retarde de 11′ 34″,1 sur le temps vrai.

La méthode de Douwes est d'un emploi si facile, qu'elle est d'un fréquent usage en mer, quoiqu'elle exige des corrections qui allongent les opérations, et que, dans certains cas, elle soit sujette à des inexactitudes. Mais on a des tables appropriées aux diverses latitudes, qui donnent de suite les valeurs des log. des facteurs, et les calculs deviennent très aisés. Ce procédé est d'une grande utilité aux marins, dont on ne saurait trop abréger les opérations, à cause des embarras et des fatigues qu'ils éprouvent, au milieu des circonstances pénibles où ils se trouvent sans cesse livrés.

*Sur l'usage des chronomètres et la manière de les régler.*

165. Régler une montre marine, c'est chercher deux choses : 1°. de combien elle diffère du temps moyen du lieu où l'on est, c'est-à-dire son *avance* ou *retard* absolu A ; 2°. *sa marche*, c'est-à-dire combien elle indique chaque jour moyen de plus ou de moins que 24 heures justes, ou la différence $a$ entre le nombre de secondes qu'elle bat, et 86400″. Pour déterminer ces deux quantités, on fera des observations astronomiques pour trouver l'heure moyenne du lieu, et la comparaison de cette heure avec celle qu'indique la montre, donnera l'avance absolue A, à l'instant dont il s'agit. On recommencera la même opération quelque temps après, et la différence entre les deux nombres obtenus pour A, sera la variation V pendant la durée écoulée $d$. Une proportion fera ensuite connaître la partie de cette variation V qui répond à $24^h$ ; savoir $d : V :: 24^h : a = \frac{24\,V}{d}$.

| | | |
|---|---|---|
| Le 24 mai à 8ʰ54′ du matin, l'on a trouvé.. | A = + | 50′59″9 |
| Le 31 mai à 11.40............................ | A′ = + | 44.40,5 |
| En 7 jours, 2ʰ46′ = 170ʰ,77. Variation.. | — | 6,19,4. |

Nous mettons — pour désigner que la marche de la montre retarde, car l'avance est moindre la seconde fois que la première. On pose donc, en $170^h,77$ retard $379'',4$ ; combien en $24^h$ ? et l'on trouve $a = 53'',32$. Ainsi le 31 mai à $11^h\,40'$ t. moy., le chronomètre avance sur le temps moyen de $44'\,40'',5$, et chaque $24^h$ il retarde de $53'',32$, en supposant que son mouvement soit régulier.

Le plus souvent en mer, c'est le Soleil qu'on observe, et l'on obtient le temps vrai du lieu ; mais à l'aide de l'équ. du temps (n°. 108), on traduit le temps vrai en moyen, et l'on trouve A et A′. Ainsi, dans l'exemple ci-dessus, on avait

| | | | |
|---|---|---|---|
| 24 mai à.. | 8ʰ57′32″7 t. vr. | 31 mai à.. | 11ʰ42′44″0 t. vr. |
| Équ. temps. | 11.56.27,8 | Équ. temps. | 11.57.17,4 |
| | 8.54. 0,5 t. moy. | | 11.40. 1,4 t. moy. |
| Montre.... | 9.45. 0,4 | Montre.. | 12.24.41,9 |
| | A = + 50.59,9 | | A′ = + 44.40,5 |

On trouvera que les observations pouvant être en erreur de quelques secondes, les nombres A et A' donnent, dans ce cas, une variation V fautive de la somme des deux erreurs ; mais comme on divise V par le temps écoulé, il convient, pour affaiblir ces erreurs, de mettre au moins 5 à 6 jours d'intervalle entre les deux observations, pour avoir la variation diurne $a$ à moins de 1'' près. (*V.* les remarques de M. de Rossel dans son *Astronomie nautique.*)

166. On règle ordinairement les pendules par les passages au méridien, la méthode des hauteurs correspondantes, ou celle des hauteurs absolues (nos 114, 136, 125). Mais lorsqu'on ne demande que l'avance diurne $a$, le procédé le plus simple consiste à observer, après quelques jours d'intervalle, les heures où une étoile revient à la même hauteur ; car le déplacement de l'astre par la précession, la nutation et l'aberration étant insensible, l'étoile doit reprendre chaque jour la même hauteur, à la même heure sidérale ; mais il faut dans cette méthode s'assurer avec un soin extrême que la bulle du niveau revient entre ses repères.

Si la pendule marque le temps sidéral, chaque fois que l'étoile se retrouve à la même hauteur l'heure indiquée doit donc être la même. Quand il n'en est pas ainsi, la différ. $\delta$ des heures marquées après un intervalle de $j$ jours, donne un quotient $a = \frac{\delta}{j}$ qui est l'avance diurne, quand les indications vont en croissant : $a$ prend le signe —, et exprime un retard, quand elles diminuent.

Par exemple, on a trouvé qu'Arcturus a même hauteur,

| | |
|---|---|
| 1°. Le 20 septembre, à.................. | $7^h 21' 9'' 9$ t. sid. |
| 2°. Le 25 septembre, à.................. | 7.20.55,4 |
| Différence en 5 jours.. $\delta =$ | 14,5 |
| Retard diurne (5e). ... $a = -$ | 2,9 |

Mais le plus souvent le chronomètre marque le temps moyen ; alors chaque jour sidéral, il doit retarder sur les étoiles de 3' 55'',91 (no 73). En retranchant l'heure indiquée quand l'é-

toile revient à la même hauteur, de celle qu'on avait d'abord, la différ. $\delta$ après $j$ jours doit donner un quotient $\frac{\delta}{j} = 3' 55'',91$. S'il n'en est pas ainsi,

$$a = 3',55'',91 - \frac{\delta}{j}$$

est l'avance diurne du chronomètre, qui est négative dans le cas d'un retard. Ainsi Régulus avait même hauteur

| | | |
|---|---|---|
| Le 5 février, la montre marquant...... | | 7h20′ 35″ t. m. |
| Le 10 février.......................... | | 7. 0.45 |
| Différ. en 5 jours. $\delta$ | = | 19.50 |
| Cinquième......... | = | 3.58 |
| Constante......... | = | 3.55,91 |
| Retard diurne......... | = — | 2,09. |

On fait ordinairement plusieurs observations successives d'égales hauteurs, et l'on prend pour $\delta$ la moyenne de toutes les différ. correspondantes. Le calcul prend alors la forme que nous donnons ci-après.

Nous n'avons pas eu égard aux différences de réfraction, et cependant les variations du baromètre et du thermomètre changent la hauteur apparente des astres. En reproduisant le raisonnement de la p. 194, on verra que si $r$ et $r'$ sont les réfractions lors des deux observations correspondantes, $s$ le nombre de secondes d'arc que l'astre décrit verticalement dans le temps $\tau$,

$$c = \frac{\tau(r - r')}{s}$$

est le temps dont l'observation a été faite *trop tôt* vers l'ouest, ou trop tard à l'est, pour que la hauteur fût réellement la même (c'est le contraire quand $c$ est négatif, savoir $r' > r$). L'heure de la 2e observation devant être retranchée de celle de la 1re, $c$ prend un signe contraire dans cette différence. Ainsi l'étoile étant à l'*est*, la différence des heures doit être *augmentée* de $c$; vers l'*ouest*, il faut *retrancher* $c$ de cette différence : la durée $c$ emporte d'ailleurs son signe avec soi, signe

qui est — quand $r' > r$. La règle à suivre est donc, conservant le signe qu'on a trouvé par $c$,

*à l'est ajoutez* c, *à l'ouest retranchez* c.

Voici la forme qu'on donne aux opérations. Régulus étant à l'est, on a trouvé un soir :

| Haut. | 5 février. | 10 février. | Diff. en 5 j. |
|---|---|---|---|
| 10°10′ | à ... 7h20′35″ | à ... 7h0′45″ | 19′50″ |
| 10.15 | 21.11 | 1.20 | 19.51 |
| 10.20 | 21.45 | 1.56 | 19.49 |
| 10.25 | 22.20 | 2.30 | 19.50 |
| $s = 15'$ | $\tau = 1'45''$ | Moyenne = | 19.50 |
| Moy. 10° 17′ 30″ | Th. 11° 1.......... | — 2°2 | — 3,31 |
| | Bar... 744,2.......... | 774,7... | 19.46,69 |
| | $r = 5'\,3'',5$ | $r' = 5'\,31'',9$ | — 3.57,34 |
| | $r - r' = -28'',4$ | | 3.55,91 |

Chronomètre retarde sur temps moyen.. — .. 1,43.

Après avoir calculé $r$, $r'$ et leur différ. $r - r'$, puis $s = 900''$, $\tau = 105''$ et la moyenne entre les différ. des heures d'observations, on cherche la valeur de $c$, savoir,

$$c = -\frac{105 \times 28,4}{900} = -3'',31.$$

Comme l'astre est à l'est, on ajoute $c$ (avec son signe) à 19′50″, et l'on a la marche de la montre pour cinq jours. On prend le cinquième, et on le retranche de 3′55″,91 ; la diff. étant négative, on a un retard diurne de 1″,43 sur le temps moyen.

167. Une fois que les nombres A et $a$ sont connus, il est facile de trouver l'état du chronomètre à une époque donnée, du moins s'il a conservé sa marche uniforme.

Le 4 novembre une montre avançait à midi moy. de 3′ 52″,6 ; son avance diurne est de 10″,42 ; on demande quelle est l'heure moy. le 15 novembre, quand elle marque $7^h\,19'$ du soir ?

La différ. des heures extrêmes est $7^h\ 19'$; mais en déduisant l'avance primitive de $4'$ dont la montre est affectée, on trouve pour le temps écoulé $11^j\ 7^h\ 15' = 11^j,302$. Multipliant cette durée par $10'',42$, le produit $117'',77$, est l'avance dans le temps écoulé, ou.................... — $1'\ 57''77$

| | | |
|---|---|---|
| 11/302 | Avance primitive.... | — 3.52,60 |
| 10,42 | Montre, le 15...... | 7.19. 0,0 |
| 113,02 | Il est au temps moy. | 7.13. 9,63. |
| 4,52 | | |
| 23 | | |
| 117,77 = 1' 57",77. | | |

La correction a été faite sur le temps écoulé, qu'on supposait être $11^j\ 7^h\ 15'$, tandis que ce résultat montre qu'il n'était que $11^j\ 7^h\ 13',2$: il faut donc refaire le calcul de correction avec ce nombre, qui donne le facteur $11^j,301$. L'avance serait de $0'',01$ plus faible dans le temps écoulé, et le résultat serait accru d'autant.

Si la pendule retardait, au lieu d'avancer chaque jour, il faudrait prendre les données avec le signe —, ce qui changerait les signes du calcul ci-dessus.

Il a été reconnu, par des observations, 1°. qu'un jour la pendule avançait sur le temps sid. de.................................... + 38"24
2°. Le lendemain, $20^h\ 42'$ après, l'avance était............ + 31,08

La pendule retarde en $20^h,7$ sur t. sid.................... — 7,16
Ce qui fait en $24^h$ ($20^h,7 : 7'',2 :: 24^h : x$)................ — 8,35
et par heure.......... — 0,348.

Or, $18^h\ 18'$ après la première observation, on en a fait une autre; la pendule marquait.................................... $15^h 7'\ 19''62$
Avance primitive..... — 38,24
Retard en $18^h,3$...... + 6,37

Donc le phénomène est arrivé, en t. sid., à............: 15.6.47,75.

168. Comme la *Conn. des Tems* est calculée pour le méridien de Paris, on trouve commode de comparer les chronomètres au temps moyen de cette ville. Un vaisseau, par exemple, avant de quitter le port, fait régler sa montre pour connaître, 1°. l'avance ou retard absolu A, sur le méridien du lieu, à un jour et un instant déterminés; 2°. l'avance ou retard

diurne $a$. D'après la longitude du lieu par rapport au méridien de Paris, on en conclut l'avance ou retard absolu H, sur le temps moyen de cette ville, à midi H est l'heure du chronomètre à midi moyen de Paris.

Par exemple, on trouve qu'à Toulon le chronomètre avance chaque jour de $a = 12'',56$, et que son avance totale est $8' 44'',25$ sur le méridien du lieu, le soir, à.......................................... $7^h 54' 42''$ t. moy.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $12'' 56$ | Longit. est de Toulon. | $-$ | 14.22 |
| 12, 56 | Il est alors à Paris..... | | 7.40.20 t. moy. |
| 6, 28 | L'avance sur Toulon est | | 8.44,25 |
| $31''',40 = 0'',52$. | Longitude est......... | $+$ | 14.22,00 |
| | $0'',52$ d'avance horaire, en $7^h,67$... | $-$ | 3,99 |
| | Avance à midi moyen de Paris.. H | $=$ | 23. 2,26. |

C'est-à-dire que quand on compte midi moyen à Paris, le chronomètre marque l'heure $H = 0^h\ 23'\ 2'',26$, et avance par jour de $12'',56$, et par heure de $0'',52$ sur le temps moyen.

169. Pour représenter ces calculs par une formule, soit A l'avance du chronomètre, quand il est l'heure $t$ de temps moyen au méridien du lieu; $a$ l'avance diurne; $i = \frac{1}{24} a$ l'avance horaire; $l$ la longitude ouest du lieu en temps; comme on compte alors $(t + l)$ à Paris, $- i\,(t + l)$ est la correction qu'il faut faire subir à la montre pour rétrograder de $(t + l)$ heures. L'avance A sur le lieu, donne $A - l$ sur le méridien de Paris; ainsi l'avance du chronomètre, à midi moyen de cette ville, ou l'heure qu'il marque à cet instant est

$$H = A - l - i\,(t + l).$$

On prend $l$ en $-$ quand la station est à l'orient de Paris; $i$ devient négatif quand il s'agit d'un retard diurne; enfin A prend le signe $-$ quand le chronomètre retarde sur le lieu.

Ainsi, la montre retarde, à Brest, de $2' 17'',5$, quand on compte $5^h 10' 12''$ du soir t moy. Le retard diurne est de $-52'',80 = a$, d'où $i = -2'',20$. On a

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $t$ | $=$ | $5^h 10' 12''$ |
| | $l$ | $= +$ | 27.18 |
| Correction $i\,(t + l) = -12'',38$.. | $5^h,625$ | $=$ | 5.37.30 |
| | A | $= -$ | 2.17,5 |
| | $l$ | $= -$ | 27.18,0 |
| On ajoute $12^h$. | Correction | $= +$ | 12,4 |
| A midi moy. de Paris, chron. marque | H | $=$ | $11^h 30' 36'',9$. |

170. D'après cela, soit H l'heure marquée par le chronomètre un jour donné, quand il est midi moyen à Paris; $a$ la marche diurne ou l'avance régulière chaque jour, d'où l'on tire l'avance horaire $i = \frac{1}{24} a$ (ces quantités sont négatives, lorsque la marche retarde).

Après $n$ jours, le chronomètre marquera $H + an$, lorsqu'il sera midi moyen à Paris. Soit T l'heure actuelle du chronomètre, et $\theta$ l'heure moy. contemporaine à Paris, on a visiblement

$$H + an + \theta + i\theta = T,$$

équation qui fait connaître aussi l'heure $\theta$ de Paris, lorsque le chronomètre marque T, savoir

$$\theta = T - (H + an) - i\theta.$$

On néglige d'abord la petite correction $i\theta$, et on la fait ensuite sur la valeur approchée qu'on trouve pour $\theta$.

Par exemple, le 4 novembre la montre marque $H = 11^h 56' 7'',4$ quand il est midi moyen à Paris; l'avance est $a = 10'',42$ par jour, et $i = 0'',434$ par heure. Le 15 novembre, elle marque $7^h 19' 8''$; on demande quelle est l'heure moy. de Paris.

| | | |
|---|---|---|
| On ajoute 12.................. | $T =$ | $7^h 19'\ 8''$ |
| | $-H = -$ | $11.56.\ 7,4$ |
| En 11 jours, variation.... | $-an = -$ | $1.54,62$ |
| Heure approchée | $\theta =$ | $7.21.\ 5,98$ |
| Correction pour $7^h,35$... | $-i\theta = -$ | $3,19$ |
| Heure moy. de Paris........ | $\theta =$ | $7.21.\ 2,79.$ |

On comprend que dans notre équation ci-dessus, H peut signifier l'heure du chronomètre à midi moyen du port de départ, et $\theta$ l'heure moy. de ce lieu qui répond à l'heure T du chronomètre après $n$ jours. Nous n'avons pris Paris pour terme de comparaison que par des motifs de convenance qui peuvent ne pas exister dans tous les cas.

171. On voit donc qu'après un temps donné de navigation, on peut trouver l'heure moyenne de Paris, pourvu qu'au lieu de départ on ait réglé le chronomètre, c'est-à-dire qu'on ait

trouvé astronomiquement son avance diurne $a$ et son avance absolue A, sur le méridien du lieu, dont on suppose que la longitude est bien connue. On en tire d'abord l'heure $H + an$ du chronomètre à midi moy. de Paris, pour chaque jour, et l'heure moy. de cette ville, pour tous les autres instans, s'ensuit aisément. On peut donc calculer pour ce temps, converti en temps vrai, la déclin., l'asc. dr. du Soleil et de la Lune, et tous les autres élémens que fait connaître la *Conn. des Tems*, quand on a l'heure de Paris.

172. Comme on sait trouver l'heure du lieu où l'on se trouve, à l'aide des procédés ci-devant exposés, en supposant que la montre ait conservé sa marche, on trouvera aussi l'heure de Paris contemporaine : la différ. de ces heures est celle des méridiens, ou la longitude en temps.

Étant à Brest le 8 août, on a réglé le chronomètre, et l'on a reconnu qu'il retarde par jour de $a = -17'',24$ (d'où $i = -0'',718$ de retard horaire), et qu'il avance sur le t. moyen de ce lieu

| | | | |
|---|---|---|---|
| de A = | 5′ 17″3 | à l'heure $t$ = | $2^h 42' 18''$ de Brest |
| $-l = -$ | 27.18,0 | $l$ = | 27.18 |
| Corr. ...... + | 0. 2,27 .................. | | 3. 9.36 = $3^h,16$. |
| H = | 11.38. 1,57 = heure du chron. à midi moy. de Paris le 8 août. | | |

De plus, le 14 septembre, la montre marque $6^h 56' 40'',72$ du matin, à $6^h 19' 17'',8$ t. moy., sous le méridien où l'on se trouve porté; on demande la longitude. Voici le calcul :

| | |
|---|---|
| Le 13 à $19^h$ etc.................. T = | $18^h 56' 40'',72$ |
| $-$ H = $-$ | 11.38. 1,57 |
| En 36 jours écoulés, retard.... $-an$ = + | 10.20,64 |
| Heure approchée de Paris le 13 sept.... | 19.28.59,79 |
| Variation en $19^h,48$, retard.......... | + 13,99 |
| Heure moy. de Paris correspondante. $\theta$ = | 19.29.13,78 |
| Heure observée du lieu.............. | 18.19.17,80 |
| Longitude occidentale.................= | 1. 9.55,98. |

La longitude est *ouest* quand l'heure du lieu est plus petite que celle de Paris, et *est* quand cette heure est plus avancée.

173. Mais les meilleurs chronomètres sont sujets à se déranger, surtout en mer; les longitudes ainsi obtenues sont alors défectueuses, ce qui oblige de les corriger après coup, lorsqu'on arrive en quelque lieu dont la longitude est bien connue, ou qu'on la détermine avec précision par quelques-uns des moyens que nous exposerons. Voici, dans ce cas, comment on opère.

Supposons qu'on n'ait pas trouvé la marche du chronomètre d'accord avec la longitude déjà connue d'un port de relâche, et que l'erreur soit E; il s'agit de répartir cette erreur sur toutes les longitudes qui ont été déterminées dans l'intervalle par le chronomètre. On ignore quand et de quelle quantité le dérangement s'est produit; ainsi, on est incertain de la part que chacune de ces longitudes doit prendre à cette erreur E. On suppose alors que les dérangemens de la montre se sont faits par degrés et d'un mouvement uniforme, ce qui est le moyen le plus vraisemblable d'en tenir compte.

Soit donc $x$ la quantité dont la montre a varié le 1[er] jour, $2x$ le 2[e] jour, $3x$ le 3[e], ..., $nx$ le $n^e$ jour : l'erreur E est la somme de toutes ces erreurs, ou

$$E = x + 2x + 3x \ldots + nx = x(1 + 2 + 3 \ldots + n),$$
$$E = n\,\frac{n+1}{2}\,x,\quad x = \frac{E}{\frac{1}{2}n(n+1)}.$$

Ainsi, l'erreur E sera résolue en son élément $x$, $n$ étant le nombre de jours écoulés entre les deux stations pour lesquelles la longitude est bien connue. Et pour trouver la part E' de E qui convient après $n'$ jours, il faut prendre

$$E' = \tfrac{1}{2}n'(n' + 1)x.$$

Telle est la correction qu'on doit faire à la longitude du lieu intermédiaire dont il s'agit.

174. Pour montrer l'usage de cette théorie, prenons l'exemple cité dans le *Voyage de l'Uranie*, par M. Frecynet. (*Hydrogr.*, p. 315.)

Le 10 septembre 1815, à midi, le chronomètre avançait sur le temps moyen de Paris de 18′ 4″,2; le retard diurne était de — 0″,039. On est parti de

Toulon, et le 25 octobre on a pris des hauteurs du Soleil à Sainte-Croix de Ténériffe, ce qui a donné pour l'heure moy. du lieu $1^h\,24'\,30'',9$ ; le chronomètre marquait au même instant physique. ......... $T = 2^h 56'\ 5'',2$

| | | |
|---|---|---|
| Correction le 25 à midi moyen.......... | $H + an =$ | $-18.\ 2,4$ |
| Partie prop. de $0'',036$ pour $2^h\,38'$.................. | $+$ | $0.\ 0,1$ |
| Heure moy. de Paris, selon le chronomètre. ..... | $\theta =$ | $2.38.\ 2,9$ |
| Heure moy. observée du lieu.................... | | $1.24.30,9$ |
| Differ. des méridiens, selon le chronomètre........ | $=$ | $1.13.32,0$ |
| Longitude déjà connue du lieu.................... | $=$ | $1.14.22,6$ |
| Erreur de la marche en $45^j,11$................ | $E =$ | $-\ 50,6.$ |

Selon la méthode de tenir compte de cette erreur, il faudrait prendre

$$n = 45 \text{ avec } E = -50'',6, \text{ d'où } x = -\frac{50,6}{1035} = -0'',0489$$

en temps. Ainsi, pour une longitude déterminée le 30 septembre (après le départ, $20^j = n'$), l'erreur sera

$$E' = -10 \times 21 \times 0'',0489 = -10'',27.$$

Cependant il ne faut pas oublier que des causes cachées peuvent tellement agir sur les meilleurs chronomètres, que leur marche change quelquefois brusquement ; les longitudes obtenues avant ce changement sont exactes, et on les rendrait défectueuses en faisant frapper sur elles une part quelconque de l'erreur qu'on reconnaît ensuite. Dans les voyages de long cours, il faut surtout se tenir en garde contre les fautes que peuvent faire commettre les observations des chronomètres ; on doit vérifier souvent leur marche en recourant à des longitudes connues, comme nous venons de le faire dans l'exemple précédent. Comme la méthode des distances lunaires, qui sera exposée plus tard, fait connaître la longitude en mer, avec assez de précision, c'est un excellent moyen de s'assurer si le chronomètre s'est dérangé de sa marche habituelle.

Lorsqu'on a le temps de faire des observations suivies en un port de relâche, de manière à connaître la nouvelle variation diurne qu'a prise la montre, on calcule la longitude de ce port de deux manières, l'une avec la variation primitive,

l'autre avec la moyenne entre celle-ci et la seconde (ou la demi-somme des deux variations); l'erreur E est la différence entre ces deux longitudes. De là on tire $x$, comme ci-devant, puis E', etc....

Par exemple, étant dans un port de départ, le chronomètre avait pour avance diurne................................ $a = 17'',42$
30 jours après, dans un port de relâche, on a eu $a' = 32,18$

Moyenne ou demi-somme.................. $= 24,80$

Supposons qu'on ait calculé la longitude du port de relâche,

1°. Avec la 1re variation 17",42, et que cette longitude soit........................ 5h42' 20"
2°. Avec la variation moyenne.................. 5.38.10

Erreur en temps,... E = 4.10.

En divisant ce nombre, ou 250" par $\frac{1}{2}$ 30.31 = 465, on a $x = 0'',538$. Qu'une longitude ait été calculée après 18 jours de voyage, à l'aide de la 1re variation, et le résultat sera en erreur de $E' = \frac{1}{2}\,18.19.0'',538$, ou $E' = 92'',0 = 1'32''$ de temps. Cette erreur doit être en diminution de cette longitude, comme ci-dessus la moyenne des variations donnait aussi une longitude plus faible.

*Sur la détermination de la longitude d'une station.*

175. *Par les distances de la Lune au Soleil ou aux étoiles.* Nous avons exposé, n° 58, comment on construit les tables données dans la *Conn. des Tems*, aux pages 9, 10, 11 et 12 de chaque mois, où l'on trouve, de 3 en 3 heures, les *distances vraies* de la Lune au Soleil et aux principales étoiles du zodiaque, telles qu'on les verrait du centre de la Terre, si l'observateur, placé à Paris, se trouvait transporté au centre de la Terre, avec son méridien et son horizon; et nous avons dit que, par interpolation, on peut obtenir ces distances pour toutes les heures.

Maintenant, soit $l'$ la Lune (fig. 16) et $s'$ le Soleil ou une étoile, vus du centre de la Terre; de la surface, on ne voit pas

ces astres aux lieux où ils étaient vus, parce que la réfraction les élève, et la parallaxe les abaisse. La Lune semble située plus bas en $l$, parce que la parallaxe est beaucoup plus forte que la réfraction; le contraire a lieu pour le Soleil, qui paraît plus élevé en $s$ : les étoiles n'ont pas de parallaxe, et sont aussi vues plus haut par l'effet de la réfraction seule.

La distance vraie $l's' = \Delta$ est donc changée en une autre $ls = \delta$ qui est apparente; c'est cette dernière qu'on mesure avec un instrument et qui est connue. On évalue la distance entre deux bords, et l'on corrige ensuite des demi-diamètres, tels que les donne la *Conn. des Tems*. Voilà donc la *distance apparente* $\delta$ connue par observation, et l'on se propose d'abord d'en conclure la distance vraie $\Delta$, par le calcul.

Pour cela, en même temps qu'un observateur mesure la distance apparente $\delta$, deux autres mesurent les hauteurs apparentes $h$ et $h'$ des centres de la Lune $l$ et du Soleil $s$, lesquelles servent à trouver les hauteurs vraies H et H', en corrigeant de la *réfrac. — parall.* On note aussi l'heure du lieu, qu'on suppose connue par des opérations antérieures. Toutes ces quantités sont évaluées pour le même instant physique.

176. Il n'est pas même nécessaire que trois observateurs soient employés aux déterminations contemporaines de $\delta$, $h$ et $h'$; un seul peut suffire, et même les résultats sont plus certains de la sorte, parce qu'ils n'ont pas l'inconvénient de dépendre de la simultanéité des observations. Il mesure d'abord les hauteurs des astres, puis la distance apparente $\delta$; enfin, il mesure de nouveau les hauteurs. Il a soin de noter les heures de chacune de ces cinq observations; il réduit ensuite, par le calcul, les hauteurs à être contemporaines à la distance; il répartit donc la différence entre les deux hauteurs d'un même astre proportionnellement à la durée écoulée jusqu'à la mesure de $\delta$, précisément comme on l'a fait nº 141. On a donc ainsi les hauteurs app. $h$ et $h'$ des deux astres, à l'instant où l'on a mesuré $\delta$. Ce calcul est exact, quand les astres ne sont pas trop rapprochés du méridien, parce qu'on est en droit de supposer

qu'alors, dans une courte durée, les hauteurs varient proportionnellement au temps.

On pourrait aussi se dispenser de mesurer les deux hauteurs, parce qu'on sait les calculer pour l'heure où la distance $\delta$ a été prise; on se sert alors de l'équ. n° 133. Mais cette marche a peu de précision, et l'on n'y recourt que lorsqu'on ne peut faire autrement : d'ailleurs on est conduit à des calculs plus longs que ceux qu'on vient d'indiquer.

177. Les élémens connus du triangle sphérique apparent $lzs$ sont la distance $ls = \delta$, et les complémens des hauteurs observées $h$, $h'$. Ces trois côtés étant donnés, l'équ. fondamentale (33, page 4) de la *Trigonométrie sphérique*, donne

$$\cos lzs = \frac{\cos \delta - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'}.$$

Mais dans le triangle sphérique $l'zs'$, on a $l's' = \Delta$, et les deux autres côtés sont les complémens des hauteurs lorsqu'on les a corrigées de la réfr.—parall., c'est-à-dire les compl. de H et H', hauteurs vraies, vues du centre de la Terre, quand on suppose que l'atmosphère n'existe pas. On tire de même de ce triangle

$$\cos lzs = \frac{\cos \Delta - \sin H \sin H'}{\cos H \cos H'};$$

égalant ces deux valeurs de $\cos lzs$, il vient

$$\frac{\cos \delta - \sin h \sin h'}{\cos h \cos h'} = \frac{\cos \Delta - \sin H \sin H'}{\cos H \cos H'}.$$

Il n'y a dans cette équ. que l'arc $\Delta$ qui soit inconnu, ou la *distance vraie des deux astres :* il s'agit de l'en tirer, en rendant le calcul propre aux log. Ajoutons 1 aux deux membres et réduisons chacun à son dénominateur particulier; il vient

$$\frac{\cos \delta + \cos (h + h')}{\cos h \cos h'} = \frac{\cos \Delta + \cos (H + H')}{\cos H \cos H'}.$$

Or, en posant, pour abréger $2m = h + h' + \delta$, l'équ. (10),

page 1, change le premier numérateur en

$$2\cos\tfrac{1}{2}(h+h'+\delta)\cos\tfrac{1}{2}(h+h'-\delta)=2\cos m.\cos(\cos m-\delta).$$

Quant au second numérateur, puisqu'on a (équ. 5 et 6, p. 1)

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}\alpha=1+\cos\alpha,$$

$$2\sin^2\tfrac{1}{2}\beta=1-\cos\beta,$$

d'où $2\cos^2\frac{1}{2}\alpha-2\sin^2\frac{1}{2}\beta=\cos\alpha+\cos\beta$,

ce numérateur devient

$$2\cos^2\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{H}')-2\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta.$$

Ainsi notre équ. équivaut à

$$\frac{2\cos m.\cos(m-\delta)}{\cos h\cos h'}=\frac{2\cos^2\frac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{H}')-2\sin^2\frac{1}{2}\Delta}{\cos\mathrm{H}.\cos\mathrm{H}'},$$

d'où l'on tire

$$\sin^2\tfrac{1}{2}\Delta=\cos^2\tfrac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{H}')-\frac{\cos\mathrm{H}\cos\mathrm{H}'}{\cos h\cos h'}\cos m.\cos(m-\delta).$$

Cette équ. est rendue propre aux log. en posant

$$\sin\phi=\frac{\sqrt{\frac{\cos\mathrm{H}\cos\mathrm{H}'}{\cos h\cos h'}\cos m.\cos(m-\delta)}}{\cos\frac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{H}')};\qquad(1)$$

et l'on a $\sin\frac{1}{2}\Delta=\cos\frac{1}{2}(\mathrm{H}+\mathrm{H}')\cos\phi,$ (2)

$$2m=h+h'+\delta.\qquad(3)$$

Voici l'usage de ces équations. De la dernière, on tire la valeur de l'arc $m$; de la première, celle de l'arc auxiliaire $\phi$; enfin, la seconde fait connaître $\Delta$.

La distance vraie $\Delta$ ainsi obtenue est donc celle que l'observateur trouverait s'il était transporté au centre de la Terre, et s'il n'existait point d'atmosphère. Or, par l'interpolation entre les nombres $\Delta$, ou distances vraies, données dans la *Conn. des Tems*, il est facile de trouver quelle est l'heure de Paris où cette valeur de $\Delta$ subsiste dans les mêmes conditions. On sait donc quelle est l'heure comptée à Paris, et aussi quelle est

celle du lieu où cette distance vraie Δ existe : la différ. de ces heures contemporaines est celle des longitudes.

La méthode des distances lunaires est un des meilleurs procédés pour obtenir la longitude ; c'est à peu près la seule dont on puisse se servir en mer avec sécurité. Mais la précision du résultat dépend beaucoup de celle des observations ; et les difficultés que l'on rencontre pour faire ces dernières, sur un navire agité par les vents et les flots, jettent un doute assez prononcé sur l'exactitude des longitudes qu'on trouve de cette manière. Les marins reconnaissent qu'avec les meilleurs instrumens et les observateurs les plus exercés, les distances lunaires mesurées en mer sont de beaucoup inférieures à celles qui sont prises à terre.

Le 12 mai 1825, la latit. d'un lieu étant 36° 40′ B, et la long. estimée 54° O., on a fait, à 7h 40′ du matin, les observations contemporaines qui suivent :

| | | | |
|---|---|---|---|
| Haut. bord inf. ☉ = | 30°17′ 8″ | | 19h40′ |
| Haut. bord inf. ☾ = | 52.59.30 | Longit. | 3.36 |
| Dist. bords vois. = | 61.28.6 | | 23.16 = heure |
| Baromètre...... = | 739mm,9 | | estimée de Paris. |
| Therm. centig... = | +25° | | |
| Parall. horiz. ☾ = | 54′ 7″ | Demi-dia. ☾ = | 14′ 45″ |
| Parall. horiz. ☉ = | 8,73 | Demi-dia. ☉ = | 15.51 |
| Bord inf. ☾.... | 52°59′30″ | Dist. bords. | 61°28. 6 |
| Demi-diam. ☾.. | + 14.56 | ..............+ | 14.56 |
| Haut. appar.. $h$ = | 53.14.26 | Demi-dia. ☉ + | 15.51 |
| Parall. — réfr... | 31.43,8 | Dist. app. $\delta$ = | 61.58.53 |
| Haut. vr. ☾ ...H = | 53.46. 9,8 | $h$ = 53.14.26 | cos 9.7770327 |
| Bord inf. ☉.... | 30.17. 8 | $h'$ = 30.32.59 | cos 9.9350982 |
| Demi-diam. ☉.. | 15.51 | $2m$ = 145.46.18 | —19.7121309 |
| Haut. appar.. $h'$ = | 30.32.59 | $m$ = 72.53. 9 | cos 9.4687558 |
| Réfr. — parall.. | — 1.22,7 | $m - \delta$ = 10.54.16 | cos 9.9920867 |
| Haut. vr. ☉ H′ = | 30.31.36,3 | cos H.. | 9.7716145 |
| | | cos H′ .. | 9.9352009 |
| H + H′ = | 84.17.46,1 | ½..... 9.7277635....... | 19.4555270 |
| Moitié = | 42. 8.53,0 | cos..— 9.8700604....... | 9.8700604 |
| $\varphi$ = | 46. 6.19,2 | sin $\varphi$.. 9.8577031 | cos $\varphi$. 9.8409430 |
| Dist. vr. Δ = | 61.52. 3,5 | ....... 30°56′1″,75 | sin ½Δ. 9.7110034 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Le 11, à $21^h$..... | 62.53.33 | Conn. des Tems. | |
| Le 12, à midi.... | 61.32.18 | | $21^h$ |
| En 3 heures..... | 1.21.15 : 3h :: 1° 1′ 29″,5 : $x$ = | | 2.16.13,6 |
| | | Heure de Paris le 11 mai, à...... | 23.16.13,6 |
| | | Heure du lieu..................... | 19.40. 0,0 |
| | | Long. en temps, à l'ouest de Paris. | 3.36.13,6. |

Voici un exemple de distance de la Lune à Régulus.

Le 17 décembre 1823, après minuit, on a pris des distances de Régulus à la Lune (l'étoile étant à l'est et la Lune à l'ouest du méridien) et des hauteurs de ces deux astres, dont les moyennes sont celles qu'on trouve ci-après. La hauteur de l'étoile a d'abord fait connaître l'heure vraie du lieu = $14^h 59' 59'',7$ ; la latitude est 10° 1′ 50″ N, et la longitude estimée 30° 10′ à l'ouest de Paris. Voici les élémens de cette première partie de l'opération. (*V.* p. 183.)

| | | | |
|---|---|---|---|
| Heure du lieu.... | $14^h 59' 48''8$ | Haut. appar. ★. $h'$ = | 70° 34′ 9″ |
| Long. estimée.... | 2. 0.20,0 | Réfraction......... | — 20 |
| Heure de Paris.... | 17. 0. 8,8 | Haut. vr. ★.... H′ = | 70.33.49 |
| Æ ☉......... | 17.40.29,8 | Parall. horiz. équa.. | 1. 0.50,7 |
| Angle hor. ★... — | 1.18 31,2 | Dimin. pour la latit. | — 0,2 |
| ——— ☾... + | 2.42.16,8 | Paral. horiz. du lieu. | 1. 0.50,5 |
| Æ ★........... | 9.59. 0,9 | Demi-diam. horiz... | 16.34,8 |
| Æ ☾........... | 5.58.15,4 | ——— pour la haut. | 16.47,9 |
| Déclin. ★........ + | 12.49.17,4 | Distance observée.. | 58. 8.48 |
| Déclin. ☾....... + | 25.11. 7 | + Demi-diam... $\delta$ = | 58.25.36. |

D'après ces données, voici le calcul de la distance vraie :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Bord infér. ☾.. | 47° 44′ 1″1 | | | |
| + Demi-diam.. | 16.47,9 | $\delta$ = 58° 25′ 36″ | | |
| Haut. appar.. $h$ = | 48. 0.49,0 | $h$ = 48. 0.49 | cos.... | 9.8253962 |
| Parall. — réfr... + | 39.49,0 | $h'$ = 70.34. 9 | cos.... | 9.5220119 |
| Haut vr. ☾.. H = | 48.40.38,0 | 177. 0.34 | — | 19.3474081 |
| | | $m$ = 88.30.17 | cos..... | 8.4165499 |
| | | $m - \delta$ = 30. 4.41 | cos..... | 9.9371885 |
| | | H = 48.40.38 | cos..... | 9.8197415 |
| | | H′ = 70.33.49 | cos.... | 9.5221313 |
| H + H′ = | 119° 14′ 27″ | 9.1741016.............. | | 18.3482031 |
| Moitié = | 59.37.13,5 | cos. — 9.7039156.............. | | 9.7039156 |
| $\varphi$ = | 17.10.20,6 | sin $\varphi$. 9.4701860 | $\varphi$... | 9.9801947 |
| Dist. vr. $\Delta$ = | 57.47.12,4 | 28° 53′ 36″,2 | sin $\frac{1}{2}\Delta$. | 9.6841103. |

| | | |
|---|---|---|
| Le 17 à 15h... | 59. 2. 7 | |
| à 18.... | 57. 9.45 | 15h |
| en 3h.. | 1.52.22 : 3h :: 1h 14′ 54″,6 : $x$ = | 1.59′59″,9 |
| | Heure de Paris le 17 décembre à... | 16.59.59,9 |
| | Heure du lieu.................. | 14.59.59,7 |
| | Longit. en temps à l'ouest de Paris. | 2. 0. 0,2. |

Cette dernière proportion est un peu inexacte, parce qu'elle suppose à la Lune une marche uniforme; mais on peut recourir aux diff. 2es, comme on l'a dit p. 106. Ici, où l'intervalle n'est que de 3h, il faut remplacer 12 par 3 dans l'équ. (9), et l'on a

$$\frac{t}{3^h} = \frac{x}{A + \frac{1}{3}Bt}.$$

On prend, dans la *Conn. des Tems*, quatre distances successives, 2 antérieures et 2 postérieures à la proposée $\Delta$, et nommant $\Delta'$ la diff. 1re intermédiaire, on a

$B = \frac{1}{4}$ de la somme des deux diff. 2es,

$A = \Delta' - B$,

$x =$ correction de l'heure de départ.

On opère d'ailleurs précisément comme p. 109.

Ainsi, dans notre exemple, on trouve

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Dist. le 17 à 12h... | 60°54′ 22″ | *Diff.* 1res. | | |
| à 15h... | 59. 2. 7 | −1° 52′ 15″ | *Diff.* 2es. | |
| à 18h... | 57. 9.45 | −1.52.22 = Δ′ | − 7″ | |
| à 21h... | 55.17.17 | −1.52.28 | − 6 | B = − 3″,25. |

Ainsi, $B = -3'',25$, $A = -1°52'18'',75$, $x = 1^h 14' 54'',6$.

On néglige d'abord le terme $\frac{1}{3}Bt$, et l'on trouve $\frac{1}{3}Bt = +2'',17$, et le dénominateur $-1°52'16'',58$. Voici le calcul :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x$...... | 3.65269 | ........................ | 3.6526910 |
| A......− | 3.82858 | —... −1h52′ 18″75 3h... | 4.0334238 |
| $\frac{1}{3}t$....... | $\bar{1}$.82411 − | + 2,17 | |
| B......+ | 0.51188 − | −1.52.16,58.......− | 3.8284395 |
| + 2″,17. | 0.33599 | 2. 0. 5,7......... | 3.8576753. |

Ainsi, le 4ᵉ terme de la proportion doit être remplacé par ce résultat. L'heure vr. de Paris est $17^h\ 0'\ 5'',7$, et la longitude demandée est $2^h\ 0'\ 6'',0$. On voit combien cette petite correction a peu d'importance.

On se contente donc ordinairement de la proportion indiquée, et même on facilite l'opération en se servant de ce qu'on appelle les *logarithmes logistiques* ou *proportionnels*; on nomme ainsi les log. de la fraction $\frac{3^h}{T}$, T étant une durée quelconque. On a des tables de ces log.; on en trouve une à la fin de celles de Callet. On voit que ces log. dispensent de faire la soustraction exigée pour le 1ᵉʳ terme T de la proportion, puisque cette opération est toute faite dans cette table. Nous ne nous arrêterons pas à montrer ici comment on peut faire servir les log. proportionnels aux mêmes calculs que les log. ordinaires: on y suppléera aisément, en observant que les multiplications s'y trouvent changées en divisions, et réciproquement, et que le facteur commun $3^h$ doit disparaître de lui-même, quand on retranche un log. proportionnel d'un autre.

178. La méthode des distances lunaires est si fréquemment employée en mer, qu'on a cherché des moyens de la rendre d'une application facile. Nous ne dirons rien ici de la méthode abrégée de Lyons, qui ne donne que des longitudes éloignées, et ne paraît pas fondée en principes: les habiles marins en font peu de cas.

Celle de Dunthorne est souvent en usage. On prouve que dans l'état ordinaire de l'atmosphère, lorsque le Soleil ou l'étoile est à plus de 10° d'élévation, la fraction $\frac{\cos H'}{\cos h'}$, qui se rapporte à cet astre, est sensiblement constante, et a pour log. 0.000122. (*V.* le traité de M. Guépratte, t. I, p. 335.) Mais dans d'autres circonstances atmosphériques, ce facteur exige une petite correction qu'on réduit en table.

D'un autre côté, il est facile de calculer les différentes valeurs du facteur $\frac{\cos H}{\cos h}$ relatif à la Lune, pour toutes les hauteurs

et les parallaxes, sauf à faire subir à ces nombres les corrections qu'exigent les réfractions pour divers états de l'atmosphère. On a donc calculé une table d'où l'on peut tirer à vue le log. du facteur $\frac{\cos H}{\cos h} \cdot \frac{\cos H'}{\cos h'}$, et les petites corrections à y faire pour avoir égard au baromètre et au thermomètre. Ce procédé, dû à **Dunthorne**, rend donc l'opération très simple.

Mais on ne peut nier que ces tables ne soient d'un usage embarrassant, et même susceptibles d'une médiocre exactitude. On préfère toujours faire des calculs directs qui donnent des résultats précis, plutôt que de recourir à des tables moins exactes et exigeant de certaines corrections spéciales, dont l'usage laisse place à des erreurs, et nécessite une routine et une attention particulières.

Burckhardt se borne à simplifier l'opération pour ce qui concerne le Soleil ou l'étoile, parce que sa table est d'un usage facile, et a toute la précision du calcul direct. L'équ. (1) contient le facteur $\frac{\cos H'}{\cos h'}$, ou $\frac{\cos \text{haut. vr.}}{\cos \text{haut. app.}}$. Lorsqu'on veut appliquer cette formule à un exemple proposé, il faut calculer la hauteur vraie $H'$ du Soleil, d'après sa hauteur apparente $h'$, c'est-à-dire qu'il faut retrancher de $h'$, réfraction — parallaxe. S'il s'agit d'une étoile, on en fait autant, excepté qu'elle n'a pas de parallaxe.

Or, il est facile de calculer une table qui donne la valeur de $H'$, quand on connaît celle de $h'$, ou plutôt d'y inserire la valeur même du log. de la fraction $\frac{\cos H'}{\cos h'}$ pour toute hauteur observée $h'$, et pour l'état ordinaire de l'atmosphère ($760^{mm}$ et $10°$). C'est cette quantité qu'on trouve dans la *Conn. des Tems,* aux pages 162 et 163 : l'une des deux tables est pour le Soleil, et l'autre pour les étoiles; comme pour celles-ci la parallaxe est nulle, elles exigent une table à part. Ainsi, on est dispensé, par le secours de ces tables, du calcul des réfractions et des parallaxes de hauteur, dans la recherche des

log cos H′ et cos $h'$, et même de la soustraction de ces log., attendu qu'on en tire à vue la différence ; ces tables, qui donnent la valeur toute calculée de $\log \frac{\cos H'}{\cos h'}$, abrègent donc les calculs.

Il faut faire à ce sujet quelques remarques.

Dans ces tables, les hauteurs $h'$, qui en sont l'*argument*, ne procèdent pas par intervalles réguliers : afin de dispenser des interpolations, on a choisi des graduations qui conduisent à des résultats dont la différence soit 1.

Ces tables sont calculées pour le cas où le baromètre est à 760mm et le thermomètre centigrade à 10° ; on y donne une règle de correction pour le cas où l'état de l'atmosphère est différent de ces suppositions. Cette correction consiste à

*Retrancher* 5 *pour chaque degré au-dessus de* 10° ;

*Ajouter* 1,6 *pour chaque millimètre au-dessus de* 760.

On prend ces corrections en signes contraires quand il y a abaissement au-dessous de 10°, dans le premier cas, et au-dessous de 760mm dans le 2e.

Dans l'exemple qui vient d'être calculé p. 251, la hauteur apparente du Soleil est $h' = 30° 33'$ : en entrant dans la table avec ce nombre, on trouve 0,0001130 (les quatre premiers zéros sont indiqués en tête de la colonne). Tel serait $\log \frac{\cos H'}{\cos h'}$, si le baromètre était à 760mm, et le thermomètre à 10° : mais le premier de ces instrumens marquait 740, ou 2 centimètres de moins ; on doit donc retrancher 32 ; de plus, le thermomètre marquait 25° (ou 15 de plus que 10), il faut donc retrancher encore 5 fois 15, ou 75 ; en tout — 107 ; ce qui donne

$$\begin{array}{r} 1130 \\ -\ 107 \\ \hline \end{array}$$

$$\log \frac{\cos H'}{\cos h'} = 0{,}0001023.$$

Or, le calcul direct est............

$$\begin{array}{rl} \log \cos H' = & 9.9352009 \\ \log \cos h' = & 9.9350982 \\ \hline \text{Différ.} = & 0.0001020, \end{array}$$

résultat qui ne diffère que de 3 unités du 7[e] ordre, de celui de la table : l'un peut être substitué à l'autre sans erreur sensible.

Comme les variations qu'éprouve la parallaxe de la Lune sont très rapides quand la hauteur $h'$ change, on n'a pas construit de table propre à faire connaître log $\frac{\cos H.}{\cos h}$; ainsi on n'est pas dispensé des calculs de réfraction et de parallaxe pour la Lune; les opérations ne sont rendues plus simples qu'en ce qui concerne le Soleil et les étoiles. On trouve dans la *Conn. des Tems*, p. 216, un exemple où ce genre de calcul est employé, ce qui nous dispense d'en présenter ici un autre.

179. La réfraction devient d'autant plus forte que l'astre s'abaisse davantage; le diamètre vertical du Soleil et de la Lune est diminué, puisque le bord supérieur est un peu moins relevé que l'inférieur; ainsi le disque reçoit la forme apparente d'une ellipse. Ce qu'on prend pour demi-diamètre de l'astre est donc un de ses rayons obliquement au grand axe horizontal $2d$, rayon qui est dirigé du centre de la Lune à celui du Soleil, ou à l'étoile. La correction qu'il faut faire à la distance mesurée du bord est précisément l'arc égal à ce rayon oblique, et non pas au demi grand axe $d$.

Soient $k$ et $k'$ les hauteurs vraies du bord supérieur et de l'inférieur ; $r$ et $r'$ les réfractions correspondantes ; $k+r$, $k'+r'$ les hauteurs apparentes de ces bords; la différence est le diamètre vertical $= k - k' - (r' - r)$, ou $2(d - i)$, en posant $2i = r' - r$ : en sorte que le disque a la forme d'une ellipse dont les demi-axes sont $d$ et $d - i = b$. L'aplatissement est $\mu = 1 - \frac{b}{d} = \frac{i}{d}$. Le rayon $d'$, qui fait avec l'horizon un angle $\theta$, a donc pour longueur

$$d' = d(1 - \mu \sin^2 \theta) = d - i \sin^2 \theta.$$

D'où l'on voit que, lorsque l'on mesure la distance du bord de la Lune ou du Soleil, la correction de demi-diamètre propre à

donner la distance apparente du centre, ne consiste pas à ajouter ou retrancher le demi-diamètre $d$, mais bien $d'$; en sorte qu'il faut avant réduire $d$ à la valeur $d'$, c'est-à-dire corriger le demi-diamètre horiz. $d$ de la quantité $- i \sin^2 \theta$.

Ce n'est que quand la Lune ou le Soleil sont près de l'horizon que cette correction acquiert quelque importance, attendu que ce n'est qu'alors que la réfraction élève sensiblement plus le bord inférieur que le supérieur. Dès que l'astre atteint 10° de hauteur, la différence $2i$ de réfraction des deux bords cesse d'être sensible, et l'on peut substituer $d$ à $d'$. Comme en général cette différence $2i$ est fort petite, d'une part, on néglige cette correction le plus ordinairement, et de l'autre, quand on veut y avoir égard, il n'est pas nécessaire de connaître l'inclinaison $\theta$ avec beaucoup d'exactitude.

On trouve dans les tables astronomiques du Bureau des Longitudes et la plupart des bons traités de Navigation (Guépratte, Ducom, etc...), une table d'où l'on tire à vue la correction dont il vient d'être question.

180. *Par des feux terrestres.* Supposons deux stations qui ne soient pas éloignées de plus de 8 à 10 lieues; deux observateurs s'y tiennent, et y déterminent exactement l'heure moyenne ou sidérale sous leur méridien propre, et sont munis de bons garde-temps, dont la marche est bien connue. En un lieu intermédiaire, et à des heures convenues d'avance, on fait des signaux de feu; un tas d'environ une once de poudre à canon est enflammé, ou bien une fusée est lancée en l'air et y éclate, ou bien enfin des feux de terre sont cachés, puis subitement découverts. On donne la préférence à celui de ces procédés qui convient le mieux aux localités et aux distances; des fusées peuvent être aperçues de quinze lieues, ce qui permet d'éloigner de 30 lieues les deux stations; un feu d'un mètre de largeur ne paraît, à la vue simple et à la distance de 12 lieues, que comme une étoile tertiaire. Selon M. Dezach, 4 à 6 onces de poudre à canon brûlées en plein air peuvent être aperçues de jour à plus de 7 lieues, et même, de nuit, à 50 ou 60 lieues de distance; et cela, quoique les pays où l'on fait l'observation

soient hors de toute portée des instrumens d'Optique, et que des montagnes soient interposées. La lumière paraît, dans ce dernier cas, comme un éclair répercuté par la voûte céleste. Enfin, les fusées qui éclatent dans les hauteurs de l'atmosphère peuvent être vues à des distances plus grandes et allumées en des lieux plus bas.

L'explosion d'un feu est vue de deux stations au même instant physique où elle a été produite, tant la rapidité de la lumière est grande, puisqu'elle parcourt 70 mille lieues par seconde ; mais les heures comptées par les deux observateurs sont différentes, parce que ce sont celles de leurs méridiens respectifs. La différence de ces heures est celle des longitudes.

Il faut répéter plusieurs fois l'expérience, et tirer de chacune la valeur de la longitude : la moyenne entre tous les résultats, qui doivent très peu différer les uns des autres, peut être considérée comme exacte, parce que les erreurs d'observations doivent se compenser. Mais cette moyenne est affectée des erreurs des chronomètres ; c'est-à-dire que si les heures de chaque station n'étaient pas rigoureusement connues par des observations astronomiques (*v.* p. 173, 155 et 186), faites avant ou après l'expérience, l'erreur se reporterait en entier sur la longitude cherchée.

181. Si la distance des deux stations est trop considérable pour y pouvoir apercevoir un feu intermédiaire, il faut recourir à un plus grand nombre de stations. Par exemple, soient A et B (fig. 22), deux observatoires très distans, où l'heure est exactement déterminée, et dont on demande la différence des longitudes. On placera en C et D des personnes munies de chronomètres, et il ne sera pas nécessaire que les heures soient connues avec précision en ces lieux intermédiaires ; seulement les montres devront avoir été étudiées d'avance, pour en connaître la marche par comparaison : il ne faut pas non plus que la régularité en soit altérée dans la durée des expériences, attendu que ces montres ne doivent servir qu'à rendre les observateurs C et D attentifs à l'instant convenu d'avance où les feux doivent apparaître.

On fait éclater des feux en des lieux successifs $a$, $b$, $c$; on notera en A l'heure exacte du feu $a$, on en fera en B pour le feu $c$ : en outre on écrira en C les heures des feux $a$ et $b$, non pour avoir ces heures absolues, mais seulement pour conclure la différence de ces temps. Par exemple, on saura que $a$ a éclaté $m$ minutes avant $b$ ; d'où l'on inférera que si H est l'heure où, de A, on a vu le feu $a$, $H + m$ est celle où, de A, on aurait vu le feu $b$, si la distance $Ab$ l'eût permis. On donne le signe — à $m$ quand on voit le feu $b$ éclater avant $a$.

De même si, de D, on a vu le feu $b$, $m'$ minutes avant le feu $c$, ce dernier aurait été aperçu en A à une heure égale à $H + m + m'$.

Voilà donc l'heure du feu $c$ déterminée pour le méridien de A, comme s'il eût été possible de le voir de la station A, en sorte qu'on est ramené au premier cas où un feu $c$ est visible en même temps des deux extrémités A et B. Si l'heure du feu $c$ vu de B, est H', la différ. des méridiens est $H + m + m' - H'$.

On remarquera que l'on peut beaucoup varier les comparaisons ; car il est facile de trouver de même l'heure de B où le feu $a$ serait vu au lieu B, et d'en déduire la différence en longitudes ; de même aussi pour le feu $b$. D'ailleurs quand les deux chronomètres extrêmes en A et B sont réglés avec exactitude sur les méridiens de ces stations respectives, l'opération n'est atteinte d'aucune autre erreur que de la détermination du moment où chaque feu éclate, erreur qu'on diminue en répétant les expériences plusieurs fois ; mais il faut qu'on ait avec précision les heures des stations A et B, ce qui se déduit de hauteurs absolues d'étoiles, etc.

182. *Par le lock et la boussole.* Le lock donne la vitesse d'un navire, la boussole la direction qu'il suit ; on peut ainsi marquer *le point*, c'est-à-dire indiquer chaque jour le lieu du vaisseau, sur une carte marine. Ce procédé très imparfait, qu'on appelle l'*estime*, n'étant pas fondé sur des théories astronomiques, n'entre pas dans le plan de notre ouvrage. (*V.* l'*Uranographie*, n° 237.)

183. *Par une triangulation géodésique.* Lorsqu'on connaît

la distance qui sépare deux points, mesurée sur l'arc de sphéroïde qui les joint, l'azimuth de cet arc sur l'horizon de l'une des extrémités et la latitude de celle-ci, on sait trouver par le calcul la longitude et la latitude de l'autre station. C'est ce qui a été exposé au n° 89.

184. *Par l'heure du passage de la Lune au méridien.* Cette méthode est très exacte; elle suppose qu'à l'aide d'une lunette des passages on a noté l'heure précise où le bord visible de la Lune a traversé le méridien.

Soit $l$ la longitude ouest, en temps, de cette station par rapport à Paris, ou à tout autre lieu où l'on a fait une semblable observation : $l$ est le *temps sidéral physiquement écoulé* entre les passages d'une même étoile aux deux méridiens. On a dû compter, à ces deux instans, en chaque station, la même heure sidérale, qui est l'asc. dr. de l'étoile en temps; mais il s'est réellement écoulé un temps sidéral $= l$.

Or, les choses se passent différemment pour la Lune, parce qu'elle change d'asc. dr. pendant l'intervalle de l'un des passages à l'autre. Le temps sidéral écoulé est $= l + \phi$, $\phi$ désignant la différence numérique entre les heures sidérales des deux passages observés : et comme dans 1 heure sid. il passe au méridien 15° de l'équateur, dans le temps $\phi$ il passe $15°.\phi$. La Lune, par sa marche propre vers l'est, a donc décrit dans le sens de l'équateur cet arc $= 15°.\phi$.

Soit $d$ le nombre de degrés du mouvement d'asc. dr. de cet astre en 1 heure de temps vrai, c.-à-d. l'espace qu'il décrit en 1 heure vraie, dans le sens de l'équateur. Désignons par $s$ le mouvement d'asc. dr. du Soleil en temps, et en 24 heures vraies; c'est la différence entre deux distances ☉♈ consécutives. La marche de cet astre en 1 heure vraie est $m = \frac{s}{24} = 2\frac{1}{2}.\frac{s}{60}$. (*V.* n° 17.) Les quantités $d$ et $s$ se tirent de la *Conn. des Tems* (*v.* n° 80). Donc $d$ et $15\phi$ sont des arcs décrits par la Lune dans les temps sid. $1 + m$ et $l + \phi$; et l'on a cette proportion :

Puisqu'en $1^h + m$ de temps sid. la Lune décrit l'arc $d$,

dans le temps sid. $l+\phi$, elle décrit $15^\circ.\phi$;

$$d(l+\phi)=15^\circ\,\phi\,(1^h+m).$$

On peut, sans erreur sensible, prendre la marche du Soleil moyen pour celle du Soleil vrai, et faire $1+m=1^h\,0'\,9'',86$.

185. On voit d'abord que si, connaissant l'heure sidérale du passage de la Lune au méridien de Paris, on voulait trouver celle du passage sous un autre méridien dont la longitude $l$ est connue en temps, on tirerait de cette équ. la valeur de $\phi$, qui exprime le retard de l'un de ces passages sur l'autre, savoir :

$$\phi=\frac{\frac{1}{15}d.l}{(1^h+m)-\frac{1}{15}d}.$$

En ajoutant $l$ à $\phi$, on aurait l'heure sidérale $l+\phi$ du passage au méridien de la station proposée lorsqu'elle est à l'ouest de Paris : si elle se trouve à l'orient, il faut prendre $l-\phi$.

Par exemple, sachant que la Lune a passé au méridien de Paris le 11 juillet 1828 à $6^h\,10'\,8'',34$ de temps sid., on demande l'heure du passage à Greenwich, qui est situé à $9'\,21'',8$ à l'ouest. On trouve d'abord dans la *Conn. des Tems* $s=4'\,4'',7$, d'où $m=10'',20$; puis la diff. asc. dr. ☾ en $12^h=6^\circ 13'\,30''$, d'où $d=31'\,7'',5$; le $\frac{1}{15}$, ou $\frac{4}{60}\,d=2'\,4'',5$.

| | | |
|---|---|---|
| $\frac{1}{15}d=2'\,4''5$ | ………………… | 2.09517 |
| $1^h+m=60.10,20$ | $l=9'\,21'',8$…. | 2.74958 |
| Dénom. $=58.\ 5,70$ | ……………………— | 3.54229 |
| | $\phi=20'',07$… | 1.30246 |

Heure sid. de Paris. … $=6.10.\ 8,34$

Heure sid. de Greenwich $=6.10.28,41$.

Réciproquement, si les heures des passages aux deux stations sont connues, notre équ. donnera la diff. $l$ des longit.

$$l=\frac{\phi}{\frac{1}{15}d}\left(1^h+m-\frac{1}{15}d\right). \qquad \text{(P)}$$

Comme on ne peut observer que le passage de l'un des bords,

les temps sid. où arrivent ces passages font le sujet de ce calcul. (*V.* ci-après.)

On a observé, à Paris et à Kœnisberg, les passages du bord occidental de la Lune, le 25 octobre 1830, et l'on a trouvé,

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | à Paris, heure moyenne......... | $6^h 54' 53'' 04$ |
| | | à Kœnigsberg.................. | 6.52. 5,90 |
| | | Differ. en temps moyen.... | 2.47,14 |
| | | Correction, table II....... + | 0,46 |
| | | En temps sidéral......... $\varphi$ = | 2.47,60 |
| La *Conn. des Tems* donne........ | | var. en $24^h$ de ⊙♈ = | 3′ 50″0 |
| Æ ☾ à midi, le 25.. | 310° 0′ 40″ | | 3.50,0 |
| à minuit......... | 316.41.57 | Moitié...... | 1.55,0 |
| Differ. en $12^h$........ | 6.41.17 | $m$ = | 9″ 35‴,0 |
| En 1 heure vraie. $d$ = | 0.33.26,42 | $\varphi = 167'',6$.... | 2.22427 |
| Dénominateur. $\frac{1}{15}d$ = | 2.13,76 | Facteur...... | 3.54106 |
| $1^h + m$ = | 60. 9,58 | Dénominateur. — | 2.12633 |
| Facteur.......... = | 57.55.82 | | 3.63900. |

Longitude de Kœnigsberg $= 1^h 12' 35'',2$.

Nous avons pris ici pour $m$ le $12^e$ de la marche en asc. dr. pendant $12^h$; le résultat aurait été plus exact en cherchant le mouvement horaire $m$ de la Lune par le procédé de la p. 103, et comme ce mouvement horaire $m$ varie sans cesse, on l'évalue pour le milieu entre les instans des deux passages observés.

186. Il ne sera même pas nécessaire que l'observation du passage du bord lunaire ait été faite sous le méridien de Paris, parce que le passage en cette ville peut être calculé (n° 122). En effet, on cherchera d'abord l'heure sid. du passage du centre de la Lune (n° 120), et il restera à corriger ce nombre du temps sid. que le demi-diamètre met à traverser le méridien.

Soient D la déclin. de la Lune, et $\varrho$ son demi-diam. horiz. (p. 58) pour ce moment; $\frac{\varrho}{\cos D}$ est l'angle horaire ou l'arc d'équateur compris entre les deux cercles horaires du centre et du bord (p. 163). Si l'on réduit en temps, on a $\frac{\varrho}{15 \cos D}$ pour la durée sid.

du passage, ou la correction demandée. Il est évident que l'accroissement de diamètre apparent dû à la hauteur de l'astre (p. 182) ne change pas la durée de son passage au méridien.

Lorsqu'on exige une grande précision, il faut tenir compte du mouvement propre de la Lune pendant cette courte durée. Comme $d$ est, en degrés, la marche d'asc. dr. en 1 heure vraie, ou en $1^h 9'',856$ de temps sid. $= 1^h,00274$ (v. n° 73), elle sera $\frac{d}{1,00274} = 0,9973.d$, en 1 heure sid. Les 15° d'équateur sont réduits à $15° - 0,9973d$, et l'on a cette proportion :

Si $15° - 0,9973d$ sont décrits en 3600'' de temps. sid., $\frac{\varrho}{\cos D}$ l'est dans le temps T

$$T = \frac{3600'' \varrho}{(15° - 0,9973.d)\cos D}.$$

*T est le nombre de secondes sidérales que le demi-diamètre lunaire emploie pour traverser le méridien.* Si l'on voulait cette durée en temps moyen, il suffirait de remplacer le facteur 0,9973 par 1. Le mouvement horaire de la Lune est $d$ en degrés; $\varrho$ est aussi un arc exprimé en degrés, aussi bien que $15° - 0,9973d$.

Dans notre second exemple ci-dessus, on a

$$d = 33' \, 26'',42 \text{ à } 6^h 56' \text{ de t. moy., ou } 7^h 11' \text{ de t. vr.;}$$

on trouve $\quad D = -14° 55' \quad$ et $\quad \varrho = 15' \, 35'',5.$

Ensuite $\quad 0,9973d = 33' \, 31'',0.$

Ainsi, on a ce calcul, où l'on prend T négatif, parce que le bord observé étant l'occidental, passe au méridien avant le centre :

| | | |
|---|---|---|
| 3600''..... | 3.55630 | |
| $\varrho$......... | 2.97104 | |
| 15° — etc.. — | 4.71591 | |
| cos D..... — | 9.98511 | |
| | 1.82632..... | T = — 1' 7''0 |
| Heure du passage du centre à Paris.... | | 6.56. 0,0 |
| Heure du passage du bord.......... | | 6.54.53,0 t. m.

187. *Méthode du cap. Grant.* Lorsqu'on s'est assuré de l'exacte orientation de la lunette méridienne, par les procédés indiqués p. 169, on peut trouver la longitude d'une station par l'heure du passage d'un bord lunaire, sans qu'on ait besoin d'y comparer l'observation de ce phénomène faite en un autre lieu, en suppléant à cette dernière par le calcul. Voici comment on doit opérer.

On note les heures des passages du bord de la Lune et de quelque étoile au méridien, en se servant d'un chronomètre de temps moyen; la différence de ces heures, corrigée de l'accélération des fixes (table II), est le *temps sidéral* $t$ *écoulé entre les deux passages*. Cette diff. n'aurait besoin d'aucune correction, si la pendule suivait le temps sidéral. On ajoute $t$ à l'asc. dr. apparente de l'étoile ou on l'en retranche, suivant qu'elle passe avant ou après la Lune, et l'on a $Æ\star \pm t$ *pour l'asc. dr. du bord.*

Enfin, corrigeant du demi-diamètre $\varrho$ (n° 186), il vient pour l'*asc. dr. du centre de la Lune, lorsque le bord est au méridien,*

$$A = Æ\star \pm t \pm \frac{\varrho}{15 \cos D}.$$

D est la déclin. de la Lune, $\varrho$ son demi-diamètre en arc; on prend + pour ce dernier terme quand on a observé le bord ouest, et — pour le bord est; enfin, il faut $+t$ quand l'étoile passe la première, et $-t$ quand c'est la Lune.

Cela fait, on calcule l'heure solaire vraie T de l'observation du passage, c.-à-d. l'heure apparente contemporaine à l'heure sid. $Æ\star \pm t$. Cela est facile, puisqu'on connaît à peu près la longitude du lieu (n° 110); ainsi, on sait qu'à l'heure vraie T de la station, l'asc. dr. du centre de la Lune était A.

Mais d'un autre côté, on peut obtenir l'heure vraie T′ de Paris, à laquelle cette asc. dr. A avait lieu; car on sait, par la *Conn. des Tems*, quelle est la marche de la Lune en asc. dr. (n° 85): on doit avoir égard aux différ. secondes dans cette évaluation.

Voilà donc deux heures T′ et T où le centre de la Lune

était vu de celui de la Terre, au même point du ciel; la diff. de ces temps vrais T′ — T est l'asc. dr. du méridien de Paris moins celle du méridien du lieu, quand le bord lunaire s'y trouve, c.-à-d. l'angle horaire de ces deux méridiens, ou la longitude $l$ occidentale de la station, $l = T' - T$. On a $l$ négatif pour les longitudes vers l'orient.

Le 30 mai 1825, on a trouvé, à Calcutta, que lorsque le bord ouest de la Lune était au méridien, le chronomètre de temps moyen indiquait

| | |
|---|---|
| | 11h33′10″50 soir. |
| Le passage d'Antarès s'est fait à......... | 12.38.23,20 |
| Temps moyen écoulé... | 1. 5.12,70 |
| Accél. des fixes (t. II)... | + 10,72 |
| Temps sid. écoulé... $t$ = | 1. 5.23,42 |
| Asc. dr. d'Antarès Æ★ = | 16.18.45,82 |
| Asc. dr. du bord ouest de la Lune.... | 15.13.22,40 |
| Déclin. 21° 22′ 46″, ☾ = 16′ 10″. Correct. + .. | 1. 9,48 |
| Asc. du centre ☾.. A = 228° 37′ 58″,2 = | 15.14.31,88. |

Voici le calcul de l'heure vraie du passage du bord; on prend la longitude du lieu = 5h 44′ est de Paris (v. p. 154.):

| | |
|---|---|
| Asc. dr. du bord, ou heure sid. de l'observ........ | 15.13.22,40 |
| ⊙♈ à midi de Paris.............................. + | 19.32. 6,70 |
| Heure vraie approchée............................ | 10.45.29,10 |
| Depuis ce midi, il s'est écoulé 5h 4′ 29″, et à raison de — 4′ 4″,7 en 24h, ou 10″,20 par heure, la correction est. | — 51,76 |
| Heure vraie de l'observation du bord.............. | 10.44.37,34. |

| | | Asc. dr. ☾. | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 29 mai, | minuit. | 218° 2′ 46″ | *Diff.* 1res | | |
| 30 | midi... | 225 29.22 | 7° 26′ 36″ | *Diff.* 2es. | Quart de la |
| 30 | minuit. | 233. 2. 3 | Δ′ = 7.32.41 | + 6′ 5″ | somme. |
| 31 | midi... | 240.38.38 | 7.36.35 | 3.54 | B = 149″,75 |

A = 7° 30′ 11″,25; (V. p. 106.)

Asc. dr. le 30 midi = 225° 29′ 22″
Æ centre ☾..... = 228.37.58,2
$x$ = 3. 8.36,2

$x$...... 4.05370
A......— 4.43154
$\frac{1}{11}t$.... $\bar{1}$.62216
B...... 2.17537
1.79753 ...... 1. 2,74

A = 7°30′11″25
12 h..... 4.6354837
$x$....... 4.0537006

Première approximation. 7.31.13,99 ............— 4.4325524
Heure vraie de Paris. T′ = 5. 0.56,5 ............ 4.2506319
Heure vr. de Calcutta. T = 10.44.37,3
Longit. de Calcutta.. $l$ = 5.43.40,8 à l'orient de Paris.

Ce procédé est un des plus commodes pour avoir les longitudes, lorsqu'on est muni d'une lunette méridienne. Il acquiert une assez grande précision lorsqu'on observe les passages de plusieurs étoiles. Il n'est pas nécessaire de refaire le calcul pour chacune; on prend la moyenne entre les temps des passages, et celle des asc. dr. des étoiles, et l'on fait comme si l'on n'avait observé qu'une seule étoile ayant cette asc. dr. et cette heure de passage.

On peut remplacer le passage d'une étoile par celui du Soleil, puisqu'on en connaît l'asc. dr., et même il est facile de trouver l'heure vraie du passage du bord lunaire, attendu que la variation de l'équation du temps en $24^h$, permet d'évaluer en temps vrai toute durée moyenne écoulée.

Par exemple, le 17 novembre 1825, le Soleil a passé au méridien de Prome,

| | |
|---|---|
| le chronomètre marquant........................ | $0^h 40' 29'' 2$ |
| et le bord ouest de la Lune à................ | 6.51.54,0 |
| Durée écoulée selon le chronomètre......... | 6.11.24,8 |
| Inégalité de la marche du chron. en $6^h 11' 26''$. | + 1,1 |
| Temps moyen écoulé. .................... | 6.11.25,9 |
| Variation de l'équ. du temps = $-12'',5$ en $24^h$ donc, en $6^h 11'$........................ | − 3,07 |
| Heure à l'instant du passage du bord....... | 6.11.22,8 |
| Asc. dr. ☉ à cette heure (*)............... | 15.30. 6,9 |
| Asc. dr. du bord lunaire à son passage. .... | 21.41.29,7 |
| Demi-diam. de la Lune en asc. dr.......... | + 1. 1,1 |
| Asc. dr. du centre. .......... $325° 37' 42''$ = | 21.42.30,8. |

En cherchant l'heure vraie de Paris pour laquelle cette asc. dr. a lieu, on trouve, par un calcul semblable à celui qui a déjà été fait, que cette heure est.................................... $T' = 0^h 0' 2'' 1$

Mais cette heure est à Prome....... $T = 6.11.23$

Donc, longitude orientale de Prome, $l = 6.11.20,9$.

(*) On suppose que Prome est situé à $6^h 12'$ de longitude orientale; retranchant de $6^h 11'$, il reste $23^h 59'$: c'est l'heure de Paris contemporaine, pour laquelle on calcule l'asc. dr. ☉.

188. *Méthode de MM. Nicolaï et Baily, par les culminations comparées de la Lune et d'une étoile.*

L'exactitude de la méthode qui vient d'être exposée dépend de celle de la pendule et de la lunette méridienne; le résultat est affecté de l'erreur entière de ces deux instrumens. Le procédé que nous allons expliquer n'a pas cet inconvénient, et une petite erreur sur l'une et sur l'autre n'exerce aucune influence sur la précision de la détermination.

On observe le passage au méridien d'un bord de la Lune et celui d'une étoile qui ait une déclin. à peu près égale, afin de n'avoir pas besoin de changer la direction de la lunette, pour que ces deux astres soient successivement aperçus dans le champ. Il est aisé de connaître d'avance, sur un catalogue, quelles sont ces étoiles qu'on appelle de *culmination lunaire;* elles sont d'ailleurs annoncées dans des éphémérides, où l'on en indique l'asc. dr. et la déclin., ainsi que celles de la Lune, pour les différentes dates où l'observation est possible. On obtient donc, par cette observation, la durée sidérale écoulée entre ces deux passages, à chacune des stations dont on demande la différ. en longitude. Et comme le calcul est basé sur cette durée seulement, nous allons montrer qu'une petite erreur tant sur la position de la lunette que sur l'heure de la pendule n'altère pas la précision du résultat.

En effet, soient $\tau$ et $\tau'$ ces erreurs, qui sont constantes pour les deux observatoires, dans une durée peu considérable, pendant laquelle nous supposerons d'abord que le demi-diamètre de la Lune ne change pas. Soient A et A′ les asc. dr. en temps du centre de l'astre aux instans des deux culminations, $p$ le temps sid. employé au passage du demi-diamètre, $A \pm p$, $A' \pm p$ celles du bord, $a$ celle de l'étoile, $t$ l'intervalle de temps sidéral écoulé entre les deux observations faites à la station occidentale, $t'$ la durée pour la station orientale. Admettons que l'étoile passe la première aux deux méridiens, ou que son asc. dr. est moindre que celle de la Lune, qui se trouve située à la gauche de l'étoile : dans le cas contraire, il faudra prendre négatives les durées $t$ et $t'$.

D'après ces notations, on voit que $\tau + A \pm p$, $\tau' + A' \pm p$, sont les heures sidérales indiquées par les deux pendules lors des passages du bord lunaire; ce sera $\tau + \alpha$, $\tau' + \alpha$ pour l'étoile; prenant les différences, on a les valeurs de $t$ et $t'$, savoir

$$t = A \pm p - \alpha, \quad t' = A' \pm p - \alpha,$$

d'où $t - t' = A - A' =$ diff. des asc. dr. du centre ou du bord de la Lune,
= marche de ce bord en asc. d. dans la durée des passag. lunaires.

Ainsi, les nombres $t$ et $t'$ donnés par les pendules, sont indépendans des erreurs $\tau$ et $\tau'$; leur differ. $t - t'$ l'est aussi du demi-diamètre et de l'asc. dr. $\alpha$ de l'étoile, arcs qu'il n'est pas nécessaire de connaître. Dès qu'on aura trouvé $t$ et $t'$, on aura donc la quantité

$$\phi = t - t',$$

qui entre dans l'équ. (P) du n° 186. Pour plus de précision, il sera bon d'observer le même jour plusieurs culminations d'étoile; chacune donnera le nombre $\phi$, qu'en toute rigueur on devrait trouver le même, puisque ces valeurs de $\phi$ représentent la même quantité, qui est la differ. des asc. dr. lunaires à l'instant des passages de la Lune aux méridiens des deux stations; mais les petites erreurs du pointé font trouver pour $\phi$ des nombres un peu inégaux, et l'on prend la moyenne de ces résultats $\phi'$, $\phi''$, $\phi'''$, ... pour vraie valeur de $\phi$; ou $\phi =$ diff. entre les moyennes de $t$ et de $t'$.

D'un autre côté, les mouvemens horaires $d$ et $m$ de la Lune et du Soleil se tirent de la *Conn. des Tems* (n^os 17, 43 et 81). Tout est donc connu dans l'équ. (P), et le calcul donne facilement la differ. $l$ des longit. des stations.

Par exemple, le 3 mars 1822, on a observé à Dorpat et à Manheim les culminations du bord ouest de la Lune et de l'étoile 309 Mayer des Gémeaux, située à l'ouest, et l'on a obtenu pour différences des heures des passages,

| Manheim. | Dorpat. |
|---|---|
| $t = 13' \, 18'',30$, | $t' = 10' \, 17'',56$, |

d'où $t - t' = \phi = 3' \, 0'',74 = 180'',74.$

D'après les heures des observations et les longitudes approchées des deux villes par rapport au méridien de Paris, on obtient bientôt à peu près l'heure de ce méridien qui répond à chaque observation, et prenant le milieu, on trouve qu'il est environ $8^h \, 18'$ du soir à Paris le 3 mars. On comprend que cette évaluation n'étant nécessaire que pour trouver le mouvement horaire de la Lune, comme ce mouvement varie très peu pendant 1 à 2 heures, il n'est pas de rigueur qu'on connaisse exactement les longitudes des deux villes. La *Conn. des Tems* donne pour cette heure la quantité $d = 35' \, 45'',0$ en arc, et $2' \, 23'',0$ en temps. D'ailleurs, $s = 3' \, 43'',4$ est la variation du Soleil en asc. dr. et en temps pour $24^h$, d'où $m = 9'',31$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\phi$........ | 2.2570543 | Donc | 1 h. + $m$ = 60′ 9″31 |
| Facteur. | 3.5398674 | Dénom. $\frac{1}{15}$ $d$ = | 2.23,0 |
| Dénom..— | 2.1553360 | Facteur..... = | 57.46,31. |
| $l$....... | 3.6415857, | $l = 1^h \, 13' \, 1'',13$ = longitude de Dorpat à l'est de Manheim. | |

Le 5 décembre 1824, le lieutenant Foster a observé les différences d'heures entre les culminations de la Lune et des deux étoiles 62 et 95 du Taureau, à Port-Bowen, station où le cap. Parry a passé l'hiver, lors de son expédition polaire. De semblables différences ont été observées aussi à Greenwich. Ces durées, en temps sidéral, sont les suivantes :

| | A Greenwich. | A Port-Bowen. |
|---|---|---|
| 62 Taureau. .... | + 9′ 45″58 | + 24′ 53″98 |
| 95 ———. .... | — 9.25,98 | + 5.42,90 |
| Moyennes...... | $t'$ = 0. 9,80 | $t$ = 15.18,44, |

$$t - t' = \phi = 15' \, 8'',64 = 908'',64.$$

Comme on présume que Port-Bowen est à $5^h 55' 40''$ à l'ouest de Greenwich, qui est à $9' \, 22''$ ouest de Paris, on en conclut qu'à l'heure du milieu entre les observations, on comptait à Paris $14^h 48'$, et qu'alors, d'après la *Conn. des Tems*, le

mouvement d'asc. dr. de la Lune en 1 heure vraie est l'arc $d = 36' 53'',0$, dont les $\frac{4}{60}$ sont $2' 27'',53$. De plus, la marche du Soleil en asc. dr. pour $24^h$ est $4' 22'',0 = s$, d'où $m = 10'',92$. On fera donc ce calcul pour l'équ. (P) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $p$ ....... | 2.9583919 |
| $\frac{1}{15} d =$ | $2' 27'' 53 =$ dénom. | Facteur. | 3.5395014 |
| 1 h. + $m$ = | 60.10,92 | Dénom..— | 2.1688803 |
| Facteur. | 57.43,39 | $5^h 55' 31'',1$.... | 4.3290136. |

Ainsi, Port-Bowen est à $5^h 55' 31'',1$ de longit. à l'ouest de Greenwich.

189. Ces déterminations ne peuvent être considérées que comme approchées, à moins que les deux stations ne diffèrent que de 1 à $2^h$ au plus en longit. Il y a deux causes d'erreur : 1°. dans l'intervalle des deux culminations de la Lune, la distance de cet astre à la Terre change sensiblement, et par suite son demi-diam. Le temps $p$ que le disque met à traverser le méridien n'est donc pas le même aux deux stations, et $p$ doit être remplacé par $p'$ à la seconde. La valeur de $t - t'$ n'est donc plus $A - A'$, mais

$$A - A' \mp (p - p') = \text{diff. d'asc. dr. du bord de la Lune.}$$

2°. Le mouvement horaire $m$ de cet astre varie sensiblement d'un instant à l'autre, et notre calcul a été fait sur la valeur de $m$ qui répond au milieu de la durée ; le résultat est affecté d'une petite erreur due à cette circonstance, ce qui conduit à ne plus se servir de l'équ. (P) dans les déterminations de la diff. des longit. lorsqu'on exige de la précision.

Voyons à avoir égard à ces deux causes d'erreur.

190. I. Pour tenir compte des variations du diam. de la Lune dans l'intervalle des deux culminations de cet astre, soient $r$ et $r'$ les demi-diam. en arcs *vus du centre de la Terre*, et D, D' les déclin. de la Lune aux instans où son centre passe à chacun des méridiens. On a déjà fait la remarque que l'accroissement de diamètre que prend la Lune en s'élevant sur l'horizon n'influe pas sur la durée de son passage (p. 182). Les angles horaires sont, comme n° 186, $\frac{r}{\cos D}$, $\frac{r'}{\cos D'}$ ; et les du-

rées nécessaires pour traverser le méridien sont (en divisant par 15) $p = \frac{r}{15 \cos D}$, $p' = \frac{r'}{15 \cos D'}$. On a donc

$$A - A' = \phi = t - t' \pm p - p',$$

c'est-à-dire qu'*en temps sidéral, la différ. $\phi$ des asc. dr. du centre de la Lune, ou sa marche dans le sens de l'équateur, pendant l'intervalle de ses deux culminations, est* (*)

$$\phi = t - t' \pm \tfrac{1}{15}\left(\frac{r}{\cos D} - \frac{r'}{\cos D'}\right). \qquad (1)$$

On prend + dans le cas où l'on a observé le bord occidental, et — pour le bord oriental, savoir : + depuis la nouvelle jusqu'à la pleine Lune, et — le reste du temps.

Cette équ. fait connaître, d'après les durées observées et le calcul, de combien la Lune a procédé en asc. dr. pendant le temps écoulé. Mais il faut remarquer que, pour obtenir les deux derniers termes, il est nécessaire avant tout d'évaluer les heures vraies de Paris, lors des deux passages de la Lune aux méridiens respectifs des stations ; et comme ces termes varient très lentement, et sont même presque égaux entre eux pour des stations fort éloignées, il n'est besoin de connaître ces heures qu'à peu près (à 1' près), et une connaissance imparfaite des longitudes des lieux suffit pour cela (**).

191. II. Nous pouvons maintenant calculer les asc. dr. de la Lune lors des deux culminations de cet astre ; et d'abord,

---

(*) Nous rappellerons, une fois pour toutes, que les lettres accentuées se rapportent à l'observatoire oriental, et celles qui ne le sont pas, à l'occidental. On suppose ici que l'étoile passe avant la Lune aux méridiens ; ce qui conduit à prendre $t$ et $t'$ négatifs, quand l'étoile passe la dernière.

(**) L'équ. (2) peut être employée au calcul de l'heure vraie H de Paris lors de l'une des culminations ; on y mettra pour $h'$ l'heure H' du passage à Paris, donnée dans la *Conn. des Tems*, et pour $l$ la longitude supposée de la station rapportée au méridien de Paris. En en disant autant de l'autre station, on a donc les heures vraies de Paris, qui permettent de calculer $r$, $r'$, D et D'. Mais cette équ. (2) peut être simplifiée, en considérant qu'il ne faut

cherchons les heures vraies $h$ et $h'$ comptées à Paris à cet instant. Soit $l$ la différ. de longitude des deux stations, $l+\phi$ est la durée sidérale physiquement écoulée entre les deux passages (n° 184). Réduisons cette durée en temps vrai. Soit $s$ le mouvement d'asc. dr. du Soleil en $24^h$ (diff. entre les deux distances ⊙♈ consécutives); $24^h+s$ de temps sid. valent donc $24^h$ de temps vrai; ainsi $l+\phi$ vaut

$$(l+\phi)\frac{24^h}{24^h+s} = \text{temps vrai écoulé entre les deux culminations lunaires.}$$

Par conséquent, si l'on ajoute ce temps à l'heure $h'$ comptée à Faris, lors de la culmination orientale, on a l'heure de cette ville pour la culmination occidentale, $h$ et $h'$ étant des temps vrais : ainsi

$$h = h' + (l+\phi)\frac{24^h}{24^h+s}. \qquad (2)$$

Cette équ. fait connaître l'une des heures vraies $h$ et $h'$ par l'autre. Elle n'est pas exacte en toute rigueur, puisqu'on y emploie $l$ au lieu de sa véritable valeur inconnue : en outre l'heure supposée $h'$ peut s'éloigner plus ou moins de la vérité, ce qui altère aussi le nombre $h$; mais comme ces heures $h$ et $h'$ ne sont utiles que pour connaître les asc. dr. A et A' de la Lune, lors des deux culminations de cet astre, et qu'on n'emploie ensuite que la différ. A — A', il est clair qu'il n'en résulte qu'une très petite erreur, pourvu que la durée $h - h'$ soit

---

connaître ces heures qu'à 1' près; on y prendra $\phi = t - t'$, et l'on remplacera le facteur fractionnaire par sa valeur moyenne 0,99727 (v. p. 88), savoir,

$$H = H' + (l + t - t') \times 0,99727:$$

et remarquez que cette opération est très facile, puisque le dernier terme de l'équ. se trouve en diminuant la durée $(l + t - t')$ de l'accélération des fixes, table I, précisément comme on l'a fait dans le calcul de l'heure moyenne (n° 110) par l'heure sidérale, ou dans celle du passage des étoiles au méridien (n° 114).

presque exacte, et il sera facile de corriger cette erreur, ainsi qu'on va le dire.

192. Maintenant qu'on connaît les heures vraies $h$ et $h'$, comptées à Paris à l'instant de chaque culmination du centre de la Lune, on peut calculer les asc. dr. en temps de ce centre, pour ces instans, en ayant égard aux diff. secondes (nº 81). Ces arcs sont d'abord exprimés en degrés, mais en prenant le $15^e$ (ou les $\frac{4}{60}$), on les obtient en temps sid., savoir A et A'. La différ. de ces temps est A — A', qu'on sait être $=\phi$; ainsi après les calculs de A et A', on devrait obtenir pour A — A' la valeur $\varphi$ déjà trouvée (1). Il est vrai que les causes d'erreur ci-dessus mentionnées font qu'il existe presque toujours entre $\varphi$ et A — A' quelque petite différence, savoir : $\varphi - (A - A')$, qui montre que la diff. présumée $l$ des longitudes était défectueuse; l'erreur supposée à la marche lunaire étant appelée $x$, c'est $l+x$ qu'il aurait fallu prendre pour avoir $\phi = A - A'$.

Soit $\delta$ la marche lunaire d'asc. dr. en 12 h. vraies, telle que la donne, en degrés, la *Conn. des Tems*; il faut la multiplier par $\frac{1}{15}$ ou $\frac{4}{60}$, pour l'avoir en temps : ainsi $\frac{8}{60}\delta$ est, en temps sid., la marche lunaire en asc. dr. pendant 24 h. vr., ou pendant $24^h + s$ de temps sid., $s$ étant la marche diurne du Soleil en asc. dr. On a donc cette proportion :

Si $\frac{8}{60}\delta$ est la marche en asc. dr. pendant le temps sid. $24^h + s$, l'erreur $\varphi - (A - A')$ répondra au temps $x$, savoir :

$$x = \{\varphi - (A - A')\} \frac{24^h + s}{\frac{8}{60}\delta}. \qquad (3)$$

La différ. des longitudes, au lieu d'être $l$, comme on l'avait supposé, est donc $l+x$; et si l'on cherche de nouveau l'heure $h$ par l'équ. (2), en se servant de $l+x$ au lieu de $l$, et qu'on calcule A', on devra trouver que A — A' est précisément le nombre $\varphi$.

Le 30 mai 1822, M. Bouvard a observé à Paris les passages de l'épi et du bord ouest de la Lune, l'étoile étant située du

côté de l'est : le lendemain matin, M. Rumcker a fait ces mêmes observations à Paramatta, dans la Nouvelle-Galle méridionale, et l'on estime que cette ville est à $9^h\,54'\,30''$ Est de Paris, ou $14^h\,5'30'' = l$ à l'ouest, d'après la remarque faite ci-devant, puisque la culmination y est arrivée après celle de Paris. Ici $t$ et $t'$ sont négatifs, parce que l'étoile est vue à gauche de la Lune et culmine après cet astre. On a obtenu

| Paris. | Paramatta. | |
|---|---|---|
| $t' = -32'.21'',86,$ | $t = -5'.41'',81,$ | $t - t' = +26'\,40'',05.$ |

La culmination du centre de la Lune à Paris s'est faite à $8^h\,16'$ t. vr., à peu près : celle de Paramatta a donc dû avoir lieu lorsqu'on comptait $22^h\,46'$ t. vr. à Paris, ainsi qu'il résulte du calcul suivant, conformément à la note précédente. On évalue les déclin. et demi-diam. de la Lune pour ces heures, puis la valeur (1) de $\varphi$, le tout ainsi qu'il suit.

| | |
|---|---|
| $l =$ | $14^h\ 5'30''$ |
| $t - t' =$ | 26.40 |
| | 14.32.10 |
| Correction (table I).. | — 2.23 |
| | 14.29.47 |
| H' = | 8.16 |
| H = | 22.46 |

| | | Differ. | | Var. par heure. |
|---|---|---|---|---|
| Déclin. ☾, 30 mai, à midi = | 7° 25' 46" Aust. | 2° 39' 16"... | 5 fois... | 13' 16"3 |
| minuit = | 10. 5. 2 | 2.32.49 | ........... | 12.44,1 |
| 31 mai, à midi = | 12.37.51. | | | |

| | | | |
|---|---|---|---|
| Var. en 1 h. = | 13' 16"3 | ............... | 12' 44"1 |
| 8 h. ...... | 1° 46. 10,4 | 10 h. ... | 2° 7.21,0 |
| 15'........ | 3.19,1 | 40'. .... | 8.29,4 |
| 1'........ | 13,3 | 6'. ..... | 1.16,4 |
| | 1.49.42,8 | | 2.17. 6,8 |
| Déc à midi = | 7.25.46 | à minuit | 10. 5. 2 |
| D' = | 9.15.29 Aust. | D = | 12.22. 9 |

Demi-diam., 30 mai, midi.. 14′ 55″ Diff. — 6″ En 1 h. .... 0″25
31.............. 14.49
En 8h 16′..... — 2″06 En 22h 46′. — 5,7
14′ 55 14.55
$r' = 14.53,0$ $r = 14.49,3$

| | | | |
|---|---|---|---|
| $r'$.......... | 2.9508515 | $r$..... | 2.9490483 |
| cos D′.....— | 9.9943056 | cos D...— | 9.9898002 |
| 904″,786.... | 2.9565459 | 910″433 ............ | 2.9592481 |
| | | — 904,786 | $t-t'$ = 26′ 40″05 |
| | | 5,647 | A..... 0,376 |

On a $s = 4' 4'',6 = 244'',6$

$\varphi$ = 0° 26.40,426
24 h......... 4.9365137 $l$ = 14. 5.30,000

| | | | |
|---|---|---|---|
| $l+\varphi$........ | 4.7187542 | ........................ $l+\varphi$ = | 14.32.10,43 |
| $24+s$. ....— | 4.9377416 | | |
| | 4.7175263 | ........................ | 14.29.42,66 |
| | | Culmin. ☾ à Paris. ...... | 8.16 |
| | | ———— à Paramatta... | 22.45.42,66. |

Calculons les asc. dr. ☾ pour ces deux instans, en ayant égard aux diff. 1res, 2es et 3es, comme p. 100 :

| *Asc. dr.* ☾. | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 29, minuit. | 181°54′54″ | *Diff.* 1res. | | |
| 30, midi... | 187.21.58 = $\gamma_0$ | 5°27′ 4″ | *Diff.* 2es. | |
| 30, minuit. | 192.50.38 | $\Delta^1$ = 5.28.40 | 1′ 36″ | *Diff.* 3es. |
| 31, midi... | 198.22.37 | 5.31.59 | 3.19 | 103″ = $\Delta^3$. |

$\varphi = +73'',75$, $A = 5° 27' 34'',83$, $B = +48''$, $C = +17'',17$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $t$ = 8h 16′. . | 4.4736329 | | | | |
| Comp. 12 h.. | $\bar{5}$.3645163 | | | | |
| | $\bar{1}$.8381492 | double.. | $\bar{1}$.67630 | triple... | $\bar{1}$.51445 |
| Const. A. .. | 4.2934694 | B. ..... | 1.68124 | C. .... | 1.23477 |
| | 4.1316186 | | 1.35754 | | 0.74922 |
| | 3°45′ 40″00 | | + 22″,78 | | + 5″,62 |
| | + 22,78 | | | | |
| | + 5,62 | | | | |
| $\gamma_0$ = | 187.21.58,00 | | | | |

Æ ☾ = 191. 8. 6,40 à la culmination de Paris.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $22^h 45' 42'',66$. | 4.9135101 | | | | |
| Comp. $12^h$... | $\bar{5}$.3645163 | | | | |
| | 0.2780264 | double.. | 0.55605 | triple.. | 0.83408 |
| Const. A.... | 4.2934694 | B. ..... | 1.68124 | C...... | 1.23477 |
| | 4.5714958 | | 2.23729 | | 2.06885 |
| | $10°21'21''71$ | | $+172'',70$ | | $+117'',18$ |
| | 2.52,70 | | | | |
| | 1.57,18 | | | | |
| | 187.21.58,00 | | | | |
| Asc.dr. ☾ = | 197.48. 9,59 | à la culmin. de Paramatta. | | | |
| | 191. 8. 6,40 | ——— de Paris. | | | |
| Différ. = | 6.40. 3,19 | | | $\frac{1}{15}$ ou $A - A'$ = | $26' 40'' 213$ |
| *Calcul de l'équ.* (3). | | | | $\varphi$ = | 26.40,426 |
| | $\bar{1}$.32838 | ........................... | | | + 0,213 |
| 24 + s........ | 4.93774 | | | $\delta$ = | $5°28' 40''$ |
| Dénom......— | 3.41985 | | | Dénom. = | 43.49,33 |
| 6'',9.......... | 0.84627 | ........................... | | $x$ = | + 6,9 |
| | | Longitude supposée........ | | = | $14^h$ 5.30,00 |
| | | Longitude vraie demandée.. | | $l$ = | 14. 5.36,9. |

Et en effet, recommençons le calcul avec cette valeur prise pour hypothèse (et cela ne change pas A), ou, ce qui revient au même, diminuons 6,9 de 0'',02, accélération des étoiles fixes, et ajoutons 6'',9 à l'heure $h$ de Paramatta ; il viendra $22^h 45' 49''$ ; puis $A' = 197° 48' 12'',45$ et $A - A' = 26' 40'',43$, qui est précisément le nombre $\varphi$ ; d'où $x = 0$.

Voici le calcul, par cette méthode, des observations citées p. 270, faites à Greenwich et à Port-Bowen, et qui ont donné $t - t' = 15' 8'',64$.

Pour former le nombre $\varphi$ (équ. 1), il faut calculer la seconde partie de cette formule ; on suppose la longit. de Port-Bowen de $l = 5^h 55' 40''$ à l'ouest de Greenwich ; ajoutant ce nombre à $t - t'$, puis corrigeant la somme de l'accélération des fixes, au gré de la note p. 273, on trouve à peu près $6^h 10'$ pour le temps vrai écoulé entre les passages du bord de la Lune aux deux méridiens. Or, on sait que celui de Green-

wich a eu lieu à.......................................$11^h 35'$

l'autre est donc arrivé à..............................$17.45'$.

Retranchant 1′ pour le temps approché que le demi-diam. met à traverser le méridien, on a

$$11^h 34' \quad \text{et } 17^h 44' \text{ t. vrai de Greenwich,}$$

ou $$11^h 43' 20'' \text{ et } 17^h 53' 20'' \text{ t. vr. de Paris.}$$

Avec ces valeurs approchées, on trouve la déclin. et le demi-diam. lunaire pour ces heures respectives, en recourant à la *Conn. des Tems* de 1824, savoir :

$$\text{à } 11^h 43' 20''; \qquad \text{à } 17^h 53' 20'';$$

$$r' = 0°.15.42, \qquad r = 0.15.44,39,$$

$$D' = 23.39.20, \qquad D = 23.53.30.$$

Ainsi les termes de l'équ. (1) qui sont relatifs aux variations du diam. lunaire sont :

$$\tfrac{1}{15}(17' 12'',88 - 17' 8'',41) = \tfrac{4}{60}.4'',47 = 0'',298;$$

telle est la correction à faire à $t - t'$, d'où

$$\varphi = 15' 8'',938.$$

On tire de là, pour le dernier terme de l'équ. (2), ou l'intervalle entre les deux culminations lunaires.......................... $6^h\ 9' 41'' 67$

et comme on a.......................... $h' = 11.34$

l'heure à Greenwich de la culmination à Port-Bowen est.......................... $h = 17.43.41,67$

On ajoute à ces deux nombres la longitude de Greenwich, par rapport à Paris.......... $9.21,8$

On a les heures contemporaines.......... $h' = 11.43.21,8$

Comptées à Paris.......................... $h = 17.53. 3,47$.

Maintenant, en tenant compte des diff. 2es (no 81), on peut calculer avec précision les asc. dr. de la Lune à ces deux instans; on trouve que ces arcs sont

$$\begin{array}{rl} & 69°53' 49'' 21 \\ & 66.\ 6.29,93 \\ \hline \text{Différ.} = & 3.47.19,28 \end{array} \qquad \begin{array}{rl} A - A' = & 15' 9'' 285 \\ \text{D'ailleurs, } \varphi = & 15.8,938 \\ \hline \text{Différ.} = - & 0,347. \end{array}$$

On doit toujours trouver que $\varphi$ est presque égal à $A - A'$; s'il n'en était pas ainsi, cela dénoterait, ou une erreur dans les calculs, ou une supposition fausse pour la valeur de $l$. Dans ce dernier cas, on corrigerait la différ. de l'accélération des fixes, et l'on ajouterait à ce nombre $l$: le tout comme il a été dit ci-dessus.

On a $s = 4' 22'',0 = 262'',0$, $\delta = 7° 24' 42''$; ainsi faisant l'opération prescrite par l'équ. (3), on trouve $x = -8'',44$. Telle est la correction que doit subir la longitude supposée $l$, ce qui la donne réellement de $5^h 55' 31'',56$ à l'ouest de Greenwich.

En effet, corrigez $-8'',44$ de $0'',02$ pour l'accélération des fixes, et ajoutez $-8'',42$ à $h'$, vous aurez $17^h 43' 33'',25$ pour l'heure comptée à Paris, à laquelle il faut calculer $A'$ : on trouve $69° 53' 44'',00$, et la différ. en asc. dr. $3^h 47' 14'',07$, ce qui fait $15^s 8'',938$ de temps, nombre précisément $= \varphi$.

Reprenons l'exemple cité p. 269, du 3 mars 1822, où des observations faites à Manheim et Dorpat ont donné

$$\varphi = t - t' = 3' 0'',74.$$

Nous n'avons pas égard ici aux termes en $r$ et $r'$ de l'équ. (1), qui n'ont pas de grandeur sensible, pour deux stations aussi rapprochées en longitude : on est donc dispensé de calculer D, D', $r$ et $r'$.

| | |
|---|---|
| On suppose Manheim à. ...... | $0^h 24' 31''$ Est de Paris. |
| Dorpat à.......... | 1.37.28 |
| Différ. en longit. $l =$ | 1.12.57 |
| Ainsi, on a $l + \varphi =$ | 1.15.57,74. |

La culmination se fait à Dorpat quand on compte à Paris $h' = 7^h 10^s$. Voici le calcul de l'équ. (2) :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $l + \varphi$.... | 3.6587495 | On a $s = 3' 43'',4$. | |
| $24^h$..... | 4.9365137 | | |
| $24 + s$... — | 4.9376352 | Dorpat.. $h' =$ | 7.10 |
| | 3.6576280 | ................... | 1.15.46 |
| | | Manheim.. $h =$ | 8.25.46. |

Telles sont les heures vraies de Paris auxquelles les deux culminations arrivent. On cherche les asc. dr. de la Lune pour ces instans, à l'aide de la *Conn. des Tems*, et l'on trouve, en ayant égard aux diff. 2es,

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $116^\circ 49' 12''62$ | |
| | | $116.\ 4.\ 4,00$ | |
| | | $45.\ 8,62 \ldots \frac{4}{60} \ldots$ | $A - A' = 3'\ 0''573$ |
| $24 + s \ldots\ldots$ | $4.93764$ | | $\varphi = 3.\ 0,740$ |
| | $\bar{1}.22272 \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$ | | Facteur $= +\ 0,167$ |
| Dénom. ....— | $3.53556$ | | $\delta = 7^\circ\ 9.\ 1$ |
| | $0.62470 \ldots$ | $x = +\ 4''21$ | Dénom. $= 57.12,13$ |
| Diff. supposée des longit.......... | | $1.12.57,00$ | |
| Longitude de Dorpat.......... | | $1.13.\ 1,21$ | à l'est de Manheim. |

*Des Éclipses.*

193. L'observation des éclipses de Lune, de Soleil, d'étoiles ou de satellites offre un moyen précieux d'obtenir les longitudes des lieux : donnons à ces phénomènes toute l'attention qu'ils méritent.

Traitons d'abord des éclipses de Lune et de Soleil, et montrons comment on en peut calculer l'évènement pour une station déterminée. L'éclipse de Lune arrive quand cet astre pénètre dans le cône d'ombre que la Terre projette, ce qui ne peut avoir lieu que vers la pleine Lune, lorsque la latitude de cet astre est fort petite. Les éclipses de Soleil sont produites par l'interposition de la Lune, qui, se plaçant entre le Soleil et nous, nous cache une portion plus ou moins étendue de cet astre; la Lune doit donc être voisine de l'écliptique et dans la néoménie. Ainsi ces deux genres d'éclipses ne peuvent arriver qu'aux syzygies; encore faut-il que la latitude lunaire soit renfermée dans certaines limites qui seront bientôt assignées. La Lune devant être près de son nœud, en même temps qu'elle est pleine ou nouvelle, cette réunion de conditions n'arrive que deux fois l'an, à 5 ou 6 mois d'intervalle; en sorte que si, comme en 1830, les éclipses arrivent en mars, ce n'est que vers le mois de septembre suivant qu'on doit en attendre de semblables; ces époques participent au mouvement rétrograde des nœuds, et varient chaque année.

L'instant physique où une éclipse de Lune est aperçue est le même en tous lieux ; la parallaxe n'y influe en rien, puisque dès qu'une partie du disque de la Lune cesse d'être éclairée par le Soleil, cette partie cesse d'être visible, en quelque endroit que le spectateur soit placé. Mais l'heure comptée à chaque station varie avec les lieux, parce que c'est celle des divers méridiens ; la différence des heures comptées en deux pays à l'instant où l'on y a aperçu l'une des phases d'une éclipse de Lune, est celle des méridiens de ces stations. L'observation de l'heure où quelque tache du disque lunaire disparaît, suffit donc pour donner la différence des longitudes des lieux où le phénomène a été vu ; et même s'il ne l'a été qu'en un endroit, comme on peut calculer l'instant où l'éclipse arrive à Paris, et que d'ailleurs la *Conn. des Tems* fait connaître cette heure, on peut encore trouver la longitude de la station : seulement quand l'observation est double, on n'a d'autre erreur que celle des heures des stations, tandis que, dans le dernier cas, on a encore celle des tables et des calculs ; tout cela doit se dire aussi des éclipses des satellites de Jupiter.

Quant aux éclipses de Soleil, la situation du lieu d'où on les observe influe beaucoup sur l'instant où elles arrivent, et la parallaxe en fait considérablement varier les circonstances : aussi le calcul en est-il beaucoup plus difficile ; c'est ce que nous ferons voir avec détail : il en faut dire autant des *occultations* d'étoiles par la Lune.

194. Avant d'entreprendre le calcul propre à faire connaître l'instant d'une éclipse, il convient de s'assurer si, lors d'une syzygie, cette éclipse est possible : car si ce phénomène ne devait pas arriver, il serait fort inutile de faire les frais d'une opération qui ne conduirait qu'à montrer qu'il n'y a pas d'éclipse. Nous allons d'abord expliquer comment on s'en assure.

Soit S le Soleil (fig. 24), T la Terre, L la Lune près de l'opposition, ou L′, cet astre près de la conjonction ; CAB est le cône d'ombre projetée par notre globe, et l'éclipse de Lune arrivera quand la Lune L entrera dans ce cône. De même, pour qu'une éclipse de Soleil arrive, il faut que la Lune L′

pénètre dans le cône lumineux qui s'étend du Soleil à la Terre, formé par une suite de tangentes à ces deux sphéroïdes.

Soient R et $r$ les demi-diamètres apparens de la Lune et du Soleil, H et $p$ leurs parallaxes horizontales, ou les angles sous lesquels, de ces deux astres, on verrait le rayon terrestre; $m$ et $n$ les mouvemens horaires de la Lune en longitude et en latitude, $\lambda$ la latitude lunaire à l'opposition ou à la conjonction, $\lambda'$ cette latitude au minuit ou midi qui précède; $x$ le temps écoulé entre ces deux instans, on a, à fort peu près,

$$\lambda = \lambda' + nx: \qquad (1)$$

on corrige d'ailleurs ce résultat par les différ. 2[es] (n° 81). $\lambda$ et $\lambda'$ sont négatifs pour les latitudes australes; $n$ l'est quand la Lune s'éloigne du pôle boréal. Enfin, soit M le mouvement horaire du Soleil. Toutes ces quantités se tirent de la *Conn. des Tems:* on connaît donc le mouvement horaire relatif en longitude $m - \text{M}$. (*V.* n[os] 17, 51 et 81.)

Les triangles SDT, SBT, STN, sont rectangles, puisque CD, SB sont des tangentes. On en tire

$$\text{SD} = \text{ST} \sin r, \qquad \text{T}i = \text{ST} \sin p,$$

$$\text{SN} = \text{ST} \sin \text{STN}, \text{ ou SD} - \text{TA} = \text{ST} \sin \text{TCA},$$

$$\text{d'où} \quad \sin \text{TCA} = \sin r - \sin p, \qquad \text{TCA} = r - p,$$

parce que ces angles sont très petits. Ainsi le demi-angle TCA au sommet du cône d'ombre est connu.

Désignons par A l'angle LTI sous lequel nous voyons le rayon IL du cône obscur à l'endroit où la Lune traverse l'ombre. On a TLA = la parallaxe lunaire H, ou l'angle sous lequel le rayon terrestre TA est vu de la Lune. Cet angle TLA est extérieur au triangle TLC, d'où

$$\text{TLA} = \text{TCA} + \text{LTI}, \quad \text{H} = r - p + \text{A},$$

$$\text{et} \qquad \text{A} = \text{H} + p - r. \qquad (2)$$

D'un autre côté, près de la conjonction, désignons par A'

le rayon du cône lumineux, à l'endroit où la Lune y passe, ce rayon, vu de la Terre : nous avons

$$STL' = STD + DTL', \quad A' = r + DTL'.$$

Or, l'angle TL'A, ou la parallaxe lunaire H, est extérieur au triangle DTL', d'où $H = p + DTL'$; donc

$$A' = r + H - p. \qquad (2)'$$

D'après cela, ajoutons le demi-diamètre apparent R de la Lune à A et A', nous aurons

$$A + R = H + p + R - r \quad \text{à l'opposition},$$
$$A' + R = H - p + R + r \quad \text{à la conjonction}.$$

Si cette quantité est précisément égale à la distance angulaire du centre de la Lune à l'axe CS du cône, la Lune affleure ce cône sans y être entrée, et selon que cette quantité sera plus grande ou moindre que la distance angulaire dont nous parlons, l'éclipse aura ou n'aura pas lieu. De là, on tire les limites de la latitude lunaire $\lambda$ dans les éclipses, en comparant $A + R$ aux plus grandes et aux moindres valeurs des variables P, $p$, R et $r$. (*V.* p. 58 et 66.)

Ainsi, pour l'*éclipse de Lune* (opposition, ou pleine Lune),

*maximum* $H = 61' 24''$, $R = 16' 45''$, $p = 9''$, $r = 15' 45''$;
*minimum* $H = 53.48$, $R = 14.41$, $p = 9''$, $r = 16.18$.

Dans le 1^er cas, la distance $A + R$ du centre de la Lune à l'axe du cône est de 63'; dans le 2^e, elle est 52'. Lors donc que la latitude $\lambda$ de la Lune vers l'opposition est $> 63'$, il ne peut y avoir éclipse de Lune; mais l'éclipse a certainement lieu quand $\lambda < 52'$ : entre ces limites, on reste indécis de savoir si le phénomène se produira.

Pour l'*éclipse de Soleil* (conjonction, ou nouvelle Lune),

*maximum* $H = 61' 24''$, $R = 16' 45''$, $p = 9''$, $r = 16' 18''$,
*minimum* $H = 53.48$, $R = 14.41$, $p = 9$, $r = 15.45$.

$A' + R$ est donc égal, d'une part, à $1^\circ 34' 18''$, et de l'autre, à $1^\circ 24'$ : c'est-à-dire que l'éclipse de Soleil est impossible quand la latitude lunaire $\lambda$ passe $1^\circ 34' 18''$, mais que l'éclipse est certaine lorsque $\lambda < 1^\circ 24'$, et qu'on reste dans le doute entre ces limites.

Ces limites évitent presque toujours les embarras du calcul, puisque ce n'est que lorsque $\lambda$ tombe entre $52'$ et $63'$ dans le 1er cas, et entre $1^\circ 24'$ et $1^\circ 34' 18''$ qu'on peut craindre de s'y livrer inutilement.

195. Voyons maintenant à calculer les heures des phases d'une *éclipse de Lune,* pour le méridien de Paris.

Nous avons trouvé que le rayon A du disque d'ombre que la Lune traverse, rayon vu de la Terre, est $= H + p - r$. On est dans l'usage d'augmenter $p$ de son soixantième, à cause de la réfraction qui tend à accroître l'angle $p$, pour le spectateur qui, placé dans la Lune, observerait la Terre. Cette correction, indiquée par Mayer, est justifiée par l'expérience. Ainsi nous ferons

$$A = \tfrac{61}{60} H + p - r. \qquad (3)$$

Soit NG (fig. 23) l'écliptique, A le centre du Soleil, lorsque celui de la Lune est, à l'opposition, en $a$ sur son orbite $Nag$ ; N le nœud ascendant, $Aa$ la latitude $\lambda$ de la Lune à cet instant. Une heure plus tard, le Soleil sera passé en $A'$, et la Lune en $g$ ; la distance des deux centres sera devenue $gA'$. Le mouvement horaire $n$ de la Lune en latitude est $gh$. Menons $gd$ égale et parallèle à $AA'$, mouvement M du Soleil en une heure. Il est clair qu'on est en droit de supposer que le Soleil est demeuré immobile en A, pourvu qu'on attribue à la Lune la position $d$. En effet, les phases de l'éclipse seront les mêmes, soit que le Soleil passe de A en $A'$, quand la Lune va de $a$ en $g$, pendant une heure; soit en admettant que le Soleil est resté fixé en A, la Lune passant de $a$ en $d$ ; car dans l'une ou l'autre de ces circonstances, les deux centres se trouvent dans les mêmes conditions de distance, ce qui est la cause essentielle des phases.

Il est donc permis de substituer à l'orbite vraie $Nag$ de la

Lune, la ligne F*ad*, qu'on appelle l'*orbite relative;* car tous les points de cette droite F*ad*, ainsi déterminée, satisfont aux conditions imposées aux points *g* et A', attendu que les mouvemens horaires des deux astres sont uniformes dans la petite durée qu'on considère. Cette orbite relative *ad* est déterminée par les conditions de passer par le point *a*, vrai lieu de la Lune à l'opposition; d'avoir pour mouvement horaire en longitude $ai = ah - hi$, ou le mouvement relatif, différ. des deux vitesses, et enfin d'avoir $di = gh =$ mouvement horaire vrai $n$ en latitude.

Soit donc $\theta$ l'angle F, inclinaison de l'orbite relative sur l'écliptique, on a $\text{tang}\,\theta = \frac{di}{ai}$, $ai = m - M =$ mouvement horaire relatif en longitude, enfin $di = n$; d'où

$$\text{tang}\,\theta = \frac{n}{m - M}. \qquad (4)$$

La perpendiculaire A$m$ sur l'écliptique FD détermine le lieu $m$ du centre, à l'instant du milieu de l'éclipse : le triangle A$ma$, rectangle en $m$, donne

$$am = Aa \sin\theta = \lambda \sin\theta, \quad Am = \lambda \cos\theta.$$

Le temps T employé à décrire $am$ est donné par cette proportion ; si $ad$ est décrit en 1 heure, $am$ le sera en T heures, ou

$$\frac{m - M}{\cos\theta} : 1^h :: \lambda \sin\theta : T,$$

$$T = -\frac{\lambda \sin\theta \cos\theta}{m - M}; \qquad (5)$$

c'est le nombre d'heures à écouler depuis l'opposition jusqu'au milieu de l'éclipse. On a mis le signe —, parce que, dans l'état de choses représenté par la figure 23, on suppose que le milieu arrive avant l'opposition. Le contraire a lieu lorsque $n$, et par conséquent $\theta$, est négatif; ou bien quand la latitude $\lambda$ est australe avec $n$ positif. Au reste, le jeu des signes de $\lambda$, $\theta$ et $n$, suffit pour tenir compte de toutes les circonstances.

Que la droite DC (fig. 29) représente l'écliptique, où le Soleil est à son centre fixé en A, à l'instant de l'opposition. A l'aide d'une échelle de parties égales désignant des minutes ou des secondes, selon l'étendue de la figure, on portera AD $= m - M$, differ. des mouvemens horaires en longitude; les perpendiculaires A$a = \lambda$ latitude de la Lune à l'opposition, D$d$, B$b$, latitudes une heure après et avant cet instant; *bad* sera l'orbite relative. Si les latitudes sont australes, on les portera au-dessous de BD; la ligne *bad* sera inclinée sur BD vers la droite ou vers la gauche, selon que la latitude va en croissant ou en diminuant.

D'un rayon AF $=$ A (équ. 2), on décrira le cercle FOL, qui représente le disque d'ombre que la Lune doit traverser en passant de *b* en *d*. La perpendiculaire A$m$ sur *bd* donne le lieu *m* de la Lune au milieu de l'éclipse; M$m$, perpendiculaire, sur BD, marque le point M qui détermine l'heure AM de cet instant. On ajoutera à AF, et l'on en retranchera le demi-diamètre lunaire; et avec ces longueurs on tracera du centre A des arcs qui marqueront en $c, f$ les lieux du centre de la Lune à l'instant des contacts extérieurs, ou de l'entrée dans l'ombre, et en $c', f'$ les lieux des contacts intérieurs où l'éclipse devient totale. Les perpendiculaires $c$C, $f$F, $c'$C', $f'$F', donneront les distances horaires AC, AF, à l'instant de l'immersion et de l'émersion, et AC', AF', lors de la disparition complète et de la réapparition de l'astre; MC, MD, seront les demi-durées de l'éclipse, C'M, MF' seront celles de l'éclipse totale. Enfin si le rayon du cône d'ombre est tel que A$o$, il n'y aura aucun moment où la Lune disparaisse entièrement; l'éclipse sera partielle; et le cercle décrit du centre *m* avec un rayon égal à celui de la Lune montrera la plus grande quantité de l'éclipse.

Cette construction est si simple et si facile, qu'il sera toujours utile de la faire, ne fût-ce que pour avoir une première approximation des phénomènes, et se préparer à l'observation; mais pour en calculer les phases avec exactitude, on fera usage des formules suivantes.

L'angle $a$A$m = \theta$ est connu par l'équ. (4); faisons A$c = k$,

ce sera l'hypoténuse d'un triangle rectangle $Acm$, dont le côté $mc = \sqrt{(Ac^2 - Am^2)}$, ou $mc = \sqrt{(k^2 - \lambda^2 \cos^2 \theta)}$. Nous supposons ici que le centre du Soleil est immobile en A, que la Lune n'a en longitude que la différ. des vitesses, et que les lignes AC, $ac$ font ensemble l'angle $\theta$.

Le temps nécessaire pour décrire $mc$ étant désigné par $t$, est trouvé par la proportion :

Si $\frac{m - M}{\cos \theta}$ est décrit en $1^h$, $mc$ le sera dans le temps $t$. Ainsi, $t = \frac{mc.\cos \theta}{m - M}$. On en tire, en multipliant par 3600″ pour convertir $t$ en secondes,

$$t = \pm \frac{3600'' \cos \theta}{m - M} \sqrt{(k + \lambda \cos \theta)(k - \lambda \cos \theta)}. \quad (6)$$

Ce temps $t$ est compté à partir du milieu de l'éclipse, tant avant qu'après, ce qu'indique le signe $\pm$; cet instant du milieu est d'ailleurs connu par la valeur de T.

Pour la commodité du calcul logarithmique, on posera

$$\sin \varphi = \frac{\lambda \cos \theta}{k}, \quad (7)$$

d'où
$$t = \pm \frac{3600 . k \cos \theta \cos \varphi}{m - M}. \quad (8)$$

On fera, dans ces équ., $k = A + R$ pour avoir l'heure où la Lune touche extérieurement le cône d'ombre, ou le *commencement et la fin de l'éclipse*: s'il doit y avoir *éclipse totale*, l'immersion et l'émersion complètes seront données en faisant $k = A - R$. La formule (3) donne A ; les équ. (4) et (7) donnent les arcs auxiliaires $\theta$ et $\varphi$, qui introduits dans (8), font connaître $t$.

196. Ainsi, après avoir trouvé l'instant approché de l'opposition, on le corrige par la théorie de la p. 107. On obtient, pour ce moment, à l'aide de la *Conn. des Tems*, ou mieux encore par les *Tables astronomiques*, les lieux du Soleil et de la Lune, savoir les constantes M, $m$, $n$, $\lambda$, H, $p$, R et $r$ : on en

tire $\theta$, $\lambda \cos \theta$ et A; puis on reconnaîtra si

$$A + R > \lambda \cos \theta,$$

condition sans laquelle *il n'y aurait pas d'éclipse*, et le radical serait imaginaire pour toutes les valeurs que prend $k$.

L'équ. (5) donnera ensuite T, et *le milieu de l'éclipse*. S'il se trouve que

$$A - R > \lambda \cos \theta = k \sin \varphi,$$

il y aura *éclipse totale*. On fera $k = A + R$ dans l'éq. (6), ou dans (7) et (8), et l'on aura *le commencement, la fin de l'éclipse et sa durée* $2t$: et si elle peut être totale, on fera en outre $k = A - R$ pour avoir *les instans de l'immersion et de l'émersion totales*, et par suite la durée de la disparition entière de l'astre, savoir le double de la valeur (8).

La plus grande quantité éclipsée, dans le cas où l'éclipse n'est que *partielle*, est

$$E = A + R - \lambda \cos \theta,$$

ou

$$E = \frac{6}{R}(A + R - \lambda \cos \theta),$$

en l'exprimant en doigts, ou douzièmes de diamètre 2R.

Si l'on demande l'instant où la phase de l'éclipse est de $g$ doigts, il faut faire dans l'équ. (8)

$$k = A + R\left(1 - \tfrac{1}{6}g\right).$$

Cette formule sert à trouver le moment où l'une des taches du disque cesse d'être visible, ou reparaît.

Comme les élémens de ces calculs sont tirés de la *Conn. des Tems*, ou des *Éphémérides* construites pour le méridien de Paris, les heures qu'on trouve sont celles de temps vrai en cette ville. Les heures de mêmes phases en un autre lieu s'en déduisent, en ayant égard à la différ. des longitudes, parce qu'elles sont vues au même instant physique, mais estimées en temps des méridiens respectifs.

On remarquera que le mouvement horaire varie sans cesse, et qu'il n'est par conséquent pas tel qu'on l'a supposé; en sorte

que la ligne *cad* (fig. 29) est une courbe. Mais rien n'empêche dans le calcul de prendre le mouvement horaire pour l'heure qui précède la conjonction, lorsqu'on cherche l'immersion, et pour celle qui suit, quand il s'agit de l'émersion (p. 101). Mais on verra bientôt qu'il est inutile de porter ce degré de précision dans les calculs.

Appliquons nos formules à l'éclipse de Lune du 2 septembre 1830. On a donné, p. 109, les détails numériques qui se rapportent à l'opposition, qu'on a trouvé avoir lieu à 10h 46′ 53″, t. vr. à Paris. On obtiendra, pour les constantes du calcul les valeurs suivantes :

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $m$ = | 36′ 11″6 | λ = | 2′ 13″2 | H = | 59′ 51″41 | R = | 16′ 18″66 |
| M = | 2.25,3 | $n$ = | 3.27,0 | $p$ = | 8,70 | $r$ = | 15.53,30 |
| $m$ − M = | 33.46,3 | 3600 ..... | 3.55630 | | | | |
| | | λ ........ | 2.12450 | H = | 59′ 51 41 | | |
| | | cos θ ...... | 9.99775 | 60° = | 59,86 | | |
| $n$ ...... | 2.31597 | sin θ ...... | 9.00704 | $p$ = | 8,70 | | |
| $m$ − M − | 3.30670 ............ | | − 3.30670 | − $r$ = | −15. 53,30 | | |
| tang θ .. | 9.00927 | T ........ | 1.37889 | A = | 45. 6,67 | | |
| | | T = + | 23″9 | R = | 16. 18,66 | | |
| *Opposition à* ........ | | | 10h 46′ 53,1 | $k$ = | 61. 25,33 | | |
| *Milieu à* ........ | | | 10.47.17,0 | $k'$ = | 28. 48,01 | | |
| λ cos θ .. | 2.12225 ............ | | 2.12225 | λ cos θ = | 132,51 | | |
| $k$ ...... | − 3.56648 | $k'$ ........ | − 3.23755 | = | 2. 12,51 | | |
| sin φ .... | 8.55577 | sin φ′ .... | 8.88470 | A − R > λ cos θ. | | | |
| φ = | 2° 3′ 38″ | φ′ = | 4° 23′ 53″ | *Il y a éclipse totale.* | | | |
| 3600 ..... | 3.55630 ............ | | 3.55630 | | | | |
| cos φ ... | 9.99972 | cos φ′ ..... | 9.99872 | cos θ ...... | 9.99775 | | |
| $k$ ....... | 3.56648 | $k'$ ........ | 3.23755 | $m$ − M .. | − 3.30670 | | |
| | $\bar{4}$.69105 ............ | | $\bar{4}$.69105 | cos θ : $m$ − M . | $\bar{4}$.69105 | | |
| $t$ ...... | 3.81355 | $t'$ ........ | 3.48362 | | | | |
| $t$ = | 1h 48′ 29″6 | $t'$ = | 0h 50′ 45″2 | | | | |
| Milieu ..... | 10.47.17,0 ............ | | 10.47.17,0 | | | | |
| Commen. .. | 8.58.47,4 | | 9.56.31,8 | *immersion totale.* | | | |
| Fin ........ | 12.35.46,6 | | 11.38. 2,2 | *émersion.* | | | |

Ces résultats s'accordent à peu près avec ceux qu'on trouve dans la *Conn. des Tems* de 1830. Les différences proviennent

vraisemblablement de celles des constantes employées dans le calcul. Au reste, on attache peu d'importance à la précision dans ces sortes de prédictions, parce que la *pénombre* qui borde la partie éclairée de l'astre en rend l'observation incertaine; aussi, les éclipses de Lune ne donnent-elles qu'un procédé douteux pour déterminer les longitudes.

D'après ce qu'on a dit p. 281, rien n'est plus aisé que d'appliquer le calcul à ces déterminations. On note les heures d'observations en deux lieux d'où le phénomène a été aperçu, et la differ. des heures sidérales est celle des longitudes. On peut tirer d'une même éclipse diverses valeurs de cette différence, en observant l'instant de la disparition des taches de la Lune, et l'on prend ensuite la moyenne entre tous les résultats; mais on doit regarder ces nombres comme plus ou moins douteux.

197. Venons-en maintenant aux prédictions d'*éclipses de Soleil*. Ces phénomènes étant susceptibles d'être observés avec une grande précision, sont d'une haute importance pour obtenir les longitudes terrestres et corriger les erreurs des tables astronomiques. C'est ce que nous ferons voir avec détail.

Avant tout, on cherche la latitude lunaire à la conjonction, et l'on s'assure si elle tombe dans les limites où l'éclipse est possible; car si la Lune n'entre pas dans le cône lumineux qui s'étend de la Terre au Soleil, tout calcul est inutile.

On peut même traiter la question de l'*éclipse générale*, ou, si l'on veut, de l'*éclipse de Terre* par la Lune, à l'aide des formules (4), (5) et (6), en prenant pour A la valeur (2') de A'. On a ainsi les limites de la durée où l'éclipse de Soleil peut être vue de quelques lieux de la Terre. Ce travail préliminaire éclaire beaucoup la question.

Il faut d'abord avoir des approximations pour les diverses phases de l'éclipse, on se sert pour cela de la période chaldaïque appelée *Saros*, qui ramène les éclipses après 18 ans de $365^j$, plus $15^j\ 7^h\ 42'\ 28''{,}56$, durée qui accomplit 223 lunaisons, après lesquelles la Lune est revenue à la même distance moyenne du Soleil, du ☊ et du périgée. (*V.* la *Conn. des Tems* de 1812, p. 293, et l'*Uranographie*, p. 402.)

On emploie aussi les constructions graphiques pour avoir les premières notions sur le phénomène. La droite CD (fig. 29) étant l'écliptique, A le lieu du centre du Soleil qu'on suppose immobile, en attribuant à la Lune la vitesse relative en longitude. On prend, de part et d'autre de A, les parties AC, AC', AF, AD, ..., égales aux differ. de longitudes de la Lune au Soleil, à divers instans, par exemple, de demi-heure en demi-heure, et l'on mène les perpendiculaires Cc, C'c', Ff, Dd, ..., égales aux latitudes correspondantes. La ligne *cf fd* est l'orbite relative de la Lune : cette ligne est sensiblement droite.

D'un rayon *Af* ou *Af'* égal à la somme ou la differ. des demi-diamètres du Soleil et de la Lune, on marque les points *f*, *f'*, *c*, *c'*. Ce sont les lieux qu'occupe le centre de la Lune au commencement et à la fin de l'éclipse, et lors des contacts intérieurs qui produisent l'éclipse totale ou annulaire. AO est un cercle qui a pour rayon celui du Soleil.

Les données de ces constructions sont les valeurs apparentes pour le lieu proposé d'où l'éclipse doit être vue. Tout cela est conforme à ce qui a été dit précédemment, excepté que la parallaxe jouant ici un rôle important, il est indispensable d'en calculer les effets sur la longitude et la latitude, ainsi qu'on va bientôt l'expliquer. On trouve par cette construction, lorsqu'elle est exécutée avec soin et sur des dimensions assez étendues, à une minute près, les instans des contacts tant intérieurs qu'extérieurs, la quantité et la durée de l'éclipse, etc. Ce procédé est très commode pour ébaucher le calcul, ou se préparer à l'observation. Au reste, ce qu'on exposera p. 301 rend ces préparatifs inutiles.

Voyons maintenant à faire avec précision le calcul de la distance apparente des centres du Soleil et de la Lune, à un instant quelconque donné.

198. On détermine les longitudes L et ⊙ de la Lune et du Soleil (p. 34 et 99); les parallaxes horizontales équatoriales H et *p*; les demi-diamètres vus du centre de la Terre R et *r* (p. 58 et 66). On sait que pour la Lune, on a

$$(1) \ldots \quad R = 0,2725 \times H, \quad \log. 0,2725 = \bar{1}.4353665.$$

Cela fait, pour avoir égard à l'aplatissement du globe terrestre, on calculera la *latitude géocentrique* $l'$ du lieu d'observation, ainsi que la parallaxe horizontale H' en ce lieu, par les équ. (p. 112 et 122)

(2) $\tang l' = (1-\mu)^2 \tang l, \quad \log(1-\mu)^2 = \bar{1}.9971475,$
$H' = H - H\mu \sin^2 l', \quad \log \mu = \bar{3}.5157002.$

$l$ désigne ici la latitude astronomique de la station, et H la parallaxe horizontale équatoriale de la Lune.

Il faut ensuite passer à la recherche de la position du *Nonagésime* (n° 96), savoir sa longitude N et sa hauteur $h$, par les formules (D, p. 132)

(3).
$$\tang \phi = \sin s \cot l',$$
$$\cos h = \frac{\sin l' \cos(\omega + \phi)}{\cos \phi},$$
$$\sin N = \cot h . \tang(\omega + \phi),$$
$$\tang N = \frac{\tang s . \sin(\omega + \phi)}{\sin \phi},$$
$$\cot h = \sin N . \cot(\omega + \phi).$$

$\phi$ est un arc auxiliaire que détermine la 1^re^ équ., et dont on introduit la valeur, *avec son signe*, dans les suivantes. (*V.* p. 132, ce qui a été dit sur les cas où N est > 90°, 180°, etc.) On désigne ici par $s$ l'heure sidérale pour laquelle on veut trouver le lieu du nonagésime; cette heure est exprimée en degrés: on la tire de l'heure vraie ou moyenne proposée. Enfin, $\omega$ est l'obliquité apparente de l'écliptique.

On cherche ensuite la longitude apparente L' de la Lune, $L' = L + \varpi$, $\varpi$ étant la parallaxe, puis sa latitude apparente $\lambda'$, et son demi-diamètre apparent R'. On a ces équ. (F, p. 134)

(4)
$$\epsilon = \frac{0,5 . H' \sin h \cos(L - N)}{\cos \lambda},$$
$$\varpi = \frac{0,5}{\cos\lambda . \sin^2(45° - \epsilon)},$$

$$\xi = H' \cos h,$$
$$\varpi = H' \sigma \sin h \sin (L - N),$$
$$\lambda' = \sigma (\lambda - \xi) \cos \tfrac{1}{2} (\lambda + \xi) \cos \varpi,$$
$$R' = \sigma R \cos \lambda' \cos \varpi.$$

L désigne la longitude vraie de la Lune, $\lambda$ sa latitude, à l'heure sidérale $s$ pour laquelle on a calculé N et $h$; R est le demi-diamètre horizontal vrai, H' la parallaxe horizontale pour le lieu proposé, $\iota$, $\xi$, $\sigma$, des arcs auxiliaires. Ces données se tirent de la *Conn. des Tems*, ou mieux encore des *Tables astronomiques*. On obtient donc, par ces formules, la parallaxe $\varpi$ de longitude, la longitude apparente $L' = L + \varpi$, la latitude $\lambda'$ et le demi-diamètre R' apparent, pour l'heure sidérale $s$ employée dans les opérations.

On sait que le demi-diamètre horizontal du Soleil ne change pas avec la hauteur, mais il n'en est pas de même de celui de la Lune (p. 61); notre calcul détermine ce demi-diam. tel qu'on le voit, et sans connaître la hauteur de l'astre.

199. Remarquons que dans les éclipses de Soleil les longitudes des deux astres diffèrent peu l'une de l'autre; les parallaxes seraient donc égales, si leurs parallaxes horizontales l'étaient aussi. Or, il suit de la valeur de $\varpi$ que les parallaxes de longitude sont proportionnelles à celles-ci, et comme celle du Soleil n'est, au plus, que de 8",8, il est clair que si l'on remplace la parallaxe horizontale H' de la Lune, par la différence $H' - p$ des parallaxes des deux astres, la valeur qu'on obtiendra pour $\varpi$ ne différera pas sensiblement de la différ. des parallaxes de longitude. On évitera donc de calculer celle du Soleil, en prenant $H' - p$ au lieu de H', dans tous les calculs de lieux apparens.

200. Voyons maintenant à *calculer, pour Paris, les phases d'une éclipse de Soleil.*

On calcule aisément la distance apparente $\Delta$ des deux centres à un instant donné. Nous allons enseigner à trouver cette quantité. On cherchera pour cet instant :

1°. L'heure sidérale $s$ qui y répond (n° 109) et on la convertira en degrés.

2°. Les longitudes vraies ⊙ et L du Soleil et de la Lune, leurs mouvemens horaires M et $m$, leurs parallaxes horizontales Π et $p$, leurs demi-diamètres R et $r$ (équ. 1), la latitude géocentrique $l'$ du lieu (elle est $l' = 48°38'27'',6$). Les *Tables astronomiques* fournissent ces divers élémens de calcul.

3°. Les équ. (2) donneront la parallaxe horizontale lunaire H' pour le lieu (Paris), et on la remplacera par $H' - p$ pour avoir égard à celle du Soleil.

4°. Les équ. (3) donneront la longitude N du nonagésime et sa hauteur $h$; par suite, la parallaxe lunaire $\varpi$ en longitude, la longitude apparente L', la latitude apparente $\lambda'$, et le demi-diam. app. R', pour l'heure sidérale proposée $s$.

Cela fait, soit P (fig. 25) le pôle de l'écliptique, AB un arc de ce cercle, A le centre apparent du Soleil, C celui de la Lune, $BC = \lambda'$ est la latitude apparente lunaire, $AB = \alpha$ la différ. des longitudes apparentes des deux astres, enfin, $AC = \Delta$ la distance apparente de leurs centres. A l'instant où la Lune nous paraît toucher extérieurement le cône lumineux, cette distance $\Delta$ est la somme des deux diamètres apparens $r$ et R'; c'est le commencement de l'éclipse avant la conjonction, c'est la fin après.

Lorsque le contact apparent est intérieur au cône, ce qui n'arrive que dans les éclipses totales ou annulaires de Soleil, $\Delta$ est la différ. des deux demi-diamètres $r$ et R'. Dans toute autre situation, $\Delta$ est $>$ ou $<$ que la somme ou que la différence dont il s'agit, et l'excès est la phase de l'éclipse. La plus grande phase répond au milieu de la durée. On voit donc qu'il s'agit de trouver cette distance $\Delta$ à tout instant, pour reconnaître si l'éclipse est commencée ou finie, ou quelle en est la phase.

Comme le triangle rectangle ABC est fort petit, dans le cas que nous considérons, il est permis de le considérer comme rectiligne. On a donc

$$\Delta^2 = \lambda'^2 + \alpha^2. \qquad (5)$$

$\lambda'$ et $\alpha$ sont connus pour l'heure sidérale $s$; ainsi, on comparera $\Delta$ à $r \pm R'$, afin de voir s'il y a ou non égalité, c'est-à-dire si l'heure $s$ répond ou non à l'un des contacts.

On rend cette équ. propre au calcul des logarithmes, en cherchant un arc auxiliaire $\theta$, tel qu'on ait

$$\tang \theta = \frac{\lambda'}{\alpha}, \quad \text{d'où} \quad \Delta = \frac{\alpha}{\cos \theta}. \qquad (6)$$

L'accroissement du diamètre lunaire R due à sa hauteur sur l'horizon a été comprise dans le calcul qui a donné R'; le Soleil, quelle qu'en soit l'élévation, n'éprouve aucun effet de ce genre. La réfraction produisant à fort peu près la même élévation sur les deux astres, n'a ici aucune influence; mais l'expérience a appris que pour accorder les observations avec la théorie, on doit diminuer de 3",5 le demi-diamètre du Soleil tel que le donnent les tables : cet effet est attribué à l'*irradiation*. De même, on doit diminuer de 2" celui de la Lune, à cause de l'*inflexion* de la lumière vers le bord de cet astre.

Ainsi, dans les *contacts extérieurs*, les demi-diamètres $r - 3'',5$ et $R' - 2''$, ont pour somme

$$\psi = r + R' - 5'',5, \qquad (7)$$

quantité qui doit être égale à la distance $\Delta$ des deux centres. Et dans les *contacts intérieurs*, la formation et la rupture de l'anneau exigent que $\Delta$ soit la différence

$$\psi = r - R' - 1'',5. \qquad (8)$$

Nous ajouterons cependant que les astronomes ne sont d'accord ni sur le fait, ni sur la quantité de la diminution dont on vient de parler. Ce sujet attend de nouveaux éclaircissemens. (*V.* le *Mouv. app. des corps célestes* de Dionis du Séjour, t. I, p. 394, et le *Traité d'Astronomie* de Delambre, t. II, p. 423.)

Les questions d'éclipses de Soleil se réduisent donc à calculer d'une part : 1°. la valeur de $\Delta$ à une heure sidérale $s$ donnée; 2°. celle $\psi$, et à voir si $\Delta =, >$ ou $< \psi$, pour juger si l'éclipse est commencée ou finie, et quelle en est la phase $\psi - \Delta$.

Prenons pour exemple la belle éclipse de Soleil du 7 sep-

tembre 1820, et cherchons les positions relatives de cet astre et de la Lune, pour Paris; à $3^h\,35'$ temps vrai, qui revient à $3^h\,32'\,47'',7$ de temps moyen, ou $14^h\,39'\,14'',3$ de temps sid.; on prend $s = 219^\circ\,48'\,34'',5$. Les données suivantes sont tirées, non de la *Conn. des Tems*, mais des *Tables astronomiques*, parce que ces tables les font connaître avec plus de précision.

| | | |
|---|---|---|
| ☉ = $5^s\,14^\circ\,51'\,35''2$ | $r = 15'\,54''81$ | $p = 8''7$ |
| ☾ = 5.15.33.51,6 | R = 14.40,99 | H = 53′ 53,0 |
| $\lambda = +$ 0.40.24,6 | $l' = 48^\circ\,38'\,27'',6$. | |

*Parall. horiz.* H′ *du lieu* (équ. 2).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| H | 3.50961 | | 53′ 53″0 | | |
| $\mu$ | $\bar{3}$.51570 | | − 5,97 | H | 3.5096057 |
| sin² $l'$ | 9.75080 | $p =$ | − 8,7 | const. | $\bar{1}$.4353665 |
| 5″,97 | 0.77611 | H′ = | 53.38,33 | R | 2.9449722 |

*Nonagésime* (équ. 3, n° 198).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | cos $(\omega + \varphi)$ | 9.9976608 | tang | 9.0173300 |
| sin $s$ | 9.8063416 − | sin $l'$ | 9.8753993 | cot $h$ | 0.2208482 |
| cot $l'$ | 9.9446542 | cos $\varphi$ | − 9.9400949 | | |
| tang $\varphi$ | 9.7509958 − | cos $h$ | 9.9329652 | sin N | $\bar{9}$.2381682 |
| $\varphi =$ | − 29° 24′ 25″2 | $h =$ | 31° 1′ 19″,3 | N = | 189° 57′ 56″7 |
| $\omega =$ | 23.27.56,0 | | | L = | 165.33.51,6 |
| $\varphi + \omega =$ | − 5.56.29,2 | | | L − N = | − 24.24. 5,1 |

*Parallaxes* (équ. 4).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | $\sigma$ | 0.00322 |
| H′ | 3.50763 | | | | 3.50763 |
| sin $h$ | 9.71212 | | | | 9.71212 |
| cos (L − N) | 9.95936 | sin² | − 9.6957778 | sin L − N | 9.61608 − |
| 0,5 | $\bar{1}$.6989700 | | + $\bar{1}$.6989998 | $\varpi$ | 2.83905 − |
| cos $\lambda$ | − 9.9999702 | | | $\varpi =$ | − 11′ 30″3 |
| $\iota$ | 2.87811 | $\sigma$ | 0.0032220 | L = | 165.33.51,6 |
| $\iota =$ | 12′ 35″3 | H′ | 3.5076306 | L′ = | 165.22.21,3 |
| 45° − $\iota$ = | 44.47.24,7 | cos $h$ | 9.9329652 | ☉ = | 164.51.35,2 |
| $\xi =$ | 45′ 58″6 | $\xi$ | 3.4405958 | $a =$ | 30.46,1 |
| $\lambda =$ | 40.24,6 | $\sigma$ | 0.0032220 | | 0.00322 |
| $\lambda - \xi =$ | − 5.33,4 | | 2.5229656 − | cos $\lambda'$ | 0.00000 |
| $\lambda + \xi =$ | 86.22,6 | cos $\varpi$ | 9.9999976 | cos $\varpi$ | 0.00000 |
| Moitié = | 43.11,3 | cos. | 9.9999658 | R | 2.94497 |
| $\lambda' =$ | − 6.35,9 | $\lambda'$ | 2.5261510 − | R′ | 2.94819 |
| Correct. = | − 5,50 | $a$ | − 3.2662552 | R′ = | 14′ 47″55 |
| $r =$ | 15′ 54″81 | tang $\theta$ | 9.2598958 | $a$ | 3.2662552 |
| R′ = | 14.47,55 | $\theta =$ | 10° 18′ 39″4 | cos $\theta$ | − 9.9929[illegible] |
| $\psi =$ | 30.36,86 | $\Delta =$ | 31.16,40 | $\Delta$ | 3.2733[illegible] |

$\Delta > \psi$, et la distance des centres surpasse la somme des demi-diamètres de 40″ ; d'ailleurs, $L' > \odot$. Ainsi, l'éclipse est terminée depuis peu d'instans. On aurait eu l'heure précise de la fin du phénomène, s'il était arrivé qu'on eût trouvé juste $\Delta = \psi$; et l'éclipse durerait encore et aurait la phase $\psi - \Delta$, si l'on eût obtenu $\Delta < \psi$.

201. On peut maintenant concevoir comment on trouve l'heure d'un des contacts d'une éclipse de Soleil. Pour celle de la conjonction et une heure avant et après, on calcule le temps moyen et le temps sidéral, puis les longitudes et latitudes vraies, parallaxe horizontale et demi-diamètres du Soleil et de la Lune : puis les parallaxes, pour en déduire la longitude, la latitude et le demi-diamètre apparens de la Lune, aux trois instans indiqués. Si l'on veut comparer des observations faites en divers lieux de la Terre, on fera même bien d'exécuter ces calculs de demi-heure en demi-heure, pendant l'étendue de l'éclipse.

Ces opérations donneront les mouvemens des variables; on pourra, par interpolation, trouver ces quantités de 5′ en 5′. Mais comme R ne varie que de 18″ de l'horizon au zénith, on pourra supposer $\psi$ constamment égal à sa valeur lors de la conjonction ; et comme il s'agit de trouver les instans où $\Delta = \psi$, il suffira d'interpoler les valeurs de $\alpha$ et $\lambda'$, pour en tirer celles de $\Delta$, et l'on reconnaîtra bientôt vers quel instant la condition $\Delta = \psi$ est remplie à peu près.

Voilà le calcul ébauché, ce qui suffit pour faire l'observation du phénomène : une proportion entre les durées et les erreurs peut donner à peu près l'instant d'un contact. On attache rarement de l'importance à prédire une éclipse avec la précision des secondes ; c'est l'observation même qui doit être faite avec un grand soin, pour déterminer les longit. des stations, et corriger les tables astronomiques, ainsi qu'il sera expliqué plus loin.

Mais si l'on veut prédire exactement les circonstances de l'éclipse, il reste à corriger ce premier résultat. Soit AB (fig. 26) l'écliptique dont le pôle est P, B le centre du Soleil, L celui de

la Lune qui arrivera en C, sur son orbite CD, quand l'éclipse finira. Pour être en droit de supposer le Soleil immobile en B, il faut n'attribuer à la Lune que la diff. des vitesses. Soit $k$ *le mouvement horaire apparent relatif en longitude*, et $n$ le mouvement horaire apparent de la Lune en latitude ; dans le temps $t$, qui doit s'écouler jusqu'au contact, cet astre décrira $kt$ en longit., $nt$ en latit. ; en sorte que les coordonnées de son centre seront changées en

$$AB = \alpha + kt, \quad AC = \lambda' + nt.$$

Cela est vrai pour l'émersion ; mais en raisonnant de même pour l'immersion, on trouve $AB = \alpha - kt$. Ainsi, il suffira de prendre $k$ négatif dans les formules que nous allons trouver, pour les appliquer à cette dernière phase.

Le petit triangle ABC peut être considéré comme plan et rectangle ; l'hypoténuse BC devient $= \psi$ à l'instant du contact, en prenant pour $\psi$ celle des valeurs (7) ou (8) qui se rapporte au contact qu'on veut calculer. On a donc l'équ.

$$(\alpha + kt)^2 + (\lambda' + nt)^4 = \psi^2, \qquad (9)$$

$$t^2 (n^2 + k^2) + 2t (\alpha k + \lambda' n) = \psi^2 - \alpha^2 - \lambda'^2 = \psi^2 - \Delta^2,$$

en conservant la valeur de $\Delta^2$ qu'on vient de trouver. Faisons, pour abréger, $A = \psi^2 - \Delta^2$, $B = \alpha k + \lambda' n$ ; d'où

$$t^2 (n^2 + k^2) + 2Bt = A,$$

$$t = \frac{-B \pm \sqrt{B^2 + A(n^2 + k^2)}}{n^2 + k^2}.$$

Ces valeurs de $t$ se rapportent aux deux contacts relatifs à celle de $\psi$ qu'on emploie ; mais comme on a supposé que la Lune a une marche uniforme, qu'il n'est permis de lui attribuer que pendant une courte durée, on doit rejeter la racine qui se rapporte au contact éloigné de l'heure prise pour terme de départ, et pour laquelle on a calculé $\Delta$. Or, si à cette heure on avait trouvé $A = 0$, ou $\psi = \Delta$, c'eût été visiblement celle du contact, et la racine de $t$ eût été zéro : donc la seule racine

utile est celle qui devient nulle avec A. On ne doit donc conserver au radical que le signe $+$, contraire à celui de $-$B. Or, développant ce radical, on a

$$\sqrt{\ } = \mathrm{B} + \frac{\mathrm{A}\,(n^2+k^2)}{2\mathrm{B}} - \frac{\mathrm{A}^2\,(n^2+k^2)^2}{8\mathrm{B}^3} + \ldots$$

Il faut remarquer que $\mathrm{A} = \psi^2 - \Delta^2$ est supposé très petit, et que la série est convergente, du moins dans le cas d'un contact extérieur, qui est le plus fréquent. On peut même se contenter des deux premiers termes. Ainsi, en remettant pour A et B leurs valeurs, et multipliant notre racine de $t$ par 3600″ pour exprimer ce temps en secondes, elle devient

$$t = \frac{1800''\,(\psi^2 - \Delta^2)}{n\left(\lambda' + \frac{\alpha k}{n}\right)}. \qquad (10)$$

Cette valeur de $t$, *prise avec son signe*, doit être ajoutée à l'heure de départ, pour laquelle on a évalué L′, $\lambda'$, $\psi$, $\Delta\ldots$, comme il a été expliqué ci-devant. On trouve donc l'instant du contact extérieur, en se servant de la valeur (7) de $\psi$, ou le commencement et la fin de l'éclipse. Quand la quantité (10) est négative, l'heure de la phase est antérieure à celle de départ.

S'il s'agit d'un contact intérieur, les centres du Soleil et de la Lune sont très voisins, $\alpha$ est très petit, ainsi que le diviseur B; et l'on doit conserver un plus grand nombre de termes de la série. Mais comme ce développement peut être peu ou point convergent, il faut revenir à la valeur complète de $t$ : seulement on voit qu'elle est donnée par une differ. entre deux nombres qui peuvent être très grands, et que le calcul n'aurait pas assez de précision. Il convient donc de faire passer le radical au dénominateur, en multipliant haut et bas par $+\mathrm{B} + \sqrt{\ }$. Ce calcul donne

$$t = \frac{3600''\,(\psi^2 - \Delta^2)}{\mathrm{B} \pm \sqrt{\mathrm{B}^2 + (n^2+k^2)(\psi^2 - \Delta^2)}};$$

On prend le signe du radical qui est contraire à celui de B. D'ailleurs on rend, si l'on veut, la formule propre au calcul des log. par les procédés connus. (*V.* mon *Cours de Mathém.*, n° 365.)

Dans toutes ces équ., il faut faire attention aux signes des lettres. Le mouv. horaire relatif app. $k$, est négatif lorsqu'il s'agit d'un contact occidental ($\odot >$ L'); il est positif pour un oriental ($\odot <$ L'); $n$ est négatif quand la Lune paraît s'éloigner du pôle boréal de l'écliptique; la latit. app. $\lambda'$ a le signe — quand elle est australe; la distance $\alpha$ des centres en longit. est toujours positive.

Appliquons l'équ. (10) à l'émersion du 7 septembre 1820. Nous avons trouvé qu'à $3^h\,32'\,47'',7$ t. moy. à Paris, on a

$$\alpha = 30'\,46'',1\,,\quad \Delta = 31'\,16'',40\,,\quad ↓ = 30'\,36'',86\,,\quad \lambda' = -5'\,35'',9.$$

On cherchera les longit. et latit. app. pour un instant voisin, afin d'en tirer les mouv. horaires app., tels qu'on les donne ci-après. Voici le calcul, en observant que

$$↓^2 - \Delta^2 = (↓ + \Delta)(↓ - \Delta),$$

et que ce produit est négatif, à cause de $↓ < \Delta$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\alpha =$ 30' 46" 19 | ........ | 3.2662552 |
| $↓ =$ 30' 36" 86 | $k = +$ 29.19,56 | ........ | 3.2454041 |
| $\Delta =$ 31.16,40 | $n = -$ 2.42,38 | ........ | — 2.2105325 — |
| Somme.... = 61.53,26 | ........ | 3.56976 | 4.3011268 — |
| Differ..... = — 39,54 | ........ | 1.59704 — | — 5° 33' 24" 5 |
| | 1800". | 3.25527 | $\lambda' =$ — 5.35,9 |
| Heure supposée. | | — 4.30836 — ........ | — 5.39. 0,4 |
| $3^h\,32'\,47'',7$ | $n$........ | — 2.21053 — | |
| — 1.20,0 | ........ | 1.90318 — ........ | 80",92. |
| 3.31.27,7 t. moy., *fin de l'éclipse*. | | | |

Et, en effet, si l'on veut vérifier ce résultat, on recommencera le calcul de la p. 295, et l'on trouvera

| | | | |
|---|---|---|---|
| | $\lambda' = -$ 5' 34" 0 | ........ | 2.52375 |
| 3.25679 | ...... $\alpha =$ 30. 6,3 | ........ | — 3.25679 |
| cos $\theta$... — 9.99270 | $\theta = -$ 10° 28' 34" | ...... tang | 9.26696 |
| $\Delta$....... 3.26409 | ...... $\Delta =$ 30.36,9 $= ↓$. | | |

A l'Observatoire royal de Paris, la moyenne de quatre ré-

sultats obtenus par les astronomes les plus exercés a été de $3^h 31' 29''$.

Nous ne ferons pas ici les calculs relatifs à l'immersion. On trouve que ce phénomène arrive vers midi $40'$ t. vr., qui équivaut à $11^h 43' 48'',6$ t. sid. Voici les élémens de l'opération :

$$\odot = 164^d 44' 26, \quad L = 164^o\ 7' 55'', \quad \lambda = +\ 48' 17'',$$
$$a = \quad 28.28, \quad L' = 164.15.58 \quad \lambda' = -\ 6.27,0.$$

On conserve les mêmes valeurs de $\downarrow$, R'..., et l'on trouve $t = +\ 57'',6$, en sorte que l'immersion commence à midi $39' 18''$ t. moy.

202. La phase d'éclipse qui répond à un instant donné dépend des valeurs correspondantes des demi-diamètres et de la distance des centres. En comparant les relations de ces quantités dans deux cercles qui se coupent, on trouve que l'étendue éclipsée est

$$= r + R' - \Delta.$$

Récapitulons maintenant tous les calculs nécessaires pour prédire les circonstances d'une éclipse de Soleil à Paris.

On calcule, par les tables astronomiques, la longit. $\odot$ de cet astre pour un instant voisin de l'opposition; celle L de la Lune, sa latit. $\lambda$, sa parallaxe horizontale H' pour Paris, son demi-diamètre R. A l'aide des mouvemens horaires, on en tire les valeurs de ces quantités pour deux autres instans avant, et deux après l'opposition ; ces quatre intervalles étant chacun de $30'$. H' et R sont sensiblement constans dans cette durée.

Cela fait, par les formules du nonagésime, on réduit en apparentes ces longit. et latit., L' et $\lambda'$, et le demi-diam. R', et l'on en conclut les distances $a$ des deux centres en longit. pour les cinq époques choisies, ainsi que les distances $\Delta$ des centres. Par la méthode d'interpolation (v. la note p. 98), on cherchera les valeurs des variables $a$, $\lambda'$, R', et $\Delta$, de $5'$ en $5'$. On formera donc un tableau dont les 7 colonnes auront les titres suivans :

| Temps vr. | Dist. en long. app. $\alpha$. | Latit. app. $\lambda'$. | Demi-diam. R'. | Dist. app. centres $\Delta$. | Var. en 1'. | Éclipse $\epsilon$. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | | |

En comparant ces valeurs, on reconnaît bientôt vers quel instant la distance apparente $\Delta$ devient égale à $r + R'$, car cette dernière quantité varie très peu, et comme la variation de $\Delta$ en 1' de temps est connue, on peut aisément trouver l'heure où cette égalité arrive, en posant une proportion entre les durées. On obtient donc à fort peu près l'heure du contact, et il reste à faire le calcul indiqué p. 294, pour s'assurer s'il a réellement lieu, et corriger l'heure supposée.

203. Le milieu de l'intervalle entre les instans des deux contacts extérieurs est à fort peu près celui de *la plus grande éclipse;* et comme alors on a un *maximum*, il n'y a aucune erreur à prendre ce milieu pour le moment où $\epsilon$ est le plus grand. Au reste, comme $r$ et R' sont à peu près constans pendant toute la durée d'une éclipse, la plus grande phase arrive quand $\Delta$ est un *minimum*; l'équ. $\Delta^2 = \alpha^2 + \lambda'^2$ donne

$$\alpha d\alpha + \lambda' d\lambda' = 0, \quad \alpha = -\frac{d\lambda'}{d\alpha}\cdot\lambda'.$$

On prend, sans erreur, pour $\lambda'$, la latitude app. au milieu de l'éclipse; $d\lambda'$ et $d\alpha$ sont les mouvemens app. en long. et latit. qu'on trouve dans la table; ainsi $\alpha$ est connu, et par suite $\Delta$, par interpolation.

On manquerait l'observation d'une immersion, si l'on ne connaissait pas d'avance le point du disque solaire sur lequel la Lune va entrer. La construction de la fig. 29 suffit pour trouver ce point, qu'il n'est jamais utile d'avoir avec précision. Au reste, on peut le déterminer en calculant l'angle $\chi$ du vertical du Soleil avec l'écliptique, à l'heure sid. $s$; c'est ce qu'on appelle l'*angle parallactique*.

Soit $\Upsilon Q$ (fig. 30) l'équateur, P son pôle, PM le méridien, $\Upsilon A$ l'écliptique, S le Soleil, ZT son vertical, L la Lune, ZSI$=\chi$ l'angle parallactique demandé. On sait que $\Upsilon Q = 90° + s$ (p. 132); l'angle $\Upsilon$ est l'obliquité $\omega$ de l'écliptique; l'angle Q supplément de la colatitude $= 90° + l$. On peut donc calculer l'angle A et le côté $\Upsilon A$ du triangle sphérique STA, et l'on aura SA $= \Upsilon A - \Upsilon S = \Upsilon A - \odot$. Cela fait, le triangle STA donnera

$$\cot \chi = \cos SA \tang A.$$

A l'instant du contact en $m$, SL $= \psi = r + R'$, LI $= \lambda'$, $\cos LSI = \frac{\lambda'}{\psi}$; donc on connaît $\chi -$ LSI $=$ FSL, ou l'arc du disque solaire, compris depuis le contact $m$ jusqu'au point culminant F.

On sait donc prédire toutes les circonstances d'une éclipse de Soleil pour Paris; le calcul serait le même pour une autre station, en tirant des tables les données relatives aux heures vraies de Paris, distantes de 30' de part et d'autre de l'opposition; les longit. et latit. vraies, etc., sont ensuite changées en apparentes pour le lieu, dont on suppose la position géographique bien connue, et par suite les heures sid. et moy. correspondantes aux précédentes. On calcule donc, comme il a été exposé, les valeurs de la parallaxe horizontale, de la longit. et de la hauteur du nonagésime, de L', $\lambda'$, R', $\alpha$ et $\Delta$, telles qu'on les voit en ce lieu. Le reste du calcul est absolument le même que pour Paris.

204. Occupons-nous de prédire les *occulations d'étoiles par la Lune.*

La plus grande valeur du demi-diamètre lunaire est 16' 45",54; celle de la parallaxe est 61' 24"; celle de l'inclinaison de l'orbite est 5° 17' 34"; la somme de ces arcs est 6° 35' 44". Il n'y a donc que les étoiles qui ont une latitude moindre que cette quantité qui puissent être éclipsées par la Lune. Prenant pour unité métrique la longueur du degré d'un globe céleste, on taille un cercle de papier dont le rayon est la somme R + H du demi-diam. et de la parallaxe; et l'on

promène ce disque sur le globe, en plaçant successivement son centre sur les divers points dont la longit. et la latit. sont celles de la Lune. On reconnaît ainsi quelles sont les étoiles dont l'occultation ou les appulses sont possibles, et qui seules doivent fixer l'attention. C'est pour ces étoiles seulement qu'on développe les calculs dont il va être question.

On cherche à peu près l'heure de la conjonction de l'étoile et de la Lune (p. 107), ce qui est bien facile, car la première n'a pas de mouvement propre. Pour deux instans, tant avant qu'après, écartés de 30′ et 60′, on calcule les longit., latit., parallaxe, demi-diam. vrais de la Lune, et on les réduit, par le secours du nonagésime, à leurs valeurs apparentes, précisément comme il a été expliqué p. 292, pour les éclipses de Soleil. On connaît donc pour ces 5 époques la distance app. $\alpha$ en longit. de l'étoile au centre de la Lune, le demi-diam. app. et les mouv. horaires app. en long. et latitude.

Comme l'étoile n'a ni diamètre ni parallaxe, il faut modifier les équ. précédentes pour trouver les instans de l'immersion et de l'émersion, et trouver les équ. qui tiennent lieu de (5) et (6). Ces phénomènes arrivent quand la distance $\Delta$ au centre de la Lune est égale au demi-diam. app. $\Delta = R'$; et il faut savoir calculer la valeur de $\Delta$ à un instant donné. Soit $a$ (fig. 27) le lieu de l'étoile, $c$ celui du centre de la Lune, AB un arc d'écliptique dont le pôle est P; $Aa = \nu$ est la latit. de l'étoile, $Bc = \lambda'$ celle de la Lune, $ac = \Delta$ la dist. app., $bc = \lambda' - \nu$ la diff. des latit. app., $AB = \alpha$ celle des longit., et il s'agit de résoudre le triangle $abc$.

Or, on sait (*v.* p. 163) que si MM′ (fig. 39) est un arc de parallèle à l'écliptique OO′, le rapport des arcs semblables MM′ et OO′ est le cos. de la latitude, ou $MM' = OO' \cos \nu$. Cette équ. devient, pour la fig. 27, $ab = AB \cos \nu = \alpha \cos \nu$. Ainsi, le triangle $abc$ considéré comme plan et rectangle, donne

$$\Delta^2 = (\lambda' - \nu)^2 + \alpha^2 \cos^2 \nu, \qquad (11)$$

$$\tan \theta = \frac{\lambda' - \nu}{\alpha \cos \nu}, \quad \Delta = \frac{\alpha \cos \nu}{\cos \theta}.$$

Cherchons, par ex., si le 15 octobre 1829, à Paris, l'immersion d'Aldébaran a eu lieu à $9^h\,14'$ du soir, t. moy., ce qui revient à $9^h\,28'\,14'',1$ t. vr., et au temps sid. $s = 22^h\,50'\,29'',2 = 342^\circ\,37'\,17'',6$. On trouve

| | | | |
|---|---|---|---|
| ☾.... $L =$ | $66^\circ\,41'\,17''3$ | $\lambda =$ | $-\,4^\circ\,52'\,55''0$ |
| $H =$ | 59. 0,8 | $R =$ | 16. 4,87 |
| ★..... $l =$ | 67.24.49,6 | $\nu =$ | − 5.28.45,1. (*V.* p. 52.) |

Pour la *parall. horiz.* H′ *du lieu* (équ. 1 et 2).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| H.............. | 3.54910.............. | | 59′ 0″82 | | |
| $\mu$.............. | $\bar{3}$.51570 | | − 6,54 | H........ | 3.54910 |
| $\sin^2 l'$.......... | 9.75080 | | | const...... | $\bar{1}$.43537 |
| 6″,54.......... | 0.81560 | $H' =$ | 58.54,28 | R........ | 2.98447. |

*Nonagésime* (équ. 3, 4, 5).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | $\cos(\omega+\varphi)$ | 9.9949427 | tang.... | 9.1861164 |
| $\cot l'$....... | 9.9446542 | $\sin l'$.... | 9.8753993 | $\cot h$... | 0.0776544 |
| $\sin s$........ | 9.4752087 − | $\cos\varphi$.. − | 9.9854828 | | |
| $\tang\varphi$....... | 9.4198629 − | $\cos h$.... | 9.8848592 | sin N... | 9.2637708 |
| $\varphi =$ | $-14^\circ\,43'\,55''5$ | $h =$ | $39^\circ\,54'\,16''8$ | $N =$ | $10^\circ\,34'\,37''2$ |
| $\omega =$ | 23.27.32,5 | | | $L =$ | 66.41.17,3 |
| $\omega+\varphi =$ | 8.43.37,0 | | | $L - N =$ | 56. 6.40,1. |

*Parallaxes* (équ. E, p. 134). Comme les deux astres peuvent être un peu éloignés de l'écliptique, nous chercherons le lieu app. de la Lune par les équ. E, qui sont plus exactes que F.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $\sin H'$...... | 8.2338546 | .............................. | | | 8.2338546 |
| $\sin h$....... | 9.8072049 | .............................. | | | 9.8072049 |
| $\cos(L-N)$. | 9.7463101 | | | $\sin(L-N)$. | 9.9191412 |
| $\cos\lambda$...... − | 9.9984216 | | | $\sigma$...... | 0.0042580 |
| $\cos\beta$....... | 7.7889480 | 0,5...... | 9.6989700 | $\tang\varpi$. | 7.9641587 |
| $\beta =$ | $89^\circ\,38'\,51''3$ | $\cos\lambda$.. − | 9.9984216 | $\varpi =$ | $+\,31'\,40''5$ |
| $\frac{1}{2} =$ | 44.49.25,6 | $\sin^2$... − | 9.6962904 | $L =$ | 66.41.17,3 |
| $\sin H'$...... | 8.2338546 | $\sigma$......... | 0.0042580 | $L' =$ | 67.12.57,8 |
| $\cos h$....... | 9.8848592 | | | $l =$ | 67.24.49,6 |
| $\sin\xi$....... | 8.1187138 | | | $a =$ | 11.51,8 |
| $\xi =$ | $0^\circ\,45'\,11''1$ | | | 2. ... | 0.3010300 |
| $\lambda =$ | − 4.52.55,0 | | | $\sigma$.... | 0.0042580 |
| $\lambda - \xi =$ | − 5.38. 6,1............ | | $-\,2^\circ\,49'\,3''0$... | sin... | 8.6915662 − |
| $\lambda + \xi =$ | − 4. 7.43,9............ | | − 2. 3.52,0... | cos... | 9.9997180 |
| $\nu =$ | − 5.28.45,1 | | | $\cos\varpi$. | 9.9999816 |
| $\lambda' =$ | − 5.39.56,7.......................... | | | $\tang\lambda'$ | 8.9965538 − |
| $\lambda' - \nu =$ | − 11.11,6............ | | 2.8271107 | $\sigma$..... | 0.0042580 |
| $a$............ | 2.8523583 | $a\cos\nu$. − | 2.8503695 | $\cos\lambda'$. | 9.9978732 |
| $\cos\nu$........ | 9.9980112 | | | $\cos\varpi$. | 9.9999816 |
| 708″,55...... | 2.8503695 | $\tang\theta$... | 9.9767412 | sin R. | 7.6700421 |
| $\cos\theta$...... − | 9.8608032 | $\theta =$ | $43^\circ\,27'\,59''3$ | sin R′. | 7.6721549 |
| $\Delta$.......... | 2.9895663..... | $\Delta =$ | 16.16,26 | $R' =$ | $16'\,9''58$. |

En comparant cette distance apparente Δ de l'étoile au centre de la Lune, à la valeur de R′, on reconnaît que l'occulation n'est pas encore arrivée, et que l'étoile est encore éloignée du bord de $\Delta - R' = 6'',68$; mais dans peu l'immersion doit se faire.

205. On comprend comment on pourra former, comme page 302, un tableau contenant, de 5′ en 5′, les valeurs de la distance $\alpha$ en longitude, de la latitude apparente $\lambda'$ de la Lune, de son demi-diam. R′, et de la distance Δ de l'étoile au centre; ces quantités étant déduites, par interpolation, des valeurs calculées pour 5 époques distantes de $\frac{1}{2}$ heure. Ensuite, on trouvera, par une proportion, l'heure approchée de l'immersion ou de l'émersion, d'après la variation de Δ en 1′ de temps. Il ne restera plus qu'à vérifier si en effet la phase arrive à cet instant, en faisant le calcul précédent; et si cela n'a pas lieu, il faudra corriger cette heure.

Soit $l$ (fig. 28) le centre de la Lune près de l'émersion d'une étoile $a$; $c$ le point où ce centre arrivera quand l'étoile reparaîtra. Désignons toujours par $\lambda'$ et $\nu$ les latit. app. L$l$, A$a$, des astres, quand la Lune est en $l$; par $\alpha$ la diff. AL de leurs longit. appar., par $k$ et $n$ les mouv. horaires app. de la Lune en longit. et latitude. Dans le temps inconnu $t$ qui doit s'écouler jusqu'à l'émersion, l'arc $cl$ parcouru sera petit et la marche uniforme; la Lune décrira selon l'écliptique $BL = kt$, et dans le sens perpendiculaire $ci = nt$. Ainsi,

$$ab = ag + gb = (AL + BL)\cos\nu = (\alpha + kt)\cos\nu,$$
$$bc = ic + ib = \lambda' - \nu + nt.$$

Le triangle $abc$ considéré comme plan et rectangle, donne l'équ.

$$(\alpha + kt)^2 \cos^2\nu + (\lambda' - \nu + nt)^2 = R'^2.$$

On prendra $\lambda'$ et $\nu$ négatifs pour les latit. australes; $n$ aura le signe — quand la Lune s'éloignera du pôle boréal de l'écliptique; *k sera positif pour l'émersion, négatif pour l'immersion;* enfin, $\alpha$ aura toujours le signe +.

Cette équ. donne pour $t$ deux racines; mais on ne tient

compte que de celle qui se rapporte au contact voisin de l'heure supposée; on ne conservera donc, comme p. 298, que le signe positif du radical. Quant à la résolution de cette équ., il suffit de la comparer à (9), p. 298, pour voir qu'on doit changer dans celle-ci $\Delta$ en R′, $\lambda'$ en $\lambda' - \nu$, $\alpha$ en $\alpha \cos \nu$, et $k$ en $k \cos \nu$; ce qui donne, sans calcul, au lieu de l'équ. (10),

$$T = \frac{1800''\,(R'^2 - \Delta^2)}{n\left(\lambda' - \nu + \frac{\alpha k \cos^2 \nu}{n}\right)}; \qquad (12)$$

On ajoute cette quantité, *prise avec son signe*, à l'heure de départ, et lorsque $t$ a le signe —, l'heure cherchée est antérieure à celle-ci.

Appliquons cette équ. à l'immersion d'Aldébaran, le 15 octobre 1829, et conservons les valeurs obtenues p. 305. On trouve d'abord les valeurs de $k$ et $n$, ainsi qu'il a été dit ci-dessus et qu'on les a données ci-après.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| R′ = | 16′ 9″58 | $n$ = — | 1′ 52″8 | ..... — | 2.0523091 — |
| $\Delta$ = | 16.16,26 | $k$ = — | 34.43,3 | ......... | 3.3187518 — |
| Somme.. = | 32.25,84 | ........... | 3.28911 | $\alpha \cos \nu$. | 2.8503695 |
| Diff. .... = | — 6,68 | ........... | 0.82478 — | $\cos \nu$... | 9.9980112 |
| | | 1800″..... | 3.25527 | | 4.1148234 + |
| | | $n$......— | 2.05231 — | | + 3°37′ 6″4 |
| H. supp... | 9h14′ 0″ | P. .....— | 4.09184 | $\lambda' - \nu$ = | — 11.11,6 |
| $t$ = | 16,8... | $t$......... | 1.22501 | P = | + 3.25.54,8. |
| | 9.14.16,8 = H. moy. de l'immersion. | | | | |

Et en effet, on trouve, par le calcul, qu'à cet instant on avait

$$L' = 67^\circ\,13'\,7'',5, \quad \lambda' = -\,5^\circ\,39'\,57'',2, \quad \alpha = 11'\,42'',1\,;$$

d'où l'on tire $\Delta = 16.9,64 = R'$, à fort peu près.

*Détermination des longitudes géographiques par les éclipses.*

206. Nous avons traité, n° 193, ce qui se rapporte aux éclipses de Lune; la pénombre jette beaucoup d'incertitudes sur ce genre d'observations.

*Par l'observation des éclipses des satellites de Jupiter.*

Nous avons exposé (page 69) toutes les particularités de ce genre d'opération. On commence par corriger l'heure du chronomètre de son avance ou retard, afin d'en conclure l'heure qu'il marquera à l'instant annoncé dans la *Conn. des Tems* pour une immersion ou une émersion ; bien entendu qu'il s'agit ici de l'heure de Paris, où le phénomène est désigné. Quelques momens avant cette heure on se préparera à l'observation, en ne portant son attention que sur celui des satellites qu'elle intéresse, s'il s'agit d'une immersion : alors on devra reconnaître quel est celui de ces corps qui va s'éclipser, d'après les *configurations* qu'ils présentent, ainsi qu'il a été expliqué page 69 ; et s'il y a une émersion, on examinera de quel côté de Jupiter le cône d'ombre est situé, afin de saisir le moment où le premier point de lumière apparaîtra, en fixant d'avance la lunette vers le lieu où ce phénomène doit être vu.

L'heure du chronomètre sera notée et corrigée de son avance sur le méridien du lieu, afin d'avoir l'heure qu'on y compte à cet instant. La différence entre cette heure et celle de Paris, indiquée dans la *Conn. des Tems*, est la longitude du lieu en temps.

Par exemple, le 19 juin 1830, la *Conn. des Tems* apprend que le 3$^e$ satellite s'immergera à 13$^h$ 45′ 18″ temps moyen de Paris : on est par estime à 2$^h$ 3′ de longitude ouest ; ainsi l'on compte seulement 11$^h$ 42′ 18″ au lieu où l'on se trouve, lors de l'éclipse. Accordons qu'on ait antérieurement déterminé l'heure du lieu, et que le chronomètre y soit mis, ou, ce qui équivaut, qu'on sache de combien il est en avance, pour en tenir compte.

L'heure ci-dessus désignée n'est qu'approchée, mais cela suffit pour se préparer à l'observation. On se place donc à la lunette, et l'on suit l'astre, un peu avant l'instant fixé, afin de ne pas manquer l'éclipse. Supposons qu'on ait trouvé qu'elle arrive quand la montre marque 11$^h$ 36′ 42″ ; on voit déjà qu'on s'est trompé de 5′ 36″ dans l'estime qu'on a faite de la longitude du lieu.

| | |
|---|---|
| On a : heure moyenne de Paris.................. | $13^h45'18''$ |
| Heure du lieu.................................. | 11.36.42 |
| Longitude cherchée, en temps, à l'ouest......... | 2. 8.36. |
| Si le chronomètre a été originairement réglé pour donner l'heure de Paris, et si l'on a trouvé qu'il doit marquer lors de l'éclipse.................................. | 13.20.49 |
| Comme il devrait indiquer...................... | 13.45.18 |
| on voit qu'il retarde sur le t. moy. de Paris de.... | 24.29 |
| Dans ce [illegible], pour se préparer à l'observation, voici comment on a dû opérer : Heure de Paris.............. | 13.45.18 |
| Comme on suppose un retard d'environ.........— | 25. 0 |
| et qu'on présume une longitude ouest de........— | 2. 8. 0 |
| à l'instant de l'éclipse, le chronomètre doit donc marquer à peu près.......................... | 11.17.18. |

C'est vers l'instant où le chronomètre indiquera $11^h17'$ qu'il faut attendre l'immersion, et même un peu plus tôt, de crainte de quelque erreur dans les élémens du calcul.

Étant au Caire, on a réglé une montre sur le temps moy. de cette ville, et l'on a trouvé que le 17 octobre 1830 le retard est de $2'\,19''$ : on veut observer la fin de l'éclipse du 1er satellite, annoncée pour ce jour, et l'on présume que la longitude du Caire est de $2^h$ environ, à l'est de Paris.

| | |
|---|---|
| L'heure de l'émersion en temps moy. de Paris est. | $9^h10'49''$ |
| Différence des méridiens supposée..............+ | 2. 0. 0 |
| Retard de la montre...........................— | 2.19 |
| Heure présumée, qui sera indiquée à l'instant de l'éclipse.......................................... | 11. 8.30. |

C'est vers le moment où la montre sera sur cette heure qu'on se rendra attentif à l'émersion, et même quelques minutes avant, de crainte d'une erreur par excès sur la longitude présumée. Supposons qu'on ait trouvé que

| | |
|---|---|
| La montre marquait.......................... | $11^h\,4'22''$ |
| Retard sur le méridien du Caire............. | 2.19 |
| Heure de temps moy. de l'émersion au Caire.. | 11. 6.41 |
| Heure moy. de Paris au même instant........ | 9.10.49 |
| Longitude du Caire.......................... | 1.55.52. |

D'après cette exposition, on voit qu'il faut, avant tout, savoir lire sur le chronomètre deux heures différentes. La première, qui doit être connue avec une extrême précision, est le temps moyen du lieu où l'on se trouve, qu'on détermine par des opérations astronomiques préalablement faites; la 2e est le temps moyen compté à Paris, et ce temps n'a besoin d'être connu qu'approximativement pour se préparer à l'observation de l'éclipse; on l'obtient, soit en se fiant à la marche du chronomètre, supposée régulière depuis le départ du port, soit en ayant égard à la différ. des longitudes. C'est cette dernière heure qui est plus ou moins incertaine, et qu'on veut obtenir avec plus d'exactitude, en saisissant le moment de l'éclipse et comparant l'heure précise du lieu avec celle de Paris, prédite dans la *Conn. des Tems*. La différence de ces heures est celle des méridiens, laquelle, une fois qu'on l'a trouvée exactement, donne ensuite l'heure juste de Paris, et la marche de la montre, si l'on a deux opérations semblables.

207. *Par l'observation de l'une des phases d'une éclipse de Soleil.*

Dans le lieu dont on veut connaître la longitude, on note l'heure précise où l'on aperçoit l'une des phases de l'éclipse, telle que l'un des contacts extérieurs, ou bien l'immersion, ou l'émersion totale quand elle a lieu; on connaît ainsi l'heure vraie, moyenne et sidérale du phénomène. On en conclut ensuite, par le calcul, l'heure de la conjonction vraie, c'est-à-dire l'heure où les centres du Soleil et de la Lune se sont trouvés sur un même arc perpendiculaire à l'écliptique. Nous allons exposer les formules propres à cette opération.

Mais la *Conn. des Tems* donne, à la page 7, l'heure vraie de Paris, de cette conjonction : nous avons enseigné, n° 87, le moyen d'avoir cette heure avec précision, puisque c'est celle de la néoménie. La différence des heures vraies, traduites en durée sidérale (n° 109), est celle des méridiens. Le résultat a plus de précision lorsque la phase a pu être observée aussi à Paris, et que, par la même théorie, on en tire l'heure de la conjonction pour cette ville, parce que ce résultat est indépen-

dant des erreurs des tables, et peut même servir à les corriger.

Il faut se ressouvenir que lorsqu'un phénomène instantané a été vu de deux stations, et qu'on a noté les heures sid. où il est arrivé, la diff. de ces heures est celle des longitudes, et *la station orientale compte toujours l'heure la plus avancée.*

Tout se réduit, comme on voit, à calculer l'heure de la conjonction vraie, lorsqu'on connaît celle où a été aperçue, en un lieu, l'une des phases de l'éclipse. On suppose que la longitude de ce lieu est à peu près connue d'avance, et qu'on la demande avec plus d'exactitude : celle de Paris au même instant de l'observation, l'est donc pareillement. Ainsi, l'on pourra trouver les longitudes, latitudes, etc., du Soleil et de la Lune, ainsi que leurs positions apparentes (p. 109 et 292).

Cela posé, soit P (fig. 25), le pôle de l'écliptique AB, A le centre apparent du Soleil, C celui de la Lune à l'instant d'un contact observé, BC la latitude apparente $\lambda'$ de la Lune, $AB = \alpha$ la diff. des longitudes app., enfin, $AC = \Delta$ la distance apparente des deux centres, ou la somme des demi-diam. app. quand le contact est extérieur, et leur différ. quand il est intérieur (dans le cas de l'éclipse totale ou annulaire). Les équ. de la p. 293 tiennent compte de l'accroissement qu'éprouve le demi-diam. app. de la Lune, à raison de son élévation sur l'horizon. Le triangle ABC considéré comme rectangle et plan, donne $\alpha^2 = \Delta^2 - \lambda'^2$ ; $\Delta$ et $\lambda'$ sont connus et exprimés en secondes d'arc,

$$\alpha^2 = (\Delta + \lambda')(\Delta - \lambda'). \qquad (1)$$

Soient $\odot$ et $\odot'$ les longitudes vraie et apparente du Soleil, $☾$ et $☾'$ celles de la Lune, $p$ et $\varpi$ leurs parallaxes de longitude, $r$ et R' leurs demi-diamètres apparens. On a pour le 1[er] contact extérieur (entrée occidentale)

$$\odot = \odot' - p, \quad ☾ = ☾' - \varpi, \quad \alpha = \odot' - ☾' ;$$

d'où $$\odot - ☾ = \alpha + (\varpi - p). \qquad (2)$$

Pour le 2[e] contact extérieur (sortie orientale), comme $☾ > \odot$,

on prend $☾ - ☉$; cette diff. a la même expression, excepté que $\varpi - p$ a le signe $-$. Ainsi, réunissant les deux cas dans la même formule, on a

$$\textit{Différ. des longit. vr.} = \alpha \pm (\varpi - p) = k;$$

$-$ pour le contact oriental, $+$ pour l'occidental.

Outre ces deux contacts, il y en a deux autres, dans les éclipses totales ou annulaires : mais ils sont évidemment compris dans la même formule. Il faudra seulement prendre $\Delta$ égal à la différ. des demi-diam. apparens, au lieu de leur somme. Le signe $\pm$ conserve la même acception.

208. Maintenant, si l'on veut regarder le Soleil comme fixé sur l'écliptique, on en a le droit, pourvu qu'on n'attribue à la Lune que le mouvement horaire relatif $m - M$. Alors la marche de la Lune dans le sens de l'écliptique est $m - M$, en 1 heure de temps vrai, ou 3600″. On trouve le nombre T de secondes nécessaires pour décrire l'arc $k$ de distance en longitude, par la proportion

Si $m - M$ est décrit en 3600″, $k$ l'est en T secondes.

$$T = \frac{3600''}{m - M}\{\alpha \pm (\varpi - p)\}. \qquad (3)$$

Nous connaissons ainsi le temps écoulé entre l'instant du contact observé et la conjonction vraie (la néoménie), en prenant le signe $+$ quand le contact s'est fait à l'ouest, ou du côté droit, et $-$ pour ceux d'est ou de gauche. C'est le contraire quand les longitudes vraies du Soleil et de la Lune sont plus petites que celle du nonagésime, attendu que $\varpi$ et $p$ sont alors négatifs.

Il faut remarquer que, dans les éclipses, on emploie $H' - 8'',8$ au lieu de $H'$, pour la parallaxe horizontale de la Lune, afin de n'être pas obligé de calculer celle de longitude du Soleil, en sorte que la valeur calculée de la sorte pour $\varpi$ tient lieu de $\varpi - p$ (v. n° 199). On évite ainsi l'opération qu'il faudrait faire pour réduire la parallaxe horizontale du Soleil à sa valeur $p$ en longit.

Ainsi, l'équ. (3) est remplacée par

$$T = \frac{3600}{m - M}(\alpha \pm \varpi). \qquad (3')$$

Il en est de même pour la latitude, et celle $\lambda'$ qu'on tire des équ. p. 293, est alors diminuée de celle du ☉, ou $\lambda'$ = la différ. des latitudes apparentes des deux astres.

Ces calculs donnent l'heure du lieu pour la conjonction vraie, savoir :

$$\theta = t \pm T;$$

$t$ étant celle de l'observation du contact, en prenant + pour celui de l'ouest, — pour celui de l'est.

209. Voilà donc le problème des longitudes résolu par l'observation des éclipses de Soleil, qui est susceptible d'une grande précision, surtout les contacts orientaux. Comme la même éclipse présente au moins deux contacts extérieurs, que quelquefois elle en a encore deux intérieurs, on obtient ainsi plusieurs valeurs presque égales de la longitude : on prend leur moyenne, parce qu'on la regarde comme moins altérée par les erreurs d'observation. Cependant on doit dire que l'on est toujours moins certain de l'instant où l'éclipse commence que de celui où elle finit, parce que la Lune n'étant pas visible, il est difficile de saisir, à 1″ ou 2″ près, le moment où son limbe commence à toucher celui du Soleil.

Il ne faut pas oublier de diminuer de 3″,5 le demi-diam. du Soleil, à cause de l'irradiation, et de 2″ celui de la Lune, à cause de l'inflexion. (V. p. 295.)

Le procédé est assez long, mais il est très exact.

210. Une éclipse de Soleil a été observée à Harefield par De Brühl.

| | |
|---|---|
| Commencement, 4 septembre 1793, à............ | 21h35′21″76 t. m. |
| Différence supposée au méridien de Paris......... | 11.16,86 O. |
| T. moy. de Paris le 4 septembre, à.............. | 21.46.38,62 |
| — Équation du temps.................................. | + 1.41,08 |
| Heure vraie de Paris au 1er contact.............. | 21.48.19,70. |

On tire des tables, pour cet instant, les valeurs suivantes :

| | SOLEIL. | LUNE. |
|---|---|---|
| Longitude vraie........................... | | $L = 162^{\circ}\ 9'33''0$ |
| Latitude vraie............................ | | $\lambda = +\ 33.55,70$ |
| Mouvement horaire..... | $M = 2'25''75$.... | $m = 29.35,05$ |
| Parall. horizont. équat.. | $p = 8,42$.... | $H = 54.\ 6,75$ |
| Demi-diamètre vrai..... | $r = 15.56,14$.... | $R = 14.44,72$ |
| Asc. dr. ⊙ moyen...... | $10^h 59' 44''4$ | |
| Heure sid. du lieu...... | $s = 8.35.\ 6,17$ | $= 128^{\circ}46'32''5$ |
| Obliquité. $\omega = 23^{\circ}27'48'',1$, | Lat. d'Harefield $=$ | $51.36.10$ |

Voici les calculs (en prenant l'aplatissement $\mu = \frac{1}{308}$) :

*Latitude géocentrique et diff. des parall. horiz.* (équ. 2, p. 177).

| | | |
|---|---|---|
| Équ. p. 112. | $\mu$.......... $\bar{3}.52288$ | $H = 54'\ 6''75$ |
| $(1-\mu)^2$...... $\bar{1}.9970999$ | H......... $3.51145$ | $-\ 6,61$ |
| tang $l$....... $0.1009945$ | $\sin^2 l'$..... $9.78608$ | $-\ p = -\ 8,42$ |
| tang $l'$....... $0.0980944$ | $6'',61$....... $0.82041$ | $H' = 53.51,72$. |
| $l' = 51^{\circ}\ 24'\ 59''$. | | |

*Position du monagésime* (équ. 3, p. 292).

| | | |
|---|---|---|
| cot $l'$......... $9.9019056$ | $\sin(\omega+\varphi)$. $9.9151817$ | cos..... $9.7548371$ |
| sin $s$........ $9.8918781$ | tang $s$... $0.0951316-$ | sin $l'$... $9.8930395$ |
| tang $\varphi$....... $9.7937837$ | sin $\varphi$.. $-\ 9.7227655$ | cos $\varphi$. $-\ 9.9289818$ |
| $\varphi = 31^{\circ}52'52''4$ | tang N.. $0.2875478-$ | cos $h$... $9.7188948$ |
| $\omega = 23.27.48,1$ | $N = 117^{\circ}17'\ 3''$ | $h = 58^{\circ}\ 26'\ 4''$ |
| $\omega + \varphi = 55.20.40,5$ | $L = 162.\ 9.33$ | |
| | $L - N = 44.52.30$. | |

*Longit., latit. et demi-diam. appar.* (équ. 4, p. 292).

| | | |
|---|---|---|
| 0,5........... $\bar{1}.6989700$ | | 2.....$-\ 0.3010300$ |
| H'.......... $3.5094337$.............. | $3.5094337$ | cos $\lambda$.$-\ 9.9999789$ |
| sin $h$......... $9.9304608$ | cos $h$.... $9.7188948$ | $\sin^2$..$-\ 9.6948418$ |
| cos(L $-$ N).. $9.8504304$ | $\xi$........ $3.2283285$ | $-\ 9.9958507$ |
| cos $\lambda$......$-\ 9.9999789$ | $\xi = 28'\ 11''72$ | log $\sigma = 0.0041493$ |
| $\varepsilon$............. $2.9893160$ | $\lambda = 33.55,70$ | |
| $\varepsilon = 16'\ 15''7$ | $\lambda - \xi = 5'\ 43''98$ | |
| $45^{\circ} - \varepsilon = 44.43.44,3$ | $\lambda + \xi = 62.\ 7,42$ | Moitié.. $31'\ 3'',71$. |
| H'.......... $3.5094337$ | $\lambda - \xi$... $2.5365332$ | R....... $2.9468058$ |
| $\sigma$............ $0.0041493$.............. | $0,0041493$.............. | $0.0041493$ |
| sin $h$........ $9.9304608$ | cos...... $9.9999823$ | cos $\lambda'$... $9.9999991$ |
| sin(L $-$ N).. $9.8485354$ | cos $\varpi$... $9.9999804$.............. | $9.9999804$ |
| $\varpi$.......... $3.2925792$ | $\lambda'$....... $2.5406452$ | R'..... $2.9509349$ |

| | | |
|---|---|---|
| σ = 32′41″46 | λ′ = 347″25 | R′ = 893″17 |
| | Δ = 1843,81 | r = 956,14 |
| 3.1750942.... | Différ... = 1496,56 | 1849,31 |
| 3.3406543.... | Somme. = 2191,06 | — 5,50 |
| 6 5157485 | σ = 1961,46 | Δ = 1843,81 |
| ½........... 3.2578742......... | α = 1810,81 | (*V.* p. 295.) |
| 3.5766028.......... | k = 3772,27 | |
| 3.5563025.... | 3600 | |
| — 3.2122675.... | m — M = 27′10″30 | |
| T.......... 3.9206378...................... | T = 2h18′49″86 | |

| | |
|---|---|
| Commencement de l'éclipse à........ | t = 21.35.21,76 t. m. |
| H. moy. de la conj. vr. à Harefield.... | θ = 23.54.11.62 |
| H. moy. de ce phénomène à Paris..... | 24. 5.30,26 |
| Longitude de Harefield, ouest de Paris. | 11.18,64. |

211. L'observation de la fin de l'éclipse fournit des calculs semblables; elle s'est faite à Harefield, à.......................... 0h40′45″50

| | |
|---|---|
| Différ. supposée du méridien de Paris...... | 11.16,86 |
| H. moy., à Paris, de la fin de l'éclipse...... | 0.52. 2,36. |

Pour cet instant, on trouve les élémens ci-après :

| | SOLEIL. | LUNE. |
|---|---|---|
| Longitude vraie.................................. | | L = 163°41′ 0″0 |
| Latitude vraie.................................. | | λ = 42.20,0 |
| Mouvement horaire.... | M = 2′25″75......... | m = 29.35,86 |
| Parall. horiz. équat.... | p = 8,42.......... | H = 54. 7,7 |
| Demi-diam. vr........ | r = 15.56,14.......... | R = 14.44,98 |
| Asc. dr. ☉ moy....... | = 11h 0′14″86 | |
| Heure sid. du lieu..... | s = 11.41. 0,36.......... | = 175.15. 5,40. |

Le calcul donne H′ = 53.52,67

| | | | |
|---|---|---|---|
| N = 150° 1′3″ | L — N = 13°39′57″ | h = 45.51. 8 | |
| ι = 18.47,05 | ξ = 37.31,53 | log σ = 0.0050605 | |
| σ = 9.14,09 | λ′ = 4.57,88 | R′ = 14′54″82 | |
| Δ = 30.45,46 | α = 30.21,26 | α — σ = 21. 7,17 | |
| | | T = 0.46.38,40 | |

| | |
|---|---|
| Heure moy. de l'obs. de la fin........ = | 24.40.45,50 |
| Heure moy. de la conj. vraie..... θ = | 23.54. 7,10 |
| Heure moy. de Paris.............. | 24. 5.30,26 |
| Différ. en longitude d'Harefield. .... | 11.23,16. |

Les 4" de différence entre ces deux résultats proviennent des erreurs des tables et de celles d'observation.

Voici les données de la fin de la même éclipse, observée à Gotha par M. de Zach, à.......................................... 1ʰ44′43″40 t. m.

| | |
|---|---|
| Distance au méridien de Paris......... | — 33.35,00 |
| Heure moy. de Paris................. | 1.11. 8,40. |

On trouve pour cet instant :

| | SOLEIL. | LUNE. |
|---|---|---|
| Longitude vraie.............................. | | L = 163°50′21″3 |
| Latitude vraie.............................. | | λ = + 43.11,37 |
| Mouvement horaire.... | M = 2′25″75.......... | m = 29.35,85 |
| Parall. horiz. équat.... | p = 8,42.......... | Ħ = 54. 7,80 |
| Demi-diam. vrai....... | r = 15.56,14.......... | R = 14.45,00 |
| Asc. dr. ☉ moyen..... | = 11ʰ 0′ 18″14 | |
| H. sidér. du lieu....... | s = 12.45. 1,53.......... | = 191.15.23,00 |
| Latitude de Gotha..... | l = 50°56.17,00 | l′ = 50.45. 2,50 |

| | | |
|---|---|---|
| Le calcul donne. | | H′ = 53.52,89 |
| φ = 9° 3′40″6 | N = 162°33′ 2″5 | h = 40.34.34,0 |
| ι = 17.31,24 | L — N = 1.17.18,8 | |
| 45° — ι = 44.42.28,76 | ξ = 40.55,52 | log σ = 0.0044840 |
| ϖ = + 47,79 | λ′ = 2.17,26 | R′ = 14′54″18 |
| Δ = 30.44,82 | α = 30.39,70 | k = 29.51,91 |
| (V. nº 189.) | | T = 1ʰ 5.55,14 |

| | |
|---|---|
| H. moy. de Gotha à la fin............ | t = 1.44.43,40 |
| H. moy. de la conj. vraie.............. | θ = 0.38.48,26 |
| H. moy. de Paris..................... | = 0. 5.30,26 |
| Longitude de Gotha à l'est de Paris...... | = — 33.18,00 |
| Selon M. Dezach, par divers procédés... | = — 33.35,00 |

212. Lorsqu'on doit calculer les contacts d'une éclipse observée en différens lieux, il est avantageux de trouver d'abord les élémens pour toute la durée du phénomène, de 2 heures en 2 heures, ainsi que nous les donnons ci-après pour l'éclipse du 5 septembre 1793; l'interpolation fait ensuite connaître aisément les données nécessaires au calcul de chaque observation.

| *Le 5 septembre à* | *10 h. du matin* | *midi* | *2 h. du soir.* |
|---|---|---|---|
| Long. vr. ☾ ...... $L =$ | $5^s\,12^\circ\,16'\,3''7$... | $5^s\,13^\circ\,15'\,15''8$... | $5^s\,14^\circ\,14'\,27''4$ |
| Latit. vr. ☾ ...... $\lambda = +$ | 34.31,7... | 39.58,9... | 45.23,6 |
| Mouv. hor. ....... $m =$ | 29.36,05.. | 29.35,92.. | 29.35,8 |
| Par. horiz. équ. .. $H =$ | 54. 6,8... | 54. 7,2... | 54. 8,2 |
| Demi-diam. ...... $R =$ | 14.44,74.. | 14.44,91.. | 14.45,05 |
| Long. ☉ moy .......... | $10^h\,59.46,57$.. | $11^h\,0.\,6,29$.. | $11^h\,0.26,0$ |
| Par. horiz. ☉ .......... | 8,42 | | |
| Demi-diam. ☉ .......... | 15.56,14 | | |
| Mouv. hor. ☉ ... $M =$ | 2.25,75 | | |
| Équ. du temps......... | 1.41,08...... | 1.42,71...... | 1.45,35. |

213. La précision à laquelle les tables lunaires sont portées maintenant permet de regarder comme exacts les élémens de ces calculs. Cependant il se peut que ces nombres soient affectés de légères erreurs; il est facile d'évaluer ces erreurs, et d'y avoir égard dans le calcul de la longitude; en sorte que l'observation des éclipses fournit des moyens de corriger les tables astronomiques.

En effet, soit $dT$ l'erreur commise sur T par le fait des tables, et en supposant l'observation exacte. La différentielle de l'équ. (3'), en faisant

$$a = \frac{3600}{m - M} \qquad (4)$$

est $$dT = a\,(d\alpha \pm d\varpi).$$

Or, l'équ. (1), $\alpha^2 = \Delta^2 - \lambda'^2$, donne

$$\alpha d\alpha = \Delta d\Delta - \lambda' d\lambda';$$

substituant dans l'équ. qui précède, on aura

$$dT = \frac{a}{\alpha}\,(\Delta d\Delta - \lambda' d\lambda' \pm \alpha d\varpi);$$

mais on tire de la 4ᵉ équ. (4), p. 273,

$$d\varpi = \sigma \sin h \sin (L - N)\, dH',$$

attendu que d'après la forme de cette équ., $\varpi$ ne change pas sensiblement quand $L - N'$ et $\varepsilon$, ou $\sigma$, n'éprouvent que de

très petites variations. Remettons ici $\frac{\varpi}{H'}$ au lieu du facteur de $dH'$, et nous aurons $d\varpi = \frac{\varpi}{H'} dH'$.

Enfin, on a $\lambda' = \lambda - \varpi'$, $\varpi'$ désignant la parallaxe de latitude, d'où $d\lambda' = d\lambda - d\varpi'$, ou, en raisonnant de même,

$$d\lambda' = d\lambda - \varpi' \frac{dH'}{H'};$$

donc notre valeur de $dT$ devient, en substituant ces différentielles,

$$dT = \frac{a}{\alpha}\left(\Delta d\Delta \mp \lambda' d\lambda + \frac{\varpi'\lambda' \pm \varpi a}{H'} dH'\right) \quad (5)$$
$$= A d\Delta - B d\lambda + C dH'.$$

Ici $d\Delta$, $d\lambda$, $dH'$, désignent les erreurs des tables sur la distance des centres (somme ou différ. des demi-diamètres), la latitude et la parallaxe horizontale de la Lune. Le signe + s'applique au commencement de l'éclipse, le signe — à la fin. Les coefficiens changent du premier contact au dernier, et l'on a deux valeurs différentes $dT$, $dT'$, qui sont les erreurs de T et T' causées par celles des tables.

Lorsque $d\Delta$, $d\lambda$ et $dH'$ seront connus, comme on va le dire, on aura les valeurs de $dT$ et $dT'$, et l'on corrigera d'autant les heures T et T', et par suite l'heure de la conjonction vraie et la longitude demandée.

Si, en un lieu, on a observé le commencement et la fin de l'éclipse, en considérant les deux observations comme exactes, il faut que l'heure de la conjonction vraie soit juste la même, soit qu'on la déduise de l'une, soit qu'on la tire de l'autre. Or, c'est ce qui n'a pas lieu, à cause des erreurs des tables; et $dT + dT'$ est la différence entre les temps de la conjonction déduits du commencement et de la fin de l'éclipse, différence connue. Ainsi on a une équ. de cette forme, où le premier membre et les coeff. sont donnés :

$$dT + dT' = (A + A')d\Delta - (B + B')d\lambda + (C + C')dH'.$$

Qu'on fasse les mêmes calculs et observations pour trois sta-

tions différentes, et l'on pourra tirer de là les trois inconnues $d\Delta$, $d\lambda$, $dH'$ ; et même si l'on a plus de trois observations, on calculera ces différentielles avec plus de précision, par la méthode des moindres carrés. (*V.* ci-après.) On pourra ainsi corriger les nombres des tables lunaires, et par suite les longitudes des stations.

Mais lorsqu'on n'a observé les deux contacts qu'en un seul lieu, voici ce qui arrive. Par exemple, pour Harefield, on trouve au premier contact

$$\log a = 0.3440350, \quad A = 2,248, \quad B = 0,422,$$

$$\varpi' = 28'8'',4 = 1688'',4, \; \frac{a\varpi'\lambda'}{\alpha H'} \tang \psi = 0,220, \; \frac{a\varpi}{H'} = 1,337;$$

d'où $\quad dT = 2,25 d\Delta - 0,42 d\lambda + 1,56 dH'.$

Le temps moyen de la néoménie pour Harefield est donc

$$23^h 54' 9'',39 + 2,25 d\Delta - 0,42 d\lambda + 1,56 dH'.$$

Le 2$^e$ contact fait trouver de même pour l'heure de la conjonction vraie,

$$23^h 54' 7'',10 - 2,25 d\Delta + 0,35 d\lambda + 0,13 dH'.$$

La moyenne entre ces deux résultats est

$$23^h 54' 8'',24 - 0,03 d\lambda + 0,84 dH'.$$

$d\Delta$ n'entre plus ici, en sorte que l'erreur due aux demi-diam. est nulle. Le coefficient de $d\lambda$ est si petit, qu'une erreur de 20'' sur la latitude des tables lunaires serait sans influence sensible sur le résultat du calcul. Les erreurs sur la parallaxe H' laissent une incertitude qui peut s'élever à 5''.

En calculant les coefficiens des erreurs pour l'observation de la fin de l'éclipse à Gotha, on trouve

$$A = 2,2146, \quad B = 0,1649;$$

$$\frac{a\varpi'\lambda'}{\alpha H'} = 0,1249, \quad \frac{a\varpi}{H'} = 0,0326.$$

Ainsi, le temps moyen de la conjonction pour cette station est

$$0^h 38' 48'',26 - 2,21 d\Delta + 0,16 d\lambda - 0,09 dH'.$$

On peut donc présumer la petitesse de l'erreur de la longitude obtenue par notre opération, en estimant les valeurs de $d\Delta$, $d\lambda$ et $dH'$.

214. *A l'aide des occultations d'étoile par la Lune.*

Ces phénomènes donnent lieu aux mêmes calculs à peu près que les éclipses de Soleil, et comme les observations sont sujettes à moins d'incertitude, on arrive à des résultats plus précis encore : seulement, la latitude vraie de l'étoile se confond avec l'apparente; il en est de même de la longitude, parce qu'il n'y a pas de parallaxe. $\varpi = H' = o$; le diamètre est nul, ainsi que le mouvement horaire, $M = r = o$.

Soit donc $a$ une étoile (fig. 27), $c$ le centre de la Lune à l'instant où elle éclipse l'étoile; P le pôle de l'écliptique, dont AB est un arc; on a $ac = \Delta =$ distance de l'étoile au centre apparent de la Lune $=$ demi-diam. apparent $R'$; $ab$ est un arc de parallèle à l'écliptique, et l'on a $AB = \alpha =$ différ. des longitudes apparentes. Or, en désignant par $\nu$ la latitude $Aa$ de l'étoile, on a $ab = AB \cos \nu$, ou $ab = \alpha \cos \nu$. Dans le triangle rectangle $acb$, considéré comme rectiligne, on a $bc = \delta =$ différ. des latitudes apparentes, $ab = \alpha \cos \nu$, et $\alpha^2 \cos^2 \nu = \Delta^2 - \delta^2$; d'où

$$\alpha = \frac{\sqrt{(\Delta + \delta)(\Delta - \delta)}}{\cos \nu}. \quad (6)$$

L'équ. (3), p. 312, en faisant $p = M = o$, devient

$$T = \frac{3600''}{m}(\alpha \pm \varpi), \quad (7)$$

$+$ se rapportant à l'immersion de l'étoile, et $-$ à l'émersion.

On calculera donc, comme précédemment, la position du nonagésime, ou N et $h$, pour l'instant de l'éclipse observée, puis les parallaxes de la Lune en longitude et latitude, et le demi-diamètre apparent $\Delta = R'$, par les équ. de la p. 293; les longitude et latitude de l'étoile, en ayant égard à la précession, nutation, etc. (n° 74). On aura la différence $\delta$ des latitudes ap-

parentes, et les équ. précédentes donneront l'heure moy. du lieu à l'instant de la conjonction vraie.

En répétant ces calculs pour un autre lieu, où une pareille observation a été faite, on aura de même l'heure moy. de ce lieu qui répond à la conjonction vraie. La différ. de ces heures est celle des méridiens.

Et même on peut, comme précédemment, tenir compte, dans cette évaluation, des erreurs des tables de la Lune, et les calculer pour corriger ces tables et la différ. des longitudes des stations; mais alors les observations de la même éclipse auront dû être faites en trois lieux au moins.

Comme on peut calculer l'heure de Paris où se fait la conjonction vraie, en opérant comme si l'on voulait trouver l'heure d'une syzygie (n° 86), on saura déterminer, par une seule immersion ou émersion observée en un lieu, sa longitude rapportée au méridien de Paris, sans avoir besoin qu'une semblable observation ait été faite en cette ville, et même quand il n'aurait pas été possible de la faire; mais alors on ne peut plus corriger le résultat des erreurs des tables.

215. Il faut observer que, dans les occultations, la latitude lunaire $\lambda'$ peut s'élever jusqu'à 6°, et que le calcul n'est plus exact lorsqu'on y regarde les arcs $\lambda'$ et $\frac{1}{2}(\lambda - \xi)$ comme se confondant avec leurs sin. ou tang. En recourant au n° 97 d'où l'on a tiré $\lambda' =$ etc., p. 293, on voit qu'il faut employer ici, au lieu de cette formule, la cinquième équ. (E), page 134, savoir :

$$\text{(8)} \qquad \tang \lambda' = 2\sigma \sin \tfrac{1}{2}(\lambda - \xi) \cos \tfrac{1}{2}(\lambda + \xi) \cos \varpi.$$

216. Prenons pour exemple les observations suivantes du 27 mars 1792, de l'occultation d'Aldébaran. L'immersion a été vue à Paris à $8^h\,55'\,55'',4$ t. vr., l'émersion à $9^h\,30'\,58'',8$ : la première a aussi été vue à Altburg à $9^h\,20'\,31'',42$ ; on demande la longitude de cette dernière ville (*).

(*) Comme les exemples que nous proposons ici remontent à des temps où les tables lunaires de Bürg, de Burckhardt et de M. Damoiseau, n'étaient pas publiées, nous devons dire qu'aujourd'hui les calculs seraient plus exacts.

Commençons par tirer de la *Conn. des Tems* de 1792, ou mieux encore des tables astronomiques, les données du problème.

| 27 *mars* 1792 | | *à* 9^h^ *t. moy.* | *à* 10^h^ *t. moy.* |
|---|---|---|---|
| Longit. vr. ☾ ...... | $L =$ | 67°21′11″0 ........ | 67°57′16″0 |
| Latit. vr. ☾ ........ | $\lambda =$ | − 4.45. 1,9 ........ | − 4.46.15,5 |
| Mouv. horaire ...... | $m =$ | 30. 5,1 ........ | 30. 4,02 |
| Parall. horiz. équat. | $H =$ | 54.41,75 ........ | 54.42,55 |
| Demi-diam. vr. ..... | $R =$ | 14.52,90 ........ | 14.53,44 |
| Équ. du temps ..... | + | 5. 7,72 ........ | + 5. 6,95 |
| Latit. Aldébaran .... | $\nu =$ | − 5.29. 4,6. | |

| | |
|---|---|
| On a trouvé que l'immersion a eu lieu à ..... | 8^h^55′55″4 t. vr. |
| Équ. du temps ......... | 5. 7,72 |
| H. moy. de l'immersion. | 9. 1. 3,12. |

On a pour cet instant

| | |
|---|---|
| $L =$ 67°27′42″6 | $\lambda = -$ 4°45′ 3″2 |
| $m =$ 30. 5,10 | $H =$ 54.41,75 |
| $R =$ 14.52,90 | $l =$ 48.50.14 |
| Longit. moy. ☉ = 0^h^23.50,50 | $s =$ 9^h^24.53,62. |

Équ. (2), p. 292.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | $\mu$ ........ | $\bar{3}$.52288 |
| $(1-\mu)^2$ ..... $\bar{1}$.9970999 | $H =$ 54′41″75 ........... | | 3.51610 |
| tang $l$ ...... 0.0583460 | − 6,16 | $\sin^2 l'$ .... | $\bar{1}$.75089 |
| tang $l'$ ....... 0.0554459 | $H' =$ 54.35,59 | 6″,16 ..... | 0.78987 |

$l' =$ 48° 38′ 51″,16.

*Position du nonagésime.*

Équ. (3), p. 292.

| | | |
|---|---|---|
| cot $l'$ ....... 9.9445542 | sin ...... 9.8984651 | cos ..... 9.7861430 |
| sin $s$ ........ 9.7967721 | tang $s$ ... 9.9049036 − | sin $l'$ ... 9.8754430 |
| tang $\varphi$ ....... 9.7413263 | sin $\varphi$ .. − 9.6837201 | cos $\varphi$ . − 9.9423872 |
| $\varphi =$ 28°51′52″ | tang N .. 0.1196486 − | cos $h$ ... 9.7191988 |
| $\omega =$ 23.27.48 | N = 127°12′19″6 | $h =$ 58°24′37″,3 |
| $\varphi + \omega =$ 52.19.40 | L = 67.27.42,6 | |
| | L − N = − 59.44.37,0. | |

*Longit., latit. et demi-diam. apparens ☾.*

Équ. (4), p. 292.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,5 .......... | $\bar{1}$.6989700 | | | 2 ...... | 0.3010300 |
| H′ .......... | 3.5152872 | .............. | 3.5152872 | cos λ ... | 9.9985053 |
| sin h ......... | 9.9303487 | cos h .... | 9.7191988 | $\sin^2$ .... | 9.6959896 |
| cos (L − N) .. | 9.7023187 | ξ ....... | 3.2344860 | | $\bar{1}$.9955249 |
| cos λ ...... − | 9.9985053 | ξ = | 28′ 35″80 | log σ = | 0.0044751 |
| ε .......... | 2.8484193 | λ = − | 4.45. 3,20 | | |
| ε = | 11′ 45″37 | Som. = − | 4.16.27,40 | $\frac{s}{2}$ = − | 2° 8′ 13″7 |
| 45° − ε = | 44.48.14,63 | Diff. = − | 5.13.39,00 | $\frac{1}{2}$ = − | 2.36.49,50 |

Équ. (8), p. 321.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| H′ .......... | 3.5152872 | 3σ ....... | 0.3055051 | σ ...... | 0.0044751 |
| σ .......... | 0.0044751 | sin ...... | 8.6589903 − | R ...... | 2.9508028 |
| sin h ........ | 9.9303487 | cos. .... | 9.9996978 | cos λ′ .. | 9.9981665 |
| sin (L − N) .. | 9.9364028 − | cos ϖ .... | 9.9999698 | cos ϖ ... | 9.9999698 |
| ϖ .......... | 3.3865138 − | tang λ′ ... | 8,9641630 − | R′ ..... | 2.9534142 |
| ϖ = − | 40′ 34″,87 | λ′ = − | 5° 15′ 39″42 | R′ = Δ = | 14′ 58″,28. |
| | | ν = − | 5.29. 4,60 | | |

Équ. (6), p. 320.

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | λ′ − ν = | 13.25,18 |
| | | Δ = | 14.58,28 |
| | 3.2313319 ... | Som. = | 28.23,46 |
| | 1.9689497 ... | Diff. = | 1.33,10 |
| | 5.2002816 | | |
| Moitié ... | 2.6001408 | | |
| cos ν .... − | 9.9980072 | | |
| α ......... | 2.6021336 ..... | α = | 6′ 40″07 |
| | | ϖ = − | 40.34,87 |
| | | k = − | 33.54,80 |
| | | | − 1^h 7′ 38″ 12 = T. |

Équ. (7), p. 320.

| | |
|---|---|
| 3600 ... | 3.5563025 |
| k ..... | 3.3085217 − |
| m .. − | 3.2565013 |
| T ..... | 3.6083229 − |

Temps moy. de l'immersion. 9. 1. 3,12

Conjonction vraie à ......... 7.53.25,00 t. moy. de Paris.

Voici maintenant le calcul pour l'émersion :

| | |
|---|---|
| T. vrai de l'observation ............... | 9h30′ 58″8 |
| Équ. du temps ....................... | 5. 7,26 |
| Temps moyen de l'émersion à Paris ..... | 9.36. 6,06. |

Pour cet instant, $L = 67°45'17''0$ $\lambda = -4.45.45,58$
$m = 30.\ 5,00$ $H = 54.42,23$
$R = 14.53,10$
Longit. ⊙ moyen $= 0^h23.56,26$ $s = 10^h10.\ 2,27$
$N = 133°33'21''7$ $L - N = -65°48'\ 4''7$ $h = 56.\ 8.42,6$
$\varpi = -41.42,0$ $\lambda' = -5.17.44,4$ $R' = 14.57,17.$

On trouve enfin que la conjonction vraie s'est faite à $7^h\,53'\,24'',11$ t. moy. de Paris.

Calculons maintenant la conjonction vraie de la Lune et d'Aldébaran, d'après l'immersion observée à Altburg, à. . . . . . . . $9^h20'31''42$

| | |
|---|---|
| Équ. du temps. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | 5. 7,52 |
| Heure moy. de l'observation. . . . . . . . . . . | 9.25.39,14 |
| Longitude comptée de Paris. . . . . . . . . . . . | — 25.29,80 |
| Heure moy. de Paris. . . . . . . . . . . . . . . . . | 9. 0. 9,34. |

Dans ces opérations, on est toujours supposé connaître la longitude du lieu par estime, et l'on a pour objet de l'avoir avec plus d'exactitude. Lorsque le résultat du calcul montre que l'estime était trop éloignée de ce résultat, on refait l'opération, en prenant celui-ci pour point de départ.

On trouve pour l'heure dont il s'agit :

$L = 67°27'15''6$ $\lambda = -4°45'\ 2''1$
$m = 30.\ 5,1$ $H = 54.41,75$
$R = 14.52,9$ $l = 48.43.26,0$
Longit. ⊙ moy. $= 0^h23.50,35.$ $s = 9^h49.28,15$
Le calcul donne $l' = 48°32'\ 2''8$ $H' = 0°54.35,61$
$N = 131°41'55''6$ $L - N = -64°14'40''$ $h = 56.57.38,3$
$\varpi = -41.36,67$ $\lambda' = -5.16.28,73$ $R' = 0.14.57,32.$

| | |
|---|---|
| L'heure de la conjonction vr. est donc, en t. moy. d'Altburg. | $8^h18'48''36$ |
| Celle qu'on tire de l'immersion en temps de Paris est. . . . . . | 7.53.25,00 |
| Longitude d'Altburg à l'est de Paris. . . . . . . . . . . . . . . . . . . . | — 25.23,36. |

Si nous voulons tenir compte des erreurs des tables, le calcul nous donnera (*v.* p. 317) pour l'immersion à Paris

$$A = \frac{a\Delta}{\alpha} = 4,59, \quad B = \frac{a\lambda'}{\alpha} = 4,104,$$

$$\frac{a\varpi'\lambda'}{H'} = 2,30, \quad \frac{a\varpi}{H'} = -1,48, \quad C = +0,82.$$

Ainsi l'heure moyenne de Paris pour la conjonction vraie déduite de l'immersion, est

$$7^h 53' 25'',00 + 4,59\, d\Delta - 4,104\, d\lambda + 0,82 dH'.$$

En opérant de même pour Altburg, on trouve

$$8^h 18.48,36 + 3,70 d\Delta - 3,12 d\lambda + 0,28 dH',$$

d'où résulte pour la longitude cherchée

$$25' 23'',36 - 0'',89 d\Delta + 0,98 d\lambda - 0,54 dH'.$$

Comme les coefficiens sont ici fort petits, on voit que les erreurs des tables sont sans importance, et que la longitude d'Altburg est sensiblement 25′23″. Mais pour tirer un meilleur parti de ce calcul, il conviendrait de déterminer les erreurs $d\Delta$, $d\lambda$ et $dH'$, et d'en substituer ici les valeurs. Or, cette détermination supposerait qu'on a fait l'observation de l'éclipse en trois lieux du globe au moins.

L'heure de la conjonction vraie déduite de l'émersion à Paris, est, en temps moyen de cette ville,

$$7^h 53' 24'',11 + 3,08 d\Delta - 2,35 d\lambda + 2,89 dH';$$

ainsi $$0'',89 + 1,51 d\Delta - 1,75 d\lambda - 2,07 dH' = 0.$$

Deux autres équ. semblables, tirées d'observations faites en lieux différens, suffiront pour faire trouver les valeurs des inconnues $d\Delta$, $d\lambda$ et $dH'$, et par suite corriger la longitude d'Altburg.

217. On est dans l'usage de calculer les occultations, comme nous venons de le faire, par les longitudes et latitudes; mais il est plus court de se servir des asc. dr. et déclin. En effet, d'un côté les catalogues d'étoiles, et les calculs de nutation, aberration . . ., sont toujours en asc. dr. et déclin., ce qui force d'assigner préalablement les longit. et latit. par une première opération (v. p. 52). D'un autre côté, les coordonnées lunaires apparentes supposent le nonagésime connu de position, ce qui force de faire un autre calcul préliminaire. Les asc. dr. et déclin. sont donc d'un usage plus facile. Cependant, on doit

dire que les formules de parallaxes sont moins convergentes, parce que les déclin. peuvent aller à 28°, tandis que la latitude ne dépasse guère 5°. D'ailleurs, il n'est pas nécessaire de mettre beaucoup de précision au calcul du nonagésime, tandis qu'il faut avoir les asc. dr. et déclin. exactes aux 10es de seconde.

Du reste, le calcul se fait absolument de même que les précédens. P (fig. 27) représente le pôle de l'équateur dont AB est un arc, AB $= \alpha$ différ. des asc. dr. à l'instant où le centre de la Lune est en $c$, $a$ est l'étoile, $ac = \Delta$ dist. appar. des astres $=$ R' $=$ demi-diam. app. de la Lune, $\nu = Aa =$ déclin. de l'étoile, $\pi =$ parallaxe lunaire en asc. dr. obtenue par les équ. p. 130, ainsi que celle $\pi'$ de déclin.

Une fois que l'on a trouvé l'heure moy. du lieu à l'instant de la conjonction vraie de la Lune avec l'étoile, les asc. dr. et déclin. et les mouvemens horaires de la Lune pour cette heure (v. p. 99), on traduit ces données vraies en apparentes par les formules des parallaxes. Alors les théories précédentes s'appliquent à ces coordonnées, et l'on sait trouver l'inconnue de la question.

Par exemple, supposons qu'on ait observé l'occultation de $\alpha$ Taureau par la Lune, le 5 octobre 1830, à 10h 32' 45" t. vr., ou 10h 21' 9" t. moy. : on trouve d'abord pour l'étoile

$$Æ\star = 4^h\,10'\,10'',46 = 62°\,32'\,36'',9, \quad \nu = +\,15°\,12'\,39'',0,$$

et pour la Lune (par la *Conn. des Tems*)

$$Æ☾ = 61°\,43'\,59''\,26, \quad D = +\,15°\,39'\,27'',23,$$
$$P = -\,4^h 49.26,1 = -\,72°\,21'\,31''\,3, \quad l' = 48°\,38'\,27''\,6,$$
$$R = 16.24,2, \quad m = 37.13,73, \quad H = 60.13,3, \quad H' = 60'6'',62.$$

Le calcul donne pour les parall. en asc. dr. et en déclin. (v. page 139)

$$\pi = -\,36'\,26''\,36, \qquad \pi' = 40'\,31''\,64;$$

d'où $\quad Æ' = 61°\,7.32,90, \qquad D' = 14°\,58.55,59.$

Le demi-diam. apparent est R' $=$ 16.30,92.

D'après ces données, on obtient $\quad \delta =$ 13.43,41.

$$R' + \delta = 30'\,14''\,33 \;\ldots\ldots\ldots\; 3.2587163$$
$$R' - \delta = 2.47,51 \;\ldots\ldots\ldots\; 2.2240407$$
$$\overline{\quad 5.4827570 \quad}$$

| | | |
|---|---|---|
| | Numérateur = moitié........ | 2.7413785 |
| | cos $\nu$........ — | 9.9845124 |
| $\alpha =$ | 9′31″30 = 571″,30........ | 2.7568661 |
| $a =$ | — 36.26,36 | |
| | — 26.55,06 ................ | 2.2081887 — |
| | 3600″.... | 3.5563025 |
| | $m$...... — | 3.3490307 |
| T = | — 4′20″29 = — 260″,29.. | 2.4154605 — |
| | 10.21. 9,0 = heure moy. de l'immersion. | |
| | 10.16.48,7 = heure de la conjonction vraie. | |

## *Sur le lever, le coucher et l'amplitude.*

218. *Trouver l'heure du lever et du coucher d'une étoile, ainsi que son amplitude ortive ou occase.* Le méridien est $pzn$ (fig. 35), $z$ le zénith, $p$ le pôle, $pzn$ le supplément de la latitude $l$ du lieu, $pzn = 180^\circ - l$, ou $pz = 90^\circ - l$; l'angle $n$ formé avec l'horizon $nqa$ est droit, $a$ est le point oriental ou occidental, à $90^\circ$ de $n$; $q$ est l'astre à son lever ou à son coucher; $pq$ est la distance polaire $d$, complément de la déclin. D, $pq = d = 90^\circ - \mathrm{D}$; $nq$ est l'azimuth, $aq = x$ est l'amplitude ortive ou occase, $nq = 90^\circ - x$.

En résolvant le triangle sphérique rectangle $pnq$, on trouve les formules suivantes (*v.* équ. $q$, $m$ et $s$, page 5):

$$\cos p = -\operatorname{tang} l \operatorname{tang} \mathrm{D}, \qquad (1)$$

$$\sin \mathrm{D} = -\cos l \sin x, \qquad (2)$$

$$\cot x = \sin l \operatorname{tang} p. \qquad (3)$$

$p$ est ce qu'on nomme l'*arc semi-diurne;* étant converti en temps, $p$ exprime la demi-durée sidérale du séjour de l'étoile au-dessus de l'horizon, ou le temps qu'elle emploie à aller de l'horizon au méridien, et réciproquement. Comme Æ✱ est l'heure sidérale du passage de l'étoile au méridien, Æ✱ $\pm p$ est celle du lever quand on prend le signe —, et celle du coucher avec +. On en tire aisément l'heure vraie ou moyenne du phénomène (nº 110), qui est

$$\textit{heure solaire} = Æ\star \pm p - Æ\odot \;(\text{ou} + \odot\Upsilon). \qquad (4)$$

L'équ. (1) fait donc connaître l'heure du lever ou de coucher de l'étoile; (2) ou (3) donne ensuite l'amplitude $x$.

Lorsqu'on a fait ces calculs pour une latitude $l$ déterminée, les résultats ne conviennent qu'aux pays qui sont sur le même parallèle à l'équateur; mais on peut les corriger pour les rendre propres aux lieux voisins. En effet, la différentielle de l'équ. (1) donne

$$dp = \frac{-2dl}{\sin 2l \tang p}.$$

$l$ est la latitude pour laquelle le calcul avait été fait, $dl$ le changement que cette latitude a éprouvé, $p$ l'angle horaire trouvé, $dp$ la correction qu'il doit subir.

A l'aide de cette formule, on pourra transporter aux lieux voisins du parallèle de Paris, les heures données dans la *Conn. des Tems*, pour le lever et le coucher du Soleil et de la Lune en cette ville.

219. *Les heures du lever et du coucher du Soleil, ainsi que son amplitude*, se tirent aussi de ces équ., en y prenant pour D la déclin. de l'astre à cet instant. Mais comme l'heure dont il s'agit est précisément ce qu'on cherche, cette déclin. n'est pas connue: on en prend la valeur à peu près, attendu que ses changemens sont très lents, et l'on fait le calcul avec cette quantité approchée. Il faut ensuite le refaire avec une déclin. plus exacte, lorsqu'on a trouvé l'heure demandée avec une approximation suffisante.

L'opération est la même *pour la Lune et les planètes*. On emploie dans les équ. la déclin. de l'astre à l'instant de son lever ou de son coucher, déclin. variable dont on estime la grandeur pour l'heure à laquelle on suppose une valeur approchée. On rectifie ensuite le calcul, en le recommençant avec la déclin. qui convient à l'heure obtenue, heure plus exacte que la première.

Une fois l'arc semi-diurne $p$ déterminé, en le réduisant en temps, et l'ajoutant pour le coucher à l'heure sid. du passage

au méridien, ou le retranchant de cette heure, pour le lever, on a l'heure sid. demandée, qu'on exprime ensuite en temps solaire.

Quelle est l'heure du lever du Soleil le 10 août 1830, à Paris? En prenant la déclin. de 5h du matin, D = 15° 45′ 15″, on trouve

| | | | |
|---|---|---|---|
| tang $l$...... | 0.0583460 — | ........... | 0.0583460 — |
| tang D...... | 9.4504149 | D=15° 45′26″. | 9.4505036 |
| cos $p$...... | 9.5087609 — | cos $p$... | 9.5088496 + |
| $p$ = | 108° 49′ 30″ | $p$ = | 108° 49′ 43″ |
| = | 7h 15.18 | = | 7h 15.18,9 |
| Comp. à 12h = | 4.44.42 t. vr. | comp. = | 4.44.41 t. vr. |
| Heure du lever... | 1re approximat. | | 2e approximat. |

La première valeur obtenue pour $p$ conduit à la déclin. D = 15° 45′ 26″, avec laquelle on a fait le calcul, comme on le voit ici. On obtient donc l'heure vraie du lever du Soleil, puisqu'à cette heure l'angle horaire de cet astre était $p$. (*V.* n° 222.)

Trouver l'heure du coucher de la Lune le 27 août 1830, à Paris. On a trouvé (page 160) que l'asc. dr. de l'astre, à l'instant où il est au méridien, est = 17h 6′ 37″,55; c'est l'heure sid. de son passage. En comparant la situation de la Lune au temps vrai du coucher, on reconnaît que l'heure de ce phénomène ne doit pas beaucoup différer de minuit. Prenons dans la *Conn. des Tems*, la déclin. ☾ à cet instant, savoir, D = 17° 53′ A. On a

| | | | |
|---|---|---|---|
| tang $l$.... | 0.0583460 — | H. sid......... | 21h 40′ 0″ |
| tang D... | 9.5087586 — | Æ☉ m. (n° 110) — | 10.20.49 |
| cos $p$..... | 9.5671046 + | | 11.19.11 |
| $p$ = | 68° 20′ 31″ | (Table I)...... | — 1.51 |
| Arc semi-diurne. = | 4h 33.22 | H. m. du couch. | 11.17.20 |
| H. sid. du pass.. = | 17. 6.38 | — Équ. du temps.. | — 1.18 |
| H. sid. du couch. = | 21.40. 0 | H. vr. du couch. | 11.16. 2. |

Il est bien facile maintenant de recommencer le calcul en employant la déclin. pour 11h 16′, et ayant même égard aux diff. secondes. Nous ne pousserons pas plus loin cette re-

cherche, qui d'ailleurs va se rétablir avec une plus grande précision.

On opère absolument de même pour trouver l'heure du lever et du coucher des planètes; mais comme il arrive rarement que la déclin. de ces astres varie beaucoup, on peut les considérer le plus souvent comme des étoiles dont l'asc. dr. et la déclin. sont connues et invariables dans la courte durée qu'on embrasse, ce qui ramène la question au cas du n° 218.

220. Dans tout ce qui vient d'être exposé, on n'a pas tenu compte de la réfraction, ni de la parallaxe; c'est ce que font ordinairement les marins, qui ne comptent pas que leurs observations de levers et de couchers soient assez exactes, pour avoir besoin de plus de précision. Ils ont des tables construites sur les diverses latitudes $l$, et les déclin. D, et ils en tirent à vue la valeur approchée de l'arc semi-diurne en temps, qui convient à la latitude où ils sont, et à la déclin. actuelle de l'astre qu'ils observent; ils ont donc par suite l'heure du lever et celle du coucher. Et comme ces tables renferment en outre l'azimuth ou l'amplitude de l'astre, ils obtiennent aussi la grandeur de cet arc.

Mais on comprend que les résultats ainsi obtenus sont assez inexats, puisque la réfraction horizontale élève les astres d'environ 33′ 45″; d'un autre côté, la parallaxe horizontale les abaisse, sinon pour les étoiles qui n'éprouvent pas cet effet, du moins pour le Soleil, la Lune et les planètes. Cet abaissement apparent est de 8″,6 pour le Soleil, et de 1° pour la Lune, plus ou moins, selon la distance à la Terre. On ne peut donc négliger des effets aussi considérables, dès qu'on veut obtenir des résultats précis (*).

Quoiqu'il soit rare que les astronomes aient besoin de connaître exactement l'heure du lever ou du coucher des astres,

(*) Selon M. Bessel, la parallaxe horizontale de la Lune a pour valeur moyenne 57′, et la réfraction horizontale 36′. Ainsi, le Soleil et les planètes sont 36′ au-dessus de l'horizon lorsqu'ils semblent se lever ou se coucher, et la Lune est 21′ au-dessus.

nous en exposerons la théorie; c'est celle dont se servent les calculateurs de la *Conn. des Tems*, pour obtenir les heures vraies qui y sont indiquées. Seulement ils ne poussent pas les opérations jusqu'à la précision des secondes, qui serait inutile ici, attendu que les heures dont il s'agit ne servent guère qu'à faire juger si un astre est sur l'horizon de Paris, lorsqu'il arrive quelque phénomène qu'on veut observer. Par exemple, on sait si le Soleil ou la Lune est sur l'horizon à l'instant d'une occultation d'étoile ou d'une éclipse d'un satellite de Jupiter.

221. Lorsqu'un astre est arrivé en un point $i$ (fig. 35) sous l'horizon $nqa$, cet astre nous paraît être dans ce plan, quand l'arc $qi$ est égal à

$$K = \textit{réfr. horiz.} - \textit{parall. horiz.}$$
$$= 33' 45'' - \textit{parall. horiz.}$$

On fera cette parallaxe nulle pour les étoiles : s'il s'agit du Soleil, on prendra cette différ. ou $K = 33' 37''$ : enfin, pour la Lune, il faudra calculer la parallaxe horizontale équatoriale qui convient à l'heure vr. du lever ou du coucher, et la réduire à celle qui convient à la latitude $l$ du lieu (n° 94).

Nous regardons la réfraction horizontale comme conservant la valeur constante 33′ 45″, quoiqu'elle varie, non-seulement avec la température et la pression atmosphérique, mais aussi avec d'autres causes dont l'influence n'est pas encore bien connue, et qui agissent sur la lumière d'une manière, en apparence, fort irrégulière. Mais nous adoptons un terme moyen entre toutes les valeurs de réfraction horizontale observées, parce que ce terme suffit au genre d'opération dont il s'agit ici, qui n'est pas de nature à exiger une grande précision. Le calcul serait d'ailleurs de même forme, pour toute autre valeur de la réfraction horizontale.

L'azimuth de l'astre est celui du point $q$ de section du vertical $zqi$ avec l'horizon, ou l'arc $nq$; l'arc semi-diurne mesure l'angle $zpi$ qu'il s'agit de calculer. Or, les trois côtés du triangle sphérique $zpi$ sont connus, savoir : $pz = 90° - l$,

$pi =$ distance polaire $d$, compl. de la déclin. D; $pi = d = 90° - D$; enfin, $zi = zq + qi = 90° + K$. Résolvons ce triangle pour en tirer l'angle $p$ : c'est la formule de l'angle horaire, p. 181, où l'on fait $z = 90° + K$, et $c = 90° - l$. On trouve

$$2m = l + d + K,$$

$$\sin^2 \tfrac{1}{2} p = \frac{\sin m . \cos (m - K)}{\sin d \cos l}.$$

Pour faire usage de ces équ., on tire de la 1[re] la valeur de $m$, et on la substitue dans la 2[e]; mais il faut avant tout que la déclin. D soit connue, ce qui n'offre aucune difficulté pour les étoiles, et même pour plusieurs planètes dont la déclin. se conserve presque constante durant un assez long temps, ou au moins en $24^h$. Mais lorsque cette déclin. varie sensiblement d'une heure à l'autre, ainsi que cela arrive au Soleil, et surtout à la Lune, comme il faut employer dans les formules la déclin. pour l'heure qu'on cherche, on la calcule pour cette heure grossièrement évaluée, chose très facile d'après ce qui a été dit ci-devant. Et lorsqu'on a trouvé l'angle $p$, l'arc semi-diurne fait connaître avec plus d'exactitude l'heure du lever ou du coucher, et l'on refait l'opération avec cette donnée. On peut même ainsi avoir toute l'exactitude désirable, en refaisant le calcul jusqu'à ce qu'on y ait employé la déclin. que l'astre a réellement à l'heure dont on trouve la valeur.

222. Trouver l'heure du lever du Soleil au Caire, le 10 août 1830. Il est facile de présumer par l'équ. (1) du n° 219, ou mieux encore par une table des arcs semi-diurnes, telle qu'il en existe dans divers ouvrages, que le lever a lieu vers $5^h 23'$ du matin. C'est ce qu'il s'agit de vérifier et de corriger, s'il y a lieu.

La longitude du Caire est environ $1^h 56'$ à l'est de Paris; ainsi, on compte en cette dernière ville $3^h 27'$ du matin, lorsque le Soleil est supposé se lever au Caire : c'est $8^h 33'$ avant midi. La var. diurne en déclin. est. $17' 22''$

| | |
|---|---|
| | 17.22 |
| On trouve 43″,42 de changement par heure; | 8.41 |
| ce qui fait 371″ en $8^h 33'$. | 43″25‴. |

| | | |
|---|---|---|
| Ainsi, déclin. ☉ le 10 à midi | ............. | 15° 40′ 11″ |
| variation | ..................... | + 6.11 |
| déclin à $3^h$ 27′ du matin à Paris. D = | | 15.46.22. |

Nous ajoutons la variation, parce que la déclin. croît en s'éloignant en avant de midi.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $l =$ | 30° 3′ 20″ .... | cos. .... | 9.9372872 | |
| $d =$ | 74.13.38 .... | sin. .... | 9.9833318 | |
| $k =$ | 33.37 | | | |
| $2m =$ | 104.50.35 | | — 9.9206190 | |
| $m =$ | 52.25.17 .... | sin. .... | 9.8990087 | |
| $m - k =$ | 51.51.40 .... | cos. .... | 9.7907061 | |
| | | | 19.7690958 | |
| | | sin. .... | 9.8845479 | $\frac{1}{2}p =$ 50° 2′ 46″5 |
| | | arc semi-diurne (8 fois). | | $p =$ $6^h$40.22,2 |
| | Compl. à $12^h$, heure vraie du lever.... | | | = 5.19.37,8. |

La supposition qu'on a faite que le Soleil se levait à $5^h$ 23′ est donc trop forte de 3′ 22″; mais cette erreur est sans importance, puisque dans cette durée la déclin. ne change que de 2″. Ainsi, l'heure obtenue est aussi exacte que le comporte ce genre de recherches. On peut au reste refaire le calcul, en se servant de la déclinaison du Soleil à l'heure qui vient d'être trouvée, répondant à $3^h$23′45″ du matin à Paris. La déclin. est alors 15°46′24″,6; on trouve $\frac{1}{2}p = 50°2′41″,4$, $p = 6^h40′21″,5$. Ainsi, le Soleil se lève au Caire à $5^h$19′38″,5.

En appliquant l'arc semi-diurne au temps écoulé depuis midi, on trouve que le Soleil se couche à $6^h$40′21″,5, mais cela ne serait pas exact, parce que la déclin. du Soleil change un peu du matin au soir; cependant on peut se servir de ce résultat comme d'une première approximation pour procéder, comme il a été dit, à un calcul plus juste. Comme dans ces opérations on n'exige que la précision des minutes, on est dans l'usage d'employer comme constante la déclin. du Soleil à midi, et d'appliquer l'arc semi-diurne $p$ qu'on obtient tant au lever qu'au coucher. Cependant, près des équinoxes, ce procédé peut donner une erreur de près d'une minute de temps.

223. On opère de même pour trouver l'heure du lever ou du coucher de la Lune; mais le calcul est plus long, parce que la déclin. variant très rapidement, il est nécessaire de la déterminer pour l'heure même du lever ou du coucher, qui est inconnue, et cela en ayant égard aux différ. secondes. Observez qu'ici la parallaxe surpasse la réfraction, et que K prend le signe —.

Il faut donc calculer d'abord l'heure du passage de la Lune au méridien (n° 120); puis évaluer à peu près l'heure du lever ou du coucher de l'astre, afin d'en conclure sa déclin. approchée pour cet instant, ainsi que la parallaxe horizontale. L'équ. du n° 218 donne ensuite une valeur de l'angle semi-diurne $p$, relative aux données qui ont servi : enfin, on corrige ces données en prenant, pour l'heure trouvée, des valeurs plus exactes de la déclin. et de la parallaxe horizontale pour la latitude du lieu (n° 94).

Trouver l'heure du coucher de la Lune le 27 août 1830 à Paris? On a obtenu (n° 120) $17^h 6' 37'',55$ pour l'heure sid. du passage de cet astre au méridien. Prenons $11^h 15'$ temps vrai pour l'heure du coucher; car on a vu, p. 329, que ce résultat doit s'éloigner peu de celui qu'on cherche. Calculons donc la déclin. et la parallaxe horizontale de la Lune pour $11^h 15'$ t. vr., mais cette fois sans tenir compte des différ. secondes, ni de l'aplatissement de la Terre. Nous aurons $38' 42''$ de var. en déclin. pour $12^h$, ce qui fait $3' 13'',5$ par heure, et

| | | |
|---|---|---|
| par conséquent $2' 25''$ en $45'$ .......................... | — | $2' 25''$ |
| Déclin. ☾ à minuit. ............ | | 17°52.51 A |
| Déclin. ☾ à $11^h 47'$ du soir.. | D = | 17.50.26 A |

On trouve à peu près $55' 18'',5$ de parallaxe horizontale, à cette même heure. Voici le reste de l'opération.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $l =$ | 48°50′14″ .... | cos.... | 9.8183582 | | |
| $d =$ | 107.50.26 .... | sin.... | 9.9785972 | Réfr. = | 33′45″ |
| K = | − 21.34 | | | —Parall. = | − 55.18,5 |
| $2m =$ | 156.19. 6 | | − 9.7969554 | $k =$ | − 21.33,5 |
| $m =$ | 78. 9.33 .... | sin.... | 9.9906591 | | |
| $m - $K = | 78.31. 7 .... | cos.... | 9.2989614 | | |
| | | | 19.4926651 | | |
| | | sin.... | 9.7463326 | $\frac{1}{2}p =$ | 33°53′23″6 |
| | | Arc semi-diurne (8 fois). | | $p =$ | 4.31. 7,1 |
| | | H. sid. du passage...... | | = | 17. 6.37,6 |
| | | H. sid. du coucher...... | | = | 21.37.44,7 |
| | | Æ☉ moy. à midi...... | | − | 10.20.49,0 |
| | | | | | 11.16 55,7 |
| | | Correct. table I. ........ | | | − 1.50,8 |
| | | H. moy. du coucher.... | | = | 11.15. 4,9 |
| | | Équ. du temps........ | | | − 1.18,3 |
| | | H vr. du coucher...... | | = | 11.13.46,6. |

Ce résultat peut être considéré comme suffisamment exact. Cependant, si l'on demande une extrême précision, qui n'est presque jamais d'aucune utilité, comme on a supposé que le coucher se fait 1′ plus tard, on recommence l'opération en prenant $11^h\,14'$; on calcule la déclinaison en ayant égard aux différ. secondes (on a $D = -17°\,50'\,44''$). Cherchant la parallaxe horizontale pour cette heure et pour la latitude de Paris, on trouve $H = 55'\,17'',9$ sous l'équateur, et $H' = 55'\,11'',7$ à Paris. Le calcul donne pour l'arc semi-diurne $p = 4^h\,31'\,6'',9$, et pour l'heure sid. du coucher de la Lune $21^h\,37'\,44'',5$; donc l'heure moy. $= 11^h\,15'\,4'',6$, et l'heure vr. $= 11^h\,13'\,46'',3$.

224. Trouver, à une minute près, l'heure du lever et du coucher de Jupiter, à Paris, le 1er octobre 1830. La parallaxe est sensiblement nulle, et l'on pourra regarder la déclin. comme constante, parce qu'elle change très peu en 1 jour; ainsi on fera le calcul comme s'il s'agissait d'une étoile dont la déclin. serait $D = 23°\,25'$ A. L'heure sid. du passage au méridien, ou l'asc. dr. en temps, est $18^h\,40'$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $l =$ | 48° 50′ 14″ .... | cos.... | 9.8183582 | |
| $d =$ | 113.25. 0 .... | sin.... | 9.9626719 | |
| $K =$ | 0.33.45 | | | |
| $2m =$ | 162.48.59 | | — 9.7810301 | |
| $m =$ | 81.24.30 .... | sin.... | 9.9950988 | |
| $m - K =$ | 80.50.45 .... | cos.... | 9.2016469 | |
| | | | 19.4157156 | |
| $\frac{1}{2}p =$ | 30.41.11 .... | sin.... | 9.7078578 | |
| $p =$ | 4ʰ 5.29 | = arc semi-diurne. | | |
| Æ = | 18.40. 0 | = h. sid. pass. mérid. | | |
| | 14.34.31 | = h. sid. lever......... | 22ʰ45′ 29″ | h. sid. coucher. |
| | — 12.38.48 | = Æ☉ moy.......... | — 12.38.48 | |
| | 1.55.43 | | 10. 6.41 | |
| Table I.... | — 19 | ...................... | — 1.39 | |
| | 1.55.24 | = h. moy. lever. | 10. 5. 2 | h. m. coucher. |
| | + 10.13 | = équ. du temps....... | 10.13 | |
| | 2. 5.37 | = h. vr. lever. | 10.15.15 | h. vr. coucher. |

La *Conn. des Tems* indique 2ʰ 5′ et 10ʰ 16′.

*De l'azimuth d'un astre ou d'un objet terrestre.*

225. *Trouver l'azimuth d'un astre à un instant fixé.* Soit astre en $q$ (fig. 18) ; $p$ le pôle, $z$ le zénith, $pza$ le méridien, $zqb$ le vertical de l'astre ; l'arc $ab$ d'horizon est l'azimuth demandé, ou l'arc $kb$ si l'on veut compter les arcs azimuthaux à partir du méridien boréal. Or, dans le triangle $pzq$, on connaît deux côtés et l'angle compris, savoir : l'arc $pz$, compl. de la lat. du lieu, ou la colatitude $c$ ; $pz = c = 90° - l$ ; l'arc $pq$, distance polaire $d$, compl. de la déclin. D ; $pq = d = 90° - D$ ; enfin, l'angle horaire $p$ déterminé par l'heure donnée. En effet,

1°. S'il s'agit du Soleil observé vers l'ouest, en réduisant l'heure vraie proposée en degrés, on trouve $p$ : avant midi, l'angle $p$ est $12^h$ — l'heure donnée, exprimé en arc.

2°. Si l'on observe une étoile, $p$ est la distance au méridien ; et d'après ce qu'on a vu p. 172, on a

$$\pm p = \text{heure sid.} - Æ\star = \text{heure sol.} + Æ\odot - Æ\star.$$

On prend — quand l'étoile est vers l'orient, et + si elle est vers l'occident.

Ainsi, selon que la montre est réglée sur le temps sid. vr. ou moyen, on pourra trouver l'angle $p$. Dans le cas où il s'agit du temps moyen, on emploie l'asc. dr. ⊙ moy., comme p. 173; et pour le temps vrai, on prend celle du ⊙ vrai (ou plutôt — ⊙♈) pour midi : mais il faut corriger ce temps de la marche du Soleil en asc. dr. depuis midi jusqu'à l'instant de l'observation, comme p. 151.

En résolvant le triangle $pzq$, on en tire l'azimuth $pzq$ = A = arc $kb$ compté à partir du nord, par les équ. (*v.* p. 8)

$$\text{tang } \varphi = \cos p \cot D,$$

$$\text{tang A} = \frac{\text{tang } p \sin \varphi}{\cos (l + \varphi)}.$$

La première donne l'arc auxiliaire $\varphi$, qu'on introduit *avec son signe* dans la seconde; le calcul donne enfin l'azimuth A : nous disons avec son signe, parce que tang $\varphi$ peut être négatif, selon les signes que reçoivent les facteurs cos $p$ et cot D.

Remarquez que l'azimuth A est un arc d'horizon compté *à partir du nord* en allant au sud, soit vers l'est, soit vers l'ouest, tandis que l'angle horaire $p$ est évalué à partir du méridien sud.

226. Nous ne donnerons pas d'application de ces formules, qui sont analogues à celles de la p. 185, parce qu'elles sont d'un usage moins commode que les suivantes, qui sont fondées sur les analogies de Néper (équ. 41 et 42, p. 6) : $d$ est la distance de l'étoile au pôle nord, $c$ la colatitude du lieu, $p$ la distance au méridien, comme ci-dessus; enfin, $q$ est ce qu'on appelle *l'angle de variation*.

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} (\text{A} + q) = \cot \tfrac{1}{2} p . \frac{\cos \frac{1}{2} (d - c)}{\cos \frac{1}{2} (d + c)},$$

$$\text{tang } \tfrac{1}{2} (\text{A} - q) = \cot \tfrac{1}{2} p . \frac{\sin \frac{1}{2} (d - c)}{\sin \frac{1}{2} (d + c)}.$$

Observez que le déplacement apparent de l'astre que produi-

sent la réfraction et la parallaxe, s'exerçant dans un vertical, ne change pas l'azimuth A.

Le 18 octobre 1830 matin, en un lieu dont la latitude est 35° 30′ sud, on demande quel sera l'azimuth du Soleil à $7^h\,55'\,30''{,}2$ temps vrai de ce lieu, dont on sait d'ailleurs que la longit. est $3^h\,21'\,20''{,}2$ à l'est de Paris ; c'est-à-dire qu'on compte en cette ville $4^h\,34'\,10''$ t. vr. le 18 au matin, ou le 17 à $16^h\,34'\,10'' = 16^h{,}57$.

On trouve la distance au méridien, $p = 4^h\,4'\,29''{,}9$, et le huitième $\frac{1}{8}p = 30°\,33'\,44''$. La déclin. ☉ est $D = 9°\,25'\,24''$ A ; on rapportera les angles A et $p$ au pôle austral. (*V.* p. 180.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $d =$ | 80°34′36″ | | | |
| $c =$ | 54.30. 0 | cot $\frac{1}{2}p$ .......... | 0.2287737 ....... | 0.2287737 |
| $d - c =$ | 26. 4.36... | $\frac{1}{2} = 13°\ 2'\ 18''$ cos. | 9.9886568 | sin... 9.3533447 |
| $d + c =$ | 135. 4.36... | $\frac{1}{2} = 67.32.18$ cos— | 9.5821375 | sin. — 9.9657356 |
| $\frac{1}{2}(A+q) =$ | 76.57.40 | tang.. | 0.6352930 ....... | 9.6163828 |
| $\frac{1}{2}(A-q) =$ | 22.27.39 | | | |

A = 99.25.19 azimuth ☉ du côté du sud-est,
ou..... 80.34.41 ................. du nord-est.
$q =$ 54.30. 1 = angle parallactique ou de position.

En un lieu situé près de Paris, quel est l'azimuth d'Ataïr, α de l'Aigle, vers l'est, le 9 juin 1830, à $9^h18'$ du soir, temps moy.? L'asc. dr. et la déclin. app. de cette étoile ont été données p. 175. Voici le calcul de A.

| | | |
|---|---|---|
| Heure moy.. | — | $9^h18'\ 0''$ |
| Ꜳ☉ moy... | — | 5. 9.21,14 |
| Ꜳ★....... | + | 19.42.31,33 |
| | | 5.15.10,19 |
| En $9^h18'$.... | | — 1.31,42 (table I). |
| Vers l'est... $p$ = | | 5.13.38,77 .... 8e.... $\frac{1}{8}p = 39°\ 12'\ 21''$. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $d =$ | 81°34′14″8 | | | |
| $c =$ | 41.19.10,0 | cot $\frac{1}{2}p$.... | 0.08846 ....... | 0.08846 |
| $d - c =$ | 40.15. 4,8 | $\frac{1}{2} = 20°\ 7'\ 32''4$ cos.. | 9.97264 | sin... 9.53666 |
| $d + c =$ | 122.53.24,8 | $\frac{1}{2} = 61.26.42,4$ cos — | 9.67943 | sin. — 9.94367 |
| | 67.26.55 $= \frac{1}{2}(A+q)$ | tang. | 0.38167 ....... | 9.68145 |
| | 25.39. 7 $= \frac{1}{2}(A-q)$ | | | |

93. 6. 2 = A, azimuth demandé, du nord vers l'est.

*Voyez* encore les exemples donnés nos 243 et 247.

227. *Étant donnée la hauteur d'un astre, trouver son azimuth.* Les trois côtés du triangle $pzq$ (fig. 18) sont connus, savoir : $pz = 90° - l = c$, $zq = 90° - h = z$, $pq = 90° - D = d$. On résout ce triangle (équ. 40, p. 6), et l'on trouve pour l'azimuth $A = pzq$ du *côté du nord*,

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} A = \frac{\sin k . \sin (k - d)}{\sin z . \sin c},$$

$$2k = z + d + c.$$

Bien entendu que $z$ doit être corrigé de la *réfr.—parall.*, et que $d$ désigne la distance polaire pour l'heure où la hauteur est donnée.

Reprenons, comme applications de ces équ., les deux exemples qui précèdent, lesquels ont déjà été traités p. 180 et 175, sous d'autres rapports. Et d'abord pour l'observation du Soleil, on a

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z$ = | 61° 7′ 26″.... | sin.... | 9.9423385 |
| $c$ = | 125.30. 0..... | sin.... | 9.9106860 |
| $d$ = | 99.25.24 | | |
| $2k$ = | 286. 2.50 | — | 9.8530245 |
| $k$ = | 143. 1.25..... | sin.... | 9.7792254 |
| $k - d$ = | 43.36. 1..... | sin.... | 9.8386118 |
| | | | 19.7648127 |
| ½ A = | 40.17.20,5.. | cos.... | 9.8824063 |
| A = | 80.34.41 | azimuth du nord vers l'est. | |

Dans le second exemple, qui se rapporte à Ataïr, vers l'est, le 9 juin 1830 au soir, on a (*v.* p. 155)

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z$ = | 76° 2′ 8″0.... | sin....— | 9.9869712 |
| $c$ = | 41.19.10,0.... | sin....— | 9.8197127 |
| $d$ = | 81.34.14,8 | | |
| $2k$ = | 198.55.32,8 | — | 9.8066839 |
| $k$ = | 99.27.46,4.... | sin.... | 9.9940500 |
| $k - d$ = | 17.53.31,6.... | sin.... | 9.4874574 |
| | | | 19.6748235 |
| ½ A = | 46.33.0,4..... | cos.... | 9.8374117 |
| A = | 93. 6.0,8 | azimuth du nord vers l'est. | |

Ces résultats s'accordent avec ceux que nous avons trouvés, en supposant la hauteur inconnue, et l'heure donnée.

22..

228. *Trouver l'azimuth d'un astre à son lever et à son coucher, ou son amplitude ortive et occase.* Cette question, qui a déjà été traitée n°. 218, pour *le lever et le coucher vrais*, c'est-à-dire sans avoir égard à la réfraction ni à la parallaxe, est un cas particulier du problème que nous venons de résoudre, en supposant que la distance zénithale apparente est de 90°. Ainsi il faut faire, dans l'équ. de ce n°, $z = 90° + K$, K ayant la même valeur que n°. 221.

L'amplitude étant le complément de l'azimuth à 90°, résulte de ce calcul.

Reprenons l'exemple du lever du Soleil au Caire, le 16 août 1830, p. 332; nous aurons

| | | | |
|---|---|---|---|
| $d =$ | 74° 13′ 38″ | | |
| $c =$ | 59.56.40..... | sin..... | 9.9372872 |
| $z =$ | 90.33.37..... | sin..... | 9.9999792 |
| $2k =$ | 224.43.55 | — | 9.9372664 |
| $k =$ | 112.21.57,5... | sin..... | 9.9660347 |
| $k - d =$ | 38. 8.19,5... | sin..... | 9.7906848 |
| | | | 19.8194531 |
| $\frac{1}{2}$A = | 35.40.37,2... | cos.... | 9.9097265 |
| A = | 71.21.14,4 | azimuth du Soleil du nord à l'est. | |

*De la déclinaison de l'aiguille aimantée.*

229. L'aiguille d'une boussole, librement suspendue par son centre de gravité, dès qu'elle est aimantée, ne se dirige plus dans un plan horizontal. Le plan vertical où elle se place spontanément, dans une direction oblique à l'horizon, a été nommé le *méridien magnétique*; et la ligne droite suivant laquelle ce plan coupe l'horizon, fait avec la méridienne un angle appelé *déclinaison de l'aiguille aimantée* : cet angle est celui que le méridien magnétique fait avec le méridien du lieu.

L'angle que l'aiguille inclinée fait avec l'horizon est ce qu'on nomme l'*inclinaison de l'aiguille aimantée*. Si une aiguille d'acier ordinaire et privée d'aimantation, est tellement lestée, qu'elle se dispose horizontalement quand on la suspend à une soie par son milieu ou centre de gravité; quand on lui a donné,

par le frottement d'un aimant, la vertu magnétique, sans changer aucunement le poids de ses parties, si on la suspend de nouveau par son centre de gravité, on voit une extrémité s'abaisser fortement, comme si l'on y avait ajouté un poids: en sorte qu'en même temps que cette aiguille se place, après diverses oscillations, dans le méridien magnétique, elle y prend une direction inclinée à l'horizon, dans laquelle elle persiste.

La déclinaison et l'inclinaison varient, dans un même lieu, avec le temps. Non-seulement on reconnaît aux directions de l'aiguille aimantée des valeurs angulaires différentes avec le méridien et l'horizon, lorsqu'on les compare après des intervalles de plusieurs années; mais même aux diverses heures du jour, on observe des déplacemens oscillatoires et périodiques extrêmement petits, autour d'un état moyen; c'est ce qu'on appelle les *variations diurnes*. Il ne sera pas question ici de ces influences; d'ailleurs, elles ne sont sensibles qu'avec des instrumens parfaits, environnés de toutes les circonstances les plus favorables à leur stabilité et à l'observation. On a trouvé que les variations diurnes sont de 5′ à 25′, selon les saisons où on les observe; mais le plus souvent elles ne vont que de 8′ à 15′. Il y a aussi des perturbations accidentelles causées par les aurores boréales et les grands météores.

Quant à l'inclin., elle change aussi, lentement, avec la durée; elle était à Paris de 75° en 1671; elle a toujours diminué depuis; en juin 1829, elle n'était plus que de 67°41′,3. Elle varie aussi lorsqu'on change de lieu; mais nous n'aurons plus égard, dans ce que nous allons dire, à ces effets, parce qu'on est dans l'usage de lester la branche de l'aiguille qui tend à s'élever, afin de la maintenir horizontale; seulement, il ne faut pas oublier qu'en changeant de localité, l'inclinaison ne restant pas la même, ce poids additif équilibrant doit changer avec les contrées; et il faut, lorsqu'on voyage dans des pays éloignés, recharger l'une des branches de l'aiguille d'une petite boule de cire, pour la rendre horizontale.

Ce n'est donc que les changemens d'azimuth magnétique

avec les temps et les localités, qui va faire le sujet de nos recherches.

La déclinaison de l'aiguille aimantée varie considérablement lorsqu'on effectue de grands déplacemens à la surface de la Terre; l'aiguille s'éloigne plus ou moins de la ligne nord et sud, soit vers l'ouest, soit vers l'est, à une époque donnée.

En rapprochant et comparant les observations, on trouve qu'il existe à la surface du globe des lignes *sans déclinaison*, c'est-à-dire que l'aiguille aimantée s'y place dans le méridien même du lieu. Il existe quatre de ces lignes, savoir : une dans l'océan Atlantique, entre l'Europe et l'Amérique; une qui est opposée à celle-ci, commençant au sud de la Nouvelle-Hollande, et se continuant au nord-ouest jusqu'en Laponie, à travers la mer des Indes, le continent d'Asie, la Perse et la Sibérie occidentale; la 3e se sépare de cette dernière et se dirige vers la Sibérie orientale; la 4e, enfin, traverse l'océan Pacifique, près des îles des Amis et de la Société.

Du reste, les valeurs angulaires de la déclin., et la situation absolue des lignes qui en sont privées, varient avec les temps. L'aiguille déclinait à Paris de 11° 30′ au N.-E. en 1580; depuis cette époque, la déclin. a d'abord diminué, et s'est trouvée nulle en 1663; alors les méridiens terrestre et magnétique coïncidaient. Ensuite, elle s'est constamment écartée de plus en plus vers l'ouest, et sa déclin. a été au *maximum* de 22° 34′ N.-O. en 1824. L'excursion diminue depuis cette époque, et n'est plus guère que de 22° 12′ (en 1829). Près du *maximum* d'écart vers l'ouest, le changement de déclin. est très lent, et la variation ne se fait du côté opposé qu'après un temps fort long.

Comme la boussole est le principal guide sur la surface des mers, il est indispensable que le navigateur sache déterminer, en tout lieu où il se trouve, quelle est la déclin. actuelle de l'aiguille. La théorie de ces variations n'est pas assez avancée pour que cette connaissance puisse résulter d'un calcul *à priori*; il n'est possible de l'acquérir que par des observations directes, et c'est à l'Astronomie qu'il faut recourir pour cela.

Quant à la cause qui force l'aiguille aimantée à s'incli-

ner à l'horizon, et à se placer dans un plan vertical déterminé, on admet que la Terre contient vers son centre un aimant très fort, qui exerce son action sur toutes les parties ferrugineuses du globe, et donne aux aiguilles une direction fixe. Il faut en outre admettre l'existence d'un second centre magnétique différent du premier en position et en énergie, pour expliquer l'existence des quatre lignes sans déclin. Enfin les grandes masses de fer contenues dans le globe terrestre expliqueront les anomalies observées en certaines localités.

L'attraction exercée sur nos aiguilles par ces forces centrales abaisse l'un des pôles, et la répulsion exercée sur l'autre pôle maintient au contraire celui-ci élevé; le tout conformément aux actions que nous savons être produites par nos aimans sur les aiguilles qu'on place dans leur sphère d'activité. On voit, par cette explication, comment il doit arriver que l'inclinaison et la déclinaison changent avec les lieux, puisqu'en transportant l'aiguille, elle s'y trouve disposée d'une manière différente à l'égard des pôles de l'aimant terrestre. On voit aussi que lorsqu'on se trouve placé sur la Terre au pôle même de l'aimant central, l'aiguille doit s'y tenir verticale, et que dans les lieux voisins de ce point, la déclin. y change considérablement pour des déplacemens fort petits; tandis qu'ailleurs elle reste à peu près la même pour des stations distantes de plusieurs lieues. La Terre a deux pôles magnétiques opposés où se présentent les effets qu'on vient de décrire; ces points, qui ne sont pas exactement déterminés, sont d'ailleurs influencés par le second centre magnétique dont nous avons parlé.

En s'éloignant à 90° des pôles magnétiques de la Terre, on trouve des lieux, voisins de l'équateur terrestre, où l'aiguille reste horizontale, parce que l'action centrale est la même sur les deux pôles; la suite de ces points détermine une courbe qui a été appelée *équateur magnétique*. Ce serait un grand cercle de la Terre, s'il n'y avait qu'un seul aimant au centre, mais l'existence d'un second centre magnétique donne à cette courbe une figure sinueuse: elle coupe l'équateur terrestre en quatre points.

La supposition de deux centres magnétiques qui produisent tous les effets observés en déclin. et en inclin., est très probable ; sans cependant être suffisante pour expliquer tous les phénomènes, et particulièrement les changemens de direction de l'aiguille en un même lieu, soit chaque jour, par petites oscillations, soit à la longue, par une marche continue. Mais il nous suffit ici d'avoir indiqué ces actions; nous renvoyons à cet égard aux traités de Physique, et particulièrement à celui de M. Biot.

230. La *boussole*, appelée aussi *compas azimuthal* ou *compas de route*, est une boîte contenant une aiguille aimantée, parfaitement libre sur son pivot, et lestée pour lui conserver la position horizontale. Ce pivot est le centre d'une circonférence divisée en 360°, tracée sur le fond de la boîte. Quelquefois l'aiguille est fixée à un disque de talc, ou de carton, mobile sur le pivot. Tantôt les numéros des arcs vont de 0 à 360° en faisant le tour entier; tantôt ils ne s'étendent que jusqu'à 180° de chaque côté, et même que jusqu'à 90°, en partant de chaque bout.

On a coutume de bleuir au feu le bout de l'aiguille qui se dirige vers le nord magnétique; ce bout prend le nom de *pôle boréal*.

Pour qu'une boussole soit bonne, il faut que le diamètre principal, marqué 0 et 180°, soit exactement parallèle à l'axe optique de la lunette ou des pinnules; c'est ce dont on s'assure en visant à un objet très éloigné. On fait pirouetter la boîte horizontalement sur son pied, jusqu'à ce que l'on ait amené cet objet dans l'axe optique; on lit alors la graduation indiquée par l'aiguille. On retourne alors la boîte en sens contraire, de manière à amener la lunette ou les pinnules sur le côté opposé de la boîte. Il faut que l'aiguille indique la même graduation, lorsque l'on a pointé au même signal. S'il n'en est pas ainsi, on prend la demi-différence entre les deux numéros marqués, pour l'erreur constante de l'instrument dans toutes les observations. Ainsi, lorsque l'azimuth magnétique du signal est 123°, la lunette étant du côté droit de la boîte, et 121°

quand l'axe optique est du côté gauche, la demi-différence 1° est l'erreur de la graduation. Ainsi, dans toutes les observations qu'on fera avec cet instrument, il faudra tenir compte de cette erreur, en retranchant 1° de l'arc indiqué si la lunette est située du côté droit, et ajoutant au contraire 1° si elle est à gauche.

Quelquefois l'instrument est construit de manière à permettre au cercle gradué de tourner quelque peu autour de son centre, où est fixé le pivot. Alors on peut aisément faire disparaître l'erreur qui est assez gênante, parce qu'elle doit conduire à des conséquences fausses, quand on oublie de faire la correction.

Il faut que le pivot soit juste au centre de la circonférence divisée; c'est ce qu'on reconnaît en voyant si, dans toutes les positions azimuthales, les graduations indiquées par les deux pointes diffèrent exactement de 180°. Quand cela n'a pas lieu, on est obligé, dans toutes les observations, de lire les deux graduations pour prendre la moyenne. Au reste, même quand l'instrument n'a pas le défaut dont nous parlons, il est bon de faire les deux lectures, pour mieux s'assurer du degré indiqué. Si l'une des pointes paraît marquer 18° 20', et l'autre 198° 40', on prendra 18° 30' pour la valeur angulaire donnée par la première pointe.

Une autre condition bien difficile à remplir, c'est que l'axe optique de la lunette, dans son mouvement de bas en haut, décrive un plan exactement vertical, quand le cercle est horizontal; c'est-à-dire qu'il faut que le plan vertical conduit par le fil de la lunette ou des pinnules, soit exactement perpendiculaire au limbe: sans cela, en pointant à quelque objet élevé, on pourrait lire différens azimuths magnétiques, selon la position oblique de l'axe optique, parce que la projection de cet axe sur le limbe ne se ferait pas selon le même plan perpendiculaire. Il faut rebuter une boussole atteinte de ce vice, parce qu'on n'y peut remédier par le calcul; ou du moins on ne doit s'en servir que pour viser des objets voisins de l'horizon.

Pour reconnaître si une boussole a ce défaut, on dispose le

cercle gradué exactement horizontal, avec un niveau à bulle d'air qu'on y pose selon différentes directions, puis on vise à quelque point voisin. Le fil du réticule doit couvrir ce point, dans toutes les directions inclinées qu'on fait prendre à l'axe optique.

Enfin, on doit rejeter toute aiguille qui n'est pas coupée symétriquement par la ligne des deux pôles. Les pôles d'une aiguille sont deux points situés à quelque distance de ses extrémités, et où s'exerce le centre d'action magnétique. Il faut que la ligne droite qui joint ces deux pôles passe à la fois par les deux pointes, et aussi par le pivot de rotation, situé au milieu de l'œil. On reconnaît aisément si cette condition est remplie : avant de fixer la chape dans cet œil, on la dispose sur une chape mobile, sur laquelle on la place successivement dans deux situations renversées, c'est-à-dire de manière à présenter en-dessus, d'abord une face, puis l'autre. Il faut que les pointes de l'aiguille viennent se fixer librement, après les oscillations amorties, exactement sur les mêmes repères. Sans cela, l'axe magnétique étant oblique à l'axe de figure de l'aiguille, ce n'est plus la graduation marquée par les pointes qui est celle qu'on doit lire.

Quelquefois une aiguille a des *points conséquens*; on nomme ainsi les pôles, lorsqu'il y en a plus de deux, situés çà et là sur la longueur. (*Voyez* à ce sujet les traités de Physique, et l'art. *Boussole* du *Dictionnaire Technologique*.)

231. Nous avons fait comprendre que la déclin. actuelle de l'aiguille aimantée en un lieu déterminé, ne peut être obtenue que par l'observation. Nous allons indiquer les expériences qui peuvent faire connaître cet arc.

I. On fait tomber, à midi précis, l'ombre d'un fil-à-plomb sur le pivot de l'aiguille; cette ligne d'ombre sera la méridienne du lieu, et l'arc intercepté sur la circonférence de l'instrument, entre cette ligne et la pointe de l'aiguille, est la déclin. demandée: on voit aussi de quel côté cette déclin. se fait. On fait ordinairement diriger l'aiguille sur le diamètre principal noté o, en tournant convenablement la boussole : alors on lit immédiatement l'arc cherché, qui se trouve indiqué par la ligne d'ombre.

232. II. Calculez l'heure que doit marquer une montre à l'instant du passage d'une étoile au méridien ; à cette même heure, visez l'étoile avec la lunette de la boussole, et l'aiguille indiquera juste la déclin., puisqu'alors son diamètre principal est dans le méridien du lieu.

Il y a des étoiles qui ayant, à fort peu près, la même ascension droite, passent ensemble au méridien ; elles sont dans un même vertical, et elles n'y sont qu'à cet instant. Donc, si l'on observe l'une de ces étoiles avec la lunette de la boussole, lorsqu'elle se trouve avec l'autre dans la direction du fil-à-plomb, on est assuré qu'elles sont au méridien, et l'aiguille de la boussole indique la déclin. Voici quelques étoiles qu'on peut employer à cette observation :

| | |
|---|---|
| ζ Orion avec α Colombe...... vers | 5h33′30″ t. sid. |
| Procyon avec Pollux. .............. | 7.30.24 |
| Fomalhaut avec δ Verseau......... | 22.48.14 |
| α Ophiucus avec ξ Serpent......... | 17.27. 2 |
| α et β Pégase...................... | 25.56.18. |

Nous avons indiqué ici l'heure sidér. où les étoiles sont au méridien, pour calculer l'heure moy. où l'on peut espérer de les voir ensemble dans le même vertical (n° 110).

233. III. Observez le Soleil avec la lunette de la boussole, lorsqu'il est à même hauteur le matin et le soir, et notez les indications de l'aiguille sur le limbe. Le milieu de l'arc parcouru du premier instant au second est le point que l'aiguille indiquait à midi : prenez donc l'arc égal à la demi-somme des deux indications ; ce sera la direction de la méridienne magnétique, ou la graduation sur laquelle se porte l'aiguille quand l'axe optique est dans le méridien du lieu, c'est-à-dire la déclin. de l'aimant.

Remarquez que si, entre ces deux observations, l'aiguille a dépassé le zéro de la circonférence, on doit continuer la série des numéros de graduation dans le même sens, sans l'interrompre. Ainsi, on comptera 370° au lieu de 10°, 380° au lieu de 20°, etc.

Il faut avoir soin, dans cette double observation, de ne pas faire passer la lunette de l'instrument du côté opposé ; ainsi,

on la conservera, par exemple, du côté droit. Il faut aussi lire les indications du même pôle de l'aiguille.

234. IV. Ces méthodes sont à peu près impraticables en mer; d'ailleurs l'axe optique de la boussole ne décrivant pas un plan exactement vertical, les erreurs s'accroissent, à mesure que l'astre est plus élevé lorsqu'on l'observe; il ne faut donc pointer que les astres qui sont au plus à 15° de hauteur sur l'horizon. Les marins préfèrent même le Soleil à son lever et à son coucher; et comme les formules du n° 218 servent à leur fournir des tables d'amplitudes toutes calculées, pour toutes les déclin. de cet astre, et toutes les latitudes terrestres, ils se trouvent dispensés de faire des calculs.

Il est vrai que ces équ. ne comprennent ni la réfraction ni la parallaxe; mais ils compensent cette omission par une pratique qui consiste à n'observer le disque solaire que lorsqu'il est élevé sur l'horizon des deux tiers de son diamètre; alors ils regardent le centre comme étant à l'horizon même, et imputent sa hauteur apparente à l'effet combiné de la réfraction, de la parallaxe et de la dépression de l'horizon.

Que le Soleil soit à l'horizon, ou à une certaine hauteur, on l'observe en mettant son limbe en contact avec le fil vertical de l'axe optique, d'abord d'un côté, puis de l'autre côté : à chaque contact, on lit l'indication de l'aiguille aimantée; la moyenne entre les deux arcs est l'azimuth magnétique du centre.

235. V. La déclin. de l'aiguille se trouve en observant, avec la lunette ou les pinnules de la boussole, un astre à une hauteur quelconque, et lisant sur la circonférence la graduation $a$ indiquée par le pôle nord de l'aiguille. On connaît alors deux azimuths : celui $a$ qu'indique l'instrument, et qu'on nomme *azimuth magnétique*; et l'autre A, que donne le calcul, soit d'après la hauteur actuelle de l'astre (n° 227), soit d'après l'heure de l'observation (n° 225) : nous appellerons ce dernier arc A, l'*azimuth calculé*. La déclin. $x$ de l'aiguille aimantée est la somme ou la diff. de ces deux arcs, selon les cas.

Soit CI''NI'LI l'horizon (fig. 36), CN la méridienne allant au nord, C l'observateur : l'aiguille de la boussole doit prendre

une direction constante CI, ou CI′, ou CI″, quelque situation qu'on fasse prendre au limbe de l'instrument, c'est-à-dire quel que soit le côté où l'on pointe l'axe optique; et si cet axe se projette selon CL, en visant au signal L, CL se couche sur le diamètre principal de la boussole, le zéro de la graduation est sur la direction CL. Les valeurs angulaires se comptent par conséquent du point L, soit vers la gauche, en LI, soit vers la droite, en LI′ ou LI″, et on lit sur le cercle le numéro où s'arrête la pointe nord de l'aiguille.

Cela posé, il faut distinguer divers cas, à raison des dispositions mutuelles des lignes.

1°. Si l'aiguille se porte en CI lorsqu'on vise un objet situé en L, l'arc $LI = a$ est l'azimuth magnétique qu'on lit sur la boussole; cet arc est compté vers l'ouest en partant du nord, ou plutôt de droite à gauche, en supposant le lecteur placé au centre de l'instrument; IN est l'arc compris dans l'angle ICN qu'il mesure, c'est la déclin. cherchée de l'aiguille, $IN = x$; enfin $LN = A$ est l'azimuth calculé. On a donc

$$x = A + a.$$

2°. Si l'aiguille tombe en CI′, quand on vise L, CI′ est le méridien magnétique, $LI' = a$ est l'azimuth magnétique donné par l'instrument, mais il faut lire cet arc de gauche à droite; $LN = A$ est toujours l'azimuth calculé : $NI' = x$ est la déclin. cherchée; ainsi $x = A - a$.

3°. Enfin, si l'aiguille se dirige selon CI″ de l'autre côté du méridien CN, et qu'on vise en L, on a $NI'' = x$, arc compté vers la droite : CL est encore la direction que suit le diamètre principal de la boussole, et le zéro de la division est encore en L; l'arc $LI'' = a$ est l'azimuth magnétique qu'on lit de gauche à droite, et $LN = A$ est l'azimuth calculé de l'objet L. Donc $x = a - A$.

On analysera de même les cas qui se présentent quand le signal L est situé du côté de l'est, soit que la déclinaison de l'aiguille la porte à l'ouest ou à l'est. On reconnaîtra que cette

déclin. $x$ est toujours la somme ou la différ. des arcs connus A et $a$.

Dans chaque cas particulier, il sera facile de construire une figure qui représente la disposition actuelle des rayons CN, CL et CI, dirigés, dans le méridien du lieu, au signal L, et dans le méridien magnétique, et l'on reconnaîtra quel est celui des six cas analysés ci-dessus qui convient, et par conséquent s'il faut ajouter ou retrancher les arcs connus $a$ et A, pour avoir $x$; on verra en outre, si la déclin. de l'aimant se fait du nord vers l'ouest, ou vers l'est.

Les marins sont dans l'usage de se servir des amplitudes, arcs d'horizon dont le point de départ est à 90° de N à l'est ou à l'ouest du méridien; ce qui ne présente non plus aucune difficulté. Mais les azimuths sont bien préférables aux amplitudes, parce qu'ils exigent moins de discussions sur les positions relatives des rayons, et sont moins sujets à erreur, ainsi qu'on va le voir par la règle suivante.

Par le jeu des signes algébriques, on peut regarder la formule $x = A + a$ comme convenable à tous les cas, bien qu'on l'ait déduite de la supposition que ces rayons sont dirigés selon CN, CL, CI, et que cette disposition peut n'être point celle qui convient au cas particulier qu'on rencontre; il ne faut pour cela qu'attribuer aux arcs $x$, A et $a$ des signes négatifs, lorsqu'ils tombent en sens contraires à ceux qu'on a adoptés pour trouver cette équ., le tout conformément à ce qui se passe dans les formules où l'analyse est appliquée à la Géométrie. Voici la règle générale qu'on devra suivre.

Les azimuths A et $x$ se comptent toujours à partir du méridien boréal, vers l'ouest ou vers l'est; on donne le signe + aux valeurs angulaires qui sont comptées à l'ouest, et — à celles qui sont à l'est. Le signe de $a$ se trouve en supposant que le lecteur est au centre de la boussole et lit l'arc indiqué par la pointe nord qui est bleuie; il prend $a$ en + lorsque l'arc s'étend vers la gauche du diamètre principal portant le zéro de la graduation, et $a$ est négatif du côté opposé, ou vers la droite.

Ainsi, on donne à $a$ le signe + si cet arc est à l'ouest, et

— s'il est à l'est du méridien magnétique; on donne à A le signe + si l'azimuth calculé est à l'ouest, et — s'il est à l'est du méridien du lieu. On fera la somme $x = A + a$, en conservant aux lettres A et $a$ leurs signes; il en résultera pour $x$ une valeur qui sera celle de la déclin. de l'aiguille, et cette déclin. sera comptée du nord vers l'ouest ou vers l'est, selon que $x$ sera positif ou négatif.

Les exemples suivans montreront comment on fait l'application de cette règle. Il sera bon de s'aider d'une figure, dans chaque cas, pour vérifier qu'en effet les choses se passent comme nous le disons.

| | | |
|---|---|---|
| Le Soleil, vers son coucher (à l'ouest), a eu pour azimuth calculé | $A = +90°57'$ | O |
| Le méridien magnétique était situé de manière qu'on a lu l'arc à droite sur la boussole | $a = -75.\ 7$ | E |
| Déclin. de l'aiguille du nord à l'ouest | $x = +15.50$ | O |
| Le Soleil, peu après son lever (à l'est), avait pour azimuth calculé | $A = -81.39$ | E |
| L'aiguille était dirigée à gauche du diamètre portant le zéro | $a = +99.46$ | O |
| Déclin. de l'aiguille du nord à l'ouest | $x = +18.\ 7$ | O |
| Dans l'exemple proposé page 338, Ataïr a été observé 9 juin 1830; l'azimuth calculé | $A = -93.\ 6$ | E |
| L'aiguille s'est tournée à l'ouest de | $a = +116.26$ | O |
| Déclin. du nord à l'ouest | $x = +22.20$ | O |
| L'azimuth calculé du Soleil vers l'est étant supposé de | $A = -120.35$ | E |
| L'aiguille étant dirigée à gauche, on a | $a = +100.15$ | O |
| Déclin. de l'aiguille à l'est | $x = -20.20$ | E |
| L'azimuth calculé étant supposé à l'est | $A = -140.25$ | E |
| L'aiguille déviant vers la gauche de | $a = +120.35$ | O |
| Déclin. du nord à l'est | $x = -19.50$ | E |

Voici le détail d'une observation des deux bords du Soleil, faite, près Paris, 28 septembre 1828 au matin.

| | | |
|---|---|---|
| A | 6h 45′ 5″6 t. moy. | $a = +$ 123° 56′ 0 |
| | 46.50,0 ..................... | 123.48 |
| | 48. 9,0 ..................... | 124.34 |
| | 50.14,8 ..................... | 124.26 |
| | 190.19,4 | 16.44 |
| Moy. | 6. 47.34,9 t. moy. | $a = +$ 124.11 |
| Chron. .. | — 2,0 | D = 2. 1.23″,6 |
| ☉ avance. | 9.22,2 | |
| | 6. 56.55,1 t. vr. | $p = 5^h\ 3'\ 4'',9$    $\frac{1}{2}p = 37°\ 53'\ 7''$. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $d = 92°\ 1'\ 23''6$ | | | | |
| $c = 41.19.10,0$ | | cot $\frac{1}{2}p$.... 0.10898 | ........ | 0.10898 |
| $d - c = 50.42.13,6$... | 25° 21′ 6″8 | cos.... 9.95602 | sin... | 9.63162 |
| $d + c = 133.20.33,6$... | 66.40.16,8 | cos...— 9.59770 | sin.— | 9.96298 |
| 71.10.22 ..................... | | tang.... 0.46730 | ........ | 9.77762 |
| 30.56. 0 | | | | |

$A = -$ 102. 6.22 On met —, parce que le Soleil était à l'est.
$a = +$ 124.12. 6

$x = +$ 22. 6..... déclin. de l'aiguille du nord vers l'ouest.

Observez que lorsque la boussole est divisée de 0 à 360°, en faisant le tour entier de la circonférence, et de droite à gauche, quand l'aiguille se porte à droite du diamètre principal, les graduations inscrites sur le limbe sont 350°, 340°,..., et qu'il faut lire à la place 10°, 20°, etc..., c'est-à-dire le supplément à 360°.

236. VI. On trouve encore la déclin. de l'aiguille aimantée, en observant le Soleil à l'instant précis où il se trouve dans le *premier vertical*, c'est-à-dire dans le plan vertical qui est perpendiculaire au méridien du lieu, et s'étend de l'est à l'ouest; en passant par le zénith. Soit $q$ l'astre dans cette position (fig. 18); le vertical $zq$ coupe le demi-cercle de l'horizon $abk$ en son milieu $b$, ou $ab = bk = 90° =$ angle $pzq$. Ainsi, le triangle $pqz$ est rectangle en $z$. Les formules ($q$ et $m$, p. 5) des triangles sphériques rectangles donnent alors

$$\cos p = \cot l \cot d = \cot l \operatorname{tang} D,$$

$$\cos z \text{ ou } \sin h = \frac{\cos d}{\sin l} = \frac{\sin D}{\sin l}.$$

La première de ces équ. donne l'angle horaire $p$ du Soleil à l'instant où son centre est dans le premier vertical, angle qui, réduit en temps à raison de 15° par heure, est la distance de l'astre au méridien, ou l'heure vraie s'il s'agit du soir, et le compl. de cette heure à $12^h$ s'il est question du matin. La seconde équ. donne la hauteur $h$, ou la dist. zénith. vraie à cet instant (abstraction faite de la réfraction et de la parallaxe); mais cette valeur de $h$ ou $z$ est inutile à l'objet que nous avons en vue.

En pointant à l'astre, dont l'azimuth est alors 90° à l'ouest ou à l'est ($+ 90°$ ou $- 90° = A$), on trouve $a$ sur la boussole, et le calcul est extrêmement simple.

On vise de manière à rendre le fil de la lunette tangent à un bord de l'astre, un peu avant l'heure assignée pour le passage au premier vertical, puis on en fait autant peu après pour l'autre bord. On prend ensuite la moyenne des deux azimuths magnétiques correspondans, pour valeur de $\pm a$. Et même, si l'on veut mettre de la précision dans ce calcul, il faut répéter plusieurs fois ces doubles observations des bords, tant avant qu'après l'heure connue du passage, et noter chaque fois l'heure et l'azimuth magnétique. On répartit ensuite le mouvement azimuthal de l'aiguille proportionnellement au temps écoulé entre la moyenne des heures et celle du passage. Alors ce calcul d'interpolation fait connaître l'azimuth magnétique $a$ pour l'heure $p$ du passage, c'est-à-dire lorsque $A = \pm 90°$.

On a calculé des tables qui donnent à vue les valeurs de $p$ et de $z$ pour toutes les latitudes et toutes les déclin. du Soleil de degré en degré, et l'on interpole pour les arcs intermédiaires.

Le matin du 3 mai 1830, un navire est à 58° de latitude nord, et $6^h 10'$ de longitude ouest. On prend d'abord la déclin. du Soleil à midi; $D = 15° 36'$ B, et la formule donne

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| cot $l$.... | 9.79579 | Heure du lieu. | $6^h 40' 12''$ | cot $l$.... | 9.79579 |
| cot D... | 9.44592 | Longit. ouest. | 6.10 | tang D., | 9.44580 |
| cos $p$... | 9.24171 | A Paris...... | 12.50.12. | cos $p$.... | 9.24159 |

$p = 79° 57' = 5^h 19' 48''$. $p = 79° 57' 20'' = 5^h 19' 49''$.

On fait un premier calcul avec la déclin. de midi à Paris, parce qu'on prévoit que c'est à peu près l'heure du passage au premier vertical : ce calcul donne pour approximation midi 50′ 12″ pour l'heure de Paris où le phénomène se produit. On calcule la déclin. du Soleil pour cette heure, et l'on trouve $D = 15^\circ\, 36'\, 45'',7$ B, arc avec lequel il faut refaire l'opération. On trouve ainsi que le Soleil est au premier vertical à $5^h 19' 49''$ du méridien, c'est-à-dire lorsqu'on compte, dans le lieu de l'observation, $6^h\, 40'\, 11''$ du matin, t. vr. Si, à cet instant, on mesure l'azimuth magnétique du centre du Soleil, et qu'on trouve qu'il est vers la gauche du diamètre principal.....

$$a = +\ 111^\circ\, 17'\ \mathrm{O}$$

comme l'azimuth vrai de l'astre est...... $A = -\ \ 90.\ \ 0\ \mathrm{E}$

on a pour déclin. de l'aiguille vers l'ouest. $x = +\ \ 21.17.\mathrm{O}$

237. VII. Quand on est dans un lieu stable, tel qu'un observatoire, on peut trouver, comme il sera bientôt exposé, par un relèvement astronomique, l'azimuth A d'un signal placé où l'on voudra dans la campagne ; en visant ensuite ce signal avec la lunette de la boussole, comme s'il était un astre, on en conclut l'azimuth magnétique $a$, et par suite, la déclin. $x = A + a$, comme ci-devant. Ce procédé est fort commode, parce qu'une fois l'azimuth A du signal déterminé avec soin, c'est un arc invariable, et l'on peut répéter, tant qu'on veut, les observations de $a$, à toute heure et tous les jours.

### *Des relèvemens.*

238. On nomme *relèvement* l'opération qui consiste à déterminer l'azimuth de chacun des rayons visuels dirigés d'une station à divers signaux environnans. En mer, lorsque la déclin. $x$ de l'aiguille aimantée est connue, on peut se servir de la boussole pour faire les relèvemens ; car l'équ. $x = A + a$, donne

$$A = x - a.$$

Ainsi, l'azimuth A d'un objet éloigné est facile à trouver

quand on a mesuré son azimuth magnétique $a$; bien entendu qu'il faut donner à ces arcs $x$ et $a$ les signes convenables, d'après la règle posée n° 235, et que le signe qu'on trouve pour A, par le calcul, donne le sens où est placé l'objet à droite ou à gauche du méridien du lieu.

Un observateur pointe donc aux objets principaux qui l'entourent, et lit sur la boussole l'azimuth magnétique $a$ qui y répond; en affectant cet arc du signe +, si le pôle nord de l'aiguille tombe à gauche du diamètre principal, et de — dans le cas contraire; il en tire ensuite la valeur et le signe de l'azimuth vrai A.

On conçoit qu'un marin peut de la sorte faire une carte où se trouvent représentées les sommités d'une côte qu'il aperçoit de loin : car les divers azimuths A qu'il obtient lui assignent les directions d'une suite de lignes droites divergentes, contenant les sommets qu'il a relevés. En répétant la même opération d'une autre station, il a encore une autre suite de rayons partant de celle-ci et conduits aux premiers signaux : et comme l'intervalle des deux stations est la distance parcourue par le navire, cette longueur est connue en grandeur et en direction par rapport au méridien du lieu. Chacun des signaux est donc figuré sur cette carte, par l'intersection des deux lignes qui représentent les rayons visuels correspondans.

Mais le peu de précision des observations faites avec la boussole, surtout sur un navire plus ou moins agité par les vents, ne permet pas de compter sur les résultats obtenus par cet instrument. On préfère donc les relèvemens astronomiques; c'est le sujet que nous allons traiter.

239. M est un signal (fig. 37) dont un observateur placé au point C veut avoir l'azimuth, c'est-à-dire que Z étant le zénith, ZM le vertical du signal, on demande l'angle que fait le plan vertical ZCM avec le méridien du lieu; S est un astre quelconque, en un lieu de son cours, SZC son vertical. La réfraction et la parallaxe changent le lieu apparent de cet astre S, qu'on voit un peu plus haut en $s$, dans le même vertical SZC, que s'il était vu du centre de la Terre et s'il n'y avait pas d'at-

mosphère. Si S est la Lune, on la voit au contraire un peu plus bas : de même le signal M est vu en $m$.

On observe, à un instant quelconque, avec un instrument, la distance apparente de l'astre à l'objet, ou l'arc $sm = \delta$. Mais on peut calculer la dist. zénith. vraie SZ, d'après l'heure vraie si S est le Soleil, ou l'heure sid. s'il s'agit d'une étoile (n° 133); on en conclut ensuite la distance zénith. apparente $Zs = z$, en corrigeant de *réfr.—parall.* Il serait, au reste, facile de mesurer actuellement cet arc $z$, soit en même temps qu'on mesure $\delta$, par les observations simultanées de deux personnes, soit, ce qui est bien préférable, en prenant les dist. zénith. avant et après $\delta$, et réduisant les premières à être contemporaines à la dernière, par interpolation, comme on l'a déjà fait en plusieurs circonstances.

On prendra aussi la dist. zénith. apparente de l'objet M, savoir $mZ = z'$ : il sera bon que, pour éviter les influences atmosphériques sur la réfraction, l'arc $z'$ soit mesuré presque en même temps que $\delta$ et $z$.

En considérant l'œil C de l'observateur comme le centre d'une sphère de rayon arbitraire, d'où partent trois lignes droites indéfinies CZ, C$s$, C$m$, la surface sera rencontrée en trois points par ces lignes, d'où résultera un triangle sphérique $mZs$ dont les trois côtés $z$, $z'$ et $\delta$ sont connus. On en tirera donc la valeur de l'angle $sZm = SZM = a$, par les équ. (39), page 6, qui deviennent ici

$$2k = z + z' + \delta,$$

$$\cos^2 \tfrac{1}{2} a = \frac{\sin k . \sin (k - \delta)}{\sin z . \sin z'}.$$

Or, par l'heure de l'observation, ou la hauteur même de l'astre, on en sait trouver l'azimuth A (n° 225); on tire de ces données l'azimuth $x$ de l'objet M par l'équ. $x = A + a$, sous la condition de donner à A et $x$ le signe + quand ces azimuths sont comptés du nord vers l'ouest, et — du nord à l'est; et de prendre $a$ avec le signe + quand le signal M est à gauche de l'astre S, et avec — quand M est à droite : le tout précisément

comme il a été exposé pour la déclin. de l'aimant, page 350, car les choses se passent ici exactement de même.

Lorsqu'on observe le Soleil, on prend successivement les distances de l'objet $m$ à ses deux bords latéraux opposés, afin que la moyenne de ces arcs exprime la distance apparente $\delta$ du centre. On peut encore se contenter de mesurer la distance d'un bord seulement, et corriger du demi-diamètre de l'astre.

Par exemple, on a mesuré les distances des deux bords du Soleil à un signal; la moyenne a donné la distance apparente $\delta$ du centre, énoncée ci-après. On a trouvé en même temps la dist. zénith. $z$ de ce centre, ainsi que celle $z'$ de l'objet, savoir :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z =$ | 56°58′37″.... | sin.... | 9.9234779 |
| $z' =$ | 89.58.20..... | sin.... | 9.9999999 |
| $\delta =$ | 114.27. 8 | | |
| $2k =$ | 261.24. 5 | | — 9.9234778 |
| $k =$ | 130.42. 2..... | sin.... | 9.8797425 |
| $k-\delta =$ | 16.14.54..... | sin.... | 9.4468494 |
| | | | 19.4031141 |
| $\frac{1}{2}a =$ | 59.48. 7,8... | cos.. | 9.7015570 |
| $a =$ | 119.36.15,6 | azimuth de l'objet par rapport au Soleil, et à la gauche de l'astre. | |

L'observation ci-dessus a été faite le 31 mai 1828, à $4^h18'52''$, t. vr. du soir, en un lieu dont la latitude est 44°, ou $c = 46°$; et d'après la différ. des longitudes $1^h9'47''$ ouest, on a conclu l'heure contemporaine de Paris $= 5^h28'39''$, et par suite la déclin. du Soleil au même instant, savoir : D $= 21°59'19''$ B. La formule de la p. 339 donne le calcul suivant pour obtenir l'azimuth A de l'astre :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z =$ | 56°58′37″.... | sin.... | 9.9234779 |
| $c =$ | 46. 0. 0..... | sin.... | 9.8569341 |
| $d =$ | 68. 0.41 | | |
| $2k' =$ | 170.59.18 | | — 9.7804120 |
| $k' =$ | 85.29.39..... | sin.... | 9.9986557 |
| $k'-d =$ | 17.28.58..... | sin.... | 9.4777276 |
| | | | 19.6959713 |
| $\frac{1}{2}A =$ | 45.11.50..... | cos.. | 9.8479856 |

| | | | |
|---|---|---|---|
| On a | A = | 90.23.40 | azimuth du Soleil à l'ouest. |
| | $a$ = | 119.36.15,6 | azimuth à la gauche de l'astre. |
| | $x$ = | 209.59.55,6 | azimuth du signal du nord à l'ouest. |
| | = | —150. 0. 4,4 | ............... du nord à l'est. |
| | | 170. 0. 0 | relativ. à la boussole, aiguille à gauche. |
| | | 19.59.55,6 | déclin. de l'aimant du nord à l'ouest. |

On voit comment l'azimuth du signal une fois connu, une observation, avec la boussole, fait connaître la déclin. de l'aiguille aimantée, comme on l'a annoncé n° 237.

Remarquez que, pour la précision des observations, il convient que l'astre soit peu élevé sur l'horizon, parce que si l'arc $\delta$ de distance apparente était trop près du vertical, que, par exemple, l'angle que sa direction fait avec l'horizon fût de plus de 45°, la mesure qu'on en prendrait perdrait un peu de son exactitude.

Il ne faut pas non plus que l'arc $\frac{1}{2}a$ soit trop petit, parce que l'équ. dont nous nous servons donnant cet arc par un cosinus, le calcul n'aurait de précision qu'autant qu'on se servirait de tables à plus de 7 décimales. Il est donc bon que $a$ approche de 90°. Mais s'il n'en est pas ainsi, on se servira de la première équ. (39), p. 6, qui donne $\frac{1}{2}a$ par un sinus : cette équ. précisément ne conviendrait pas, si cet arc était voisin de 90°. Il est utile aussi de ne pas se contenter d'une seule mesure de $\delta$, mais de prendre la moyenne entre plusieurs, pour atténuer les erreurs d'observation.

240. Les azimuths se prennent très facilement avec un théodolite, instrument sur lequel on peut lire les angles observés tout réduits à l'horizon, parce qu'on les mesure sur un cercle dont le limbe est exactement horizontal. On dirige donc deux rayons visuels, l'un au signal, l'autre à l'astre, et on lit sur le limbe azimuthal l'angle formé par les plans verticaux de ces rayons, ou l'arc $a$ de distance angulaire entre les deux objets, réduite à l'horizon. Plusieurs de ces distances sont mesurées consécutivement, et l'on note les heures correspondantes; la moyenne $a$ entre ces distances répond sensiblement à la

moyenne des heures, quand la durée totale écoulée ne dépasse pas 10 à 12 minutes. On se trouve ainsi dispensé de recourir au calcul de $a$ par l'équ. précédente, ce qui donne au théodolite un grand avantage sur tous les instrumens propres à mesurer les angles.

Il n'est alors nécessaire de calculer que l'azimuth A de l'astre, à l'heure qu'on a indiquée (n° 225), pour en conclure celui du signal; mais on peut éviter le calcul de A, en choisissant l'instant où l'astre passe au méridien, parce qu'alors $A = 180°$. Comme, dans ce cas, le mouvement en azimuth est proportionnel au temps, on peut réitérer un grand nombre de fois les observations successives de la distance angulaire $a$ du signal à l'astre.

Après avoir calculé l'heure que doit marquer la pendule à l'instant où l'astre traverse le méridien (p. 155), pendant un quart d'heure environ, tant avant qu'après ce passage, on mesure des distances de l'astre au signal; la moyenne des distances répondra à la moyenne des heures, et ces deux moyennes seront connues. Cette dernière diffère peu de celle même du passage; il faudra la corriger, par interpolation, d'après le rapport des vitesses dans le sens de l'horizon, précisément comme on l'a fait si souvent (n°s 141, 165,...). On aura donc ainsi $a$, et même $x$, puisque A est nul, quand on compte l'azimuth à partir du midi s'il s'agit du passage au méridien inférieur, et $A = 180°$ pour le supérieur.

241. Dans les grandes opérations géodésiques très soignées, après avoir couvert la contrée d'un réseau de triangles dont on mesure tous les angles, et dont on calcule ensuite tous les côtés, ainsi qu'on l'a exposé n° 89, il est nécessaire, pour orienter le système, de connaître, avec un soin extrême, l'azimuth de l'un de ces côtés. On peut même calculer ensuite les azimuths de tous les autres côtés par l'équ. (2) du n° 89, et vérifier ensuite astronomiquement quelques-uns de ces azimuths calculés, pour s'assurer de l'exactitude de toute l'opération.

Pour obtenir l'azimuth d'une ligne, ou l'angle que son plan vertical fait avec le méridien, outre les procédés déjà indiqués,

on peut se servir de l'étoile polaire à l'instant de sa *plus grande digression*. Cette espèce d'observation étant très facile, et conduisant à des résultats fort précis, est même le procédé le plus usité en pareil cas. Voici en quoi il consiste.

La polaire $n$ (fig. 32) décrit en 24 heures sid. un petit cercle $nii'n$, autour du pôle $p$ : dans sa marche très lente, il arrive chaque jour un instant où cette étoile atteint son *maximum d'élongation*, ou sa plus grande distance au méridien, tant vers l'est en $i$, que vers l'ouest en $i'$. Cet instant est facile à connaître ; en effet, Z étant le zénith, la distance angulaire $pZi = A$ devient la plus grande, lorsque l'angle $i$ du triangle sphérique $pzi$ est de 90° : ce triangle est donc alors rectangle. En le résolvant, on trouve l'angle horaire $p$, la dist. zénith. $z$, et l'azimuth A de la polaire : on a $zp = 90° - l =$ colatitude $c$; $pi = 90° - D =$ dist. polaire $d$, $Zi =$ dist. zénith. $z$; angle $pZi = A$, angle $Zpi =$ angle horaire $p$ de l'étoile. Donc les formules ($q$, $m$, et $n$, p. 5) des triangles sphériques rectangles deviennent

$$\cos p = \operatorname{tang} d \cot c = \cot D \operatorname{tang} l,$$
$$\cos c \text{ ou } \sin l = \cos z \cos d = \cos z \sin D,$$
$$\cos l \sin A = \sin d = \cos D.$$

La première de ces équ. fait connaître l'angle horaire $p$ de la polaire à l'instant de sa plus grande digression, d'où résulte l'heure sid. vr. ou moy. correspondante (n° 124), et enfin l'heure que marque la pendule au même moment. Alors le mouvement azimuthal de l'étoile est nul, aussi bien que dans les instans voisins, où il est si lent, qu'il est permis de n'y pas avoir égard. On a donc le loisir d'observer la distance apparente $\delta = qi$ de l'étoile au signal dont on demande l'azimuth; ou plutôt, on prend pour $\delta$ la moyenne entre plusieurs de ces distances successivement mesurées.

La seconde de nos équ. donne la dist. zénith. vraie de l'étoile; en diminuant de l'effet de la réfraction, on a sa valeur apparente $Zi = z$. La 3ᵉ donne l'azimuth A.

Dans le triangle sphérique $qZi$, les trois côtés sont connus, savoir : $qi = \delta$, $Zi = z$, $qZ = z'$ distance apparente du signal au zénith ; on trouvera donc l'angle $qZi = a$ formé par les verticaux de l'astre et du signal, en employant l'équ. du n° 239. La formule $x = A + a$ reçoit donc enfin son application, en donnant aux lettres les signes qu'exige la position relative des objets, précisément comme à la p. 350. On obtient ainsi, avec une grande exactitude, l'azimuth $x$ du signal, surtout si cet objet est suffisamment éloigné du méridien.

Par exemple, le 7 décembre 1830, on trouve pour la position de la polaire, corrigée de la précession, de la nutation, etc.,

$$AR\star = 1^h\,0'\,22'',03, \quad D = 88^\circ\,24'\,39'',33,$$

dans le lieu dont la latitude est 43° 7′ 20″ (à Toulon) ; on se prépare à l'observation par le calcul suivant, où la réfraction est prise en ayant égard au baromètre et au thermomètre (n° 68).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| tang $l$...... | 9.9715130 | sin $l$.... | 9.8347747 | cos D.... | 8.4429658 |
| cot D...... | 8.4431331 | sin D.— | 9.9998330 | cos $l$...— | 9.8632617 |
| cos $p$...... | 8.4146462 | cos $z$.... | 9.8349417 | sin A.... | 8.5797041 |
| $p =$ | 88°30′40″55 | $z =$ | 46°51′25″7 | A = | 2°10′38″51 |
| 4 fois = | 5h54. 2,70 | Réfr. | — 1. 1,2 | Azimuth à la digression | |
| $AR\star =$ | 1. 0.22,03 | | 46.50.24,5 | du nord-ouest. | |
| $AR\odot$ m. = | —17. 2.57,48? | Dist. zénith. app. | | | |
| | 13.51.27,25 | à la digression. | | | |
| Table I....— | 2.16,21 | | | | |
| | 13.49.11,04 | heure moy. de la digression vers l'ouest. | | | |
| | — 1.51,64 | avance de la pendule sur t. moy. | | | |
| | 13.47.19,40 | h. de la pendule à la digression ouest. | | | |

On a trouvé $z' = 89^\circ\,17'\,50'',5$ pour la dist. zénith. app. du signal vers l'heure qu'on vient de trouver ; on fait éclairer ce signal, et l'on en mesure plusieurs distances à l'étoile polaire. Nous supposerons que la moyenne de ces distances ait été corrigée par interpolation, pour l'obtenir telle qu'elle était à l'heure assignée ci-dessus pour l'élongation ; cette distance est $\delta$ ci-après. Voici le calcul de $a$ par l'équ. de la p. 356.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $z =$ | 46°50′24″5... | sin.... | 9.8629944 |
| $z' =$ | 89.17.50,5... | sin.... | 9.9999673 |
| $\delta =$ | 103.18.23,0 | | |
| $2k =$ | 239.26.38 | | — 9.8629617 |
| $k =$ | 119.43.19..... | sin.... | 9.9387407 |
| $k - \delta =$ | 16.24.56..... | sin.... | 9.4511751 |
| | | | 19.5269541 |
| $\frac{1}{2}a =$ | 54.32.41,5... | cos... | 9.7634770 |
| $a =$ | +109. 5.23,0... | signal à gauche de l'étoile. | |
| $A =$ | + 2.10.38,51.. | étoile à l'ouest du méridien. | |
| $x =$ | 111.16. 1,51.. | azim. du signal du nord vers l'ouest, | |
| ou | 68.43.58,5 | ............ du sud vers l'ouest. | |

*Des marées.*

242. L'attraction du Soleil sur les eaux de la mer force la partie de cette masse liquide qui regarde actuellement cet astre à s'élever vers lui, sous la forme d'une protubérance, parce que ces eaux étant plus voisines du Soleil que le centre de la Terre, sont plus attirées que ce corps solide, et qu'en outre elles peuvent prendre un mouvement isolé. A la région diamétralement opposée, le même effet se produit; car les eaux y étant plus éloignées du Soleil que le centre du globe, sont moins attirées que lui et restent en arrière. D'une part, c'est l'eau des mers qui s'élève vers l'astre, soulevée par l'attraction; de l'autre, c'est au contraire la Terre qui s'élève plus que les eaux.

Deux montagnes aqueuses opposées s'avancent à mesure que la Terre tourne, pour se trouver sans cesse dans la direction de la ligne qui joint le centre de la Terre à celui du Soleil. Ces masses, dans leur progression, s'élancent sur les rivages pour les envahir; tandis qu'au contraire à 90° de distance en longitude, la mer est affaissée, parce qu'elle fournit les eaux nécessaires pour alimenter le flux. Le Soleil causera donc deux marées par jour, savoir deux flux et deux reflux.

La Lune produit aussi, par la même raison, deux marées par jour; et même le calcul montre que la proximité de cet

astre compense la petitesse de la masse, au point que sa marée est triple de celle du Soleil.

Il devrait donc y avoir quatre marées chaque jour, deux solaires et deux lunaires; mais les eaux se trouvant soumises à ces deux actions simultanées, les phénomènes se composent entre eux, et se réduisent à deux marées. A la pleine et à la nouvelle Lune, les deux astres agissant dans la même direction à peu près, la marée est la somme des deux; elle en est la différence dans les quartiers, parce que la haute mer lunaire arrive précisément lorsque la basse mer solaire se fait sentir, et réciproquement. Dans toutes les autres situations relatives du Soleil et de la Lune, la marée de l'un des deux astres ne tend qu'à avancer ou retarder, accroître ou diminuer celle de l'autre, selon les positions que la résultante des deux forces se trouve avoir.

243. C'est donc la résultante des actions du Soleil et de la Lune qu'il faut considérer; c'est elle qui détermine l'intensité de l'effet produit, et l'époque où il se fait. On conçoit donc que cette résultante peut être calculée, et qu'on peut en conclure l'instant où son énergie est la plus grande. Mais il faut surtout avoir égard au retard que causent la configuration du rivage, la résistance des eaux, la direction des courans et des vents, leur puissance, etc.

La résultante des forces qui produisent la marée dépend de la position relative des deux astres, l'un à l'égard de l'autre, et relativement à l'équateur terrestre. Ainsi, la marée du Soleil est la plus grande aux équinoxes, instant où l'astre est dans ce plan et où il exerce toute sa puissance sur les eaux des deux hémisphères. Quand la Lune est dans l'équateur, la marée lunaire est aussi plus forte. Le 1er janvier, le Soleil est plus proche de nous; la marée solaire sera donc agrandie; si la Lune est périgée, sa marée le sera pareillement. Vers les solstices, ou lorsque la Lune est apogée, la marée de chacun de ces deux astres se trouve affaiblie. En combinant ces diverses circonstances, on voit que les marées équinoxiales sont les plus fortes si la Lune est périgée et sur l'équateur (dans son

nœud) ; elles sont les plus faibles aux solstices, quand la Lune est apogée et a une grande déclinaison.

En faisant abstraction des circonstances variables, qui ne peuvent être considérées que comme modifiant accidentellement les effets, on peut prédire l'heure et la grandeur de la marée, à toute époque, en s'en tenant aux causes régulières qui la produisent ; causes qui résultent de l'action du Soleil et de la Lune, modifiée par la figure des côtes et des localités, dont l'effet est constant.

244. Un fait d'expérience qui a été universellement constaté, c'est que la marée d'un jour quelconque est déterminée par les circonstances où se trouvaient les deux astres un jour et demi avant. Ainsi, la marée qui a lieu aujourd'hui, telle qu'on l'observe, eu égard à l'heure où elle se produit et à son intensité, est précisément celle qui devait arriver il y a 36 heures. La marée d'une syzygie ne se réalise dans toute sa force que 36 heures après la nouvelle ou la pleine Lune, etc.

On a beaucoup cherché à expliquer ce fait, qui ne peut être révoqué en doute.

Sans nous arrêter ici à ces discussions, prenons ce retard comme un fait certain, et voyons comment on peut prédire l'heure ou la hauteur d'une marée, sans avoir égard à l'effort des vents ou des causes accidentelles. Et d'abord, occupons-nous de trouver l'heure.

245. Les forces qui produisent la marée sont les actions du Soleil et de la Lune, c'est-à-dire leur résultante, dont la direction dépend de la situation relative de ces astres et de leurs distances à la Terre. Les causes constantes qui retardent cet effet sont l'évènement produit seulement 36$^h$ après l'action, et le retard constant dû aux circonstances de localités; c'est ce qu'on appelle l'*établissement du port*. Les marins ont des tables de ce retard pour chacun des ports les plus fréquentés. Il leur importe beaucoup de connaître l'heure de la marée, parce que l'entrée n'est souvent ouverte que vers cet instant, et qu'on ne peut arriver ou partir que quand ce phénomène se produit. La table de la p. 378 est relative aux divers ports de

France. Nous indiquerons plus tard comment on peut trouver l'établissement du port en un lieu donné.

Voici la formule qui sert à trouver l'heure de la haute mer en un lieu dont la longitude $l$ est connue, $h$ étant l'heure du passage de la Lune au méridien de Paris, telle qu'on la trouve pour chaque jour dans la *Conn. des Tems* (p. 3 des divers mois) :

*Pleine mer* $= (h \pm 2',1 \times l) +$ *correction* $+$ *établissement.*

La longitude $l$ du lieu est exprimée en heures et fractions ; on prend le signe — quand elle est orientale. Les deux premiers termes donnent l'heure du passage de la Lune au méridien du lieu. Cette heure n'est pas très exacte, parce qu'on suppose ici que la marche de la Lune en asc. dr. est constamment de 2',1 par heure, et l'on sait bien qu'elle est variable (n° 80) ; mais cela suffit pour une opération où la précision des minutes n'est pas nécessaire, parce que la théorie néglige les causes accidentelles, et d'autres influences plus ou moins grandes. On peut, au reste, remplacer ces deux premiers termes $h \pm 2',1 . l$, par l'heure du passage plus exactement déterminée. (*V.* p. 55 et 160.)

Cette heure du passage sert à trouver le troisième terme, appelé *correction*, à l'aide de la table XIII. Comme l'intensité de l'attraction de la Lune dépend de sa distance à la Terre, c'est-à-dire de sa parallaxe, ou de son demi-diamètre apparent, qui sont connus (n° 45) ; cette correction se prend dans la colonne qui porte en haut la valeur actuelle de cette quantité ; cela explique les termes de *périgée*, *apogée* et *moy. distance*, qui s'y trouvent inscrits. On choisit celui des nombres qui, dans la colonne dont il s'agit, répond à la ligne horizontale où se trouve l'heure du passage de la Lune au méridien.

A cet égard, il faut observer qu'on a tenu compte, dans la formation de cette table, du retard d'un jour et demi des marées (n° 244) ; ainsi, quand on prend le terme qui répond à $6^h$, ce terme y est placé, au lieu de se trouver en face de $4^h 48'$, parce que $36^h$ avant, le passage se faisait $1^h 12'$ plus

tôt. Du reste, l'interpolation permet de trouver les valeurs qui répondent à toutes les heures et toutes les distances lunaires, c'est-à-dire à toutes les valeurs de la parallaxe ou du demi-diamètre de la Lune.

Nous donnerons plus tard la loi de formation de cette table; mais avant nous ferons des applications de notre équ., pour montrer comment on doit diriger le calcul.

246. L'heure qu'on obtient pour la haute mer est, en temps solaire vrai astronomique (nos 8 et 32), comptée de 0 à $24^h$ d'un midi à l'autre; pour avoir l'heure moyenne, dont les marins font toujours usage, il faut ajouter l'*équ. du temps* (n° 108). Cette remarque importe surtout dans les mois où l'heure vraie diffère notablement de l'heure moyenne, et aussi dans les lieux où les mouvemens de la mer se font avec rapidité; car aux instans de mer haute et de mer basse, qui sont des *maxima* et *minima* de hauteur, la mer reste quelque temps stationnaire, et sa marche fait peu de progrès; mais presque tout à coup, on la voit ensuite monter ou descendre avec rapidité.

Aussi, lorsqu'on veut observer les hauteurs des marées, et marquer les heures où le phénomène s'est produit, comme l'instant précis en serait incertain pendant un temps plus ou moins long, on note les heures où la mer s'est trouvée à même hauteur tant en montant qu'en descendant, et le milieu entre ces heures, ou leur moyenne, est considérée comme celle du *maximum* ou du *minimum*, ce qui est exact, à fort peu près.

Toutefois, il faut dire que la mer emploie toujours plus de temps à descendre qu'à monter, en sorte que la basse mer n'est pas le milieu entre deux hautes mers consécutives. On trouve à Brest 15 à 20 minutes de différence entre leurs durées. Au Havre, j'ai remarqué que la basse mer est près de $2^h$ de plus à monter qu'à descendre : c'est même un des avantages qu'offre ce port, parce que l'entrée en est plus long-temps possible. Cet effet doit être attribué aux eaux affluentes à l'embouchure de la Seine. Les divers ports présentent chacun une inégalité de ce genre, dépendante des localités.

247. On demande l'heure de la haute mer à Brest, le 3 octobre 1830? La longitude de cette ville est 27′ 18″ ouest de Paris, ou $l = +0^h46$; l'établissement du port est $3^h 33'$; la Lune passe ce jour au méridien de Paris, à $13^h 38' = h$; la parallaxe est 61′ 9″ (Lune périgée). Voici le calcul :

| | |
|---|---|
| Passage ☾ au méridien de Paris | $13^h 38'$ |
| $2',1 \times 0^h,46 = 1'$ | $+ 1,0$ |
| Correction pour $13^h 39'$ et parall. 61′ | $- 26,8$ |
| Établissement du port | 3.33 |
| Haute mer, le 3 octobre, à Brest, en temps vrai | 16.45,2 |
| Demi-diff. entre les passages des 3 et 4 | 29 |
| Haute mer le 4 octobre soir (somme $- 12^h$) | 5.14,2. |

Ce calcul ne se rapporte, en effet, qu'aux marées du 4 octobre matin et soir; il faudrait refaire le calcul pour le 2, afin de trouver les hautes mers du 3.

Quelle est l'heure de la marée, à l'île Maurice, le 20 septembre 1830? On a $l = -3^h 40' 33'' = -3^h,67$; établissement du port $= 12^h 30'$; parallaxe, 54′ (apogée).

| | |
|---|---|
| Passage ☾ au méridien de Paris | $2^h 28',0$ |
| $-3,67 \times 2',1 = -7',7$ | $- 7,7$ |
| Correction pour $2^h 20'$ et parall. 54′ | $- 43,4$ |
| Établissement du port | 12.30,0 |
| Haute mer le 20 septembre, en temps vrai, à | 14. 6,9 |
| Demi-diff. entre les passages des 20 et 21 | 22,0 |
| Haute mer le 21 au soir (somme $- 12^h$), à | 2.28,9. |

Les marées arrivent donc le 21 septembre, à $2^h 6',9$ du matin, et à $2^h 28',9$ du soir, en temps civil vrai.

248. Le plus souvent, ce n'est pas seulement l'heure d'une marée particulière qu'on veut déterminer; on demande celles de tous les jours d'un mois. Le calcul ci-dessus doit être répété pour les dates successives, comme on le voit dans l'exemple ci-après, où il s'agit de trouver les hautes mers pour tout le mois d'août 1830 à Brest. Le second terme de notre formule est alors $2',1 . l = + 1',0$; ainsi, il faut ajouter 1′ à toutes les heures du passage de la Lune au méridien de Paris, indiquées dans la *Conn. des Tems*.

| Août, le | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Parall. . | 56′ | 57′ | 58′ | 58′ | 59′ | 59′ | 60′ |
| $h$ = | $9^h41'0$ | $10^h33'0$ | $11^h27'0$ | $12^h21'0$ | $13^h14'0$ | $14^h8'0$ | $15^h1'0$ |
| Corr. = | +28,7 | +19,2 | + 7,0 | − 6,9 | − 20,6 | − 34,8 | − 46,5 |
| Étab. = | 3.33,0 | 3.33,0 | 3.33,0 | 3.33,0 | 3.33,0 | 3.33,0 | 3.33,0 |
| Éq. t. = | + 6,0 | + 6,0 | + 5,9 | + 5,8 | + 5,7 | + 5,6 | + 5,5 |
| T. m. = | 13.48,7 | 14.31,2 | 15.12,9 | 15.52,9 | 16.32,1 | 17.11,8 | 17.53,0 |

| Août, le | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 | 13 | 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Parall. . | 60′ | 60′ | 59′ | 59′ | 59′ | 58′ | 58′ |
| $h$ = | $15^h54'0$ | $16^h46'0$ | $17^h40'0$ | $18^h35'0$ | $19^h31'0$ | $20^h25'0$ | $21^h21'0$ |
| Corr. = | −56,7 | −62,4 | − 61,7 | − 46,5 | − 16,4 | + 10,2 | + 22,7 |
| Étab. = | 3.33,0 | 3.33,0 | 3.33,0 | 3.33,0 | 3.33,0 | 3.33,0 | 3.33,0 |
| Éq. t. = | + 5,4 | + 5,3 | + 5,1 | + 5,0 | + 4,8 | + 4,6 | + 4,5 |
| T. m. = | 18.35,7 | 19.21,9 | 20.16,4 | 21.26,5 | 22.52,4 | 24.12,8 | 25.21,2 |

| Août, le | 15 | 16 | 17 | 18 | 19 | 20 | 21 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Parall. . | 58′ | 57′ | 57′ | 56′ | 56′ | 55′ | |
| $h$ = | $22^h15'0$ | $23^h7'0$ | $23^h57'0$ | » | $0^h44'0$ | $1^h30'0$ | etc. |
| Corr. = | + 20,1 | +12,8 | + 0,7 | » | −11,0 | −25,6 | etc. |
| Étab. = | 3.33,0 | 3.33,0 | 3.33,0 | » | 3.33,0 | 3.33,0 | etc. |
| | + 4,3 | + 4,1 | + 3,9 | » | + 3,5 | + 3,2 | etc. |
| | 26.12,4 | 26.56,9 | 27.34,6 | » | 4.9,5 | 4.40,6 | etc. |

La longitude des divers ports de France n'apportant qu'une minute au plus de différ. à l'heure du passage de la Lune au méridien, cette durée est absolument négligeable dans le calcul. Or, les opérations se trouvent alors les mêmes pour toute la France, à l'exception de l'établissement du port. On pourrait donc donner chaque année ces calculs tout faits, pour toutes les dates, dans la *Conn. des Tems*, et il ne resterait plus pour déterminer l'heure de la haute mer dans un port de France, qu'à ajouter son établissement à tous ces résultats numériques.

249. Les heures étant ici comptées de 0 à 24 d'un midi au suivant, lorsqu'on voit que le 1er août la marée est à $13^h\,49'$ t. moy., il faut prendre, en temps civil, le 2 août à $1^h\,49'$ du matin. Quant à celle du 1er août, on la trouve en faisant le calcul pour le 31 juillet (il vient $12^h\,54',8$, ou $54',8$ après mi-




nuit). On a de même la haute mer du 3 août à $2^h 31',2$ du matin; celle du 4 à $3^h 12',9$, etc....

Lorsqu'on voit que, le 13, la marée est à $24^h 12',8$, il faut prendre le 14 à $0^h 12',8$ (après midi), en ôtant $24^h$ de la somme. Il n'y a aucun nombre pour le 18, parce que ce jour la Lune ne passe pas au méridien (*v.* n° 42) : mais on a trouvé $27^h 34',6$ pour le 17, ce qui équivaut à $3^h 34',6$ après midi du 18.

250. Presque tous les jours il y a deux marées, et notre opération n'en fait connaître qu'une seule : pour obtenir l'autre, il faudrait se servir de l'heure du passage au méridien inférieur; mais il est plus court de prendre l'heure du milieu entre celles des deux marées voisines. Or, ce calcul est très facile; car si $a$ désigne l'un des nombres qu'on vient de déterminer, et $a + \delta$ le suivant, la somme est $2a + \delta$, dont la moyenne est $a + \frac{1}{2}\delta$. Ainsi, il suffit d'ajouter à tous les nombres déjà obtenus, la demi-différence de chacun à celui qui le suit.

On compose ainsi la table suivante de toutes les heures de temps moyen, où la haute mer arrivera dans le mois d'août 1830.

| | Matin. | Soir. | | Matin. | Soir. | | Matin. | Soir. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 0h54'8 | 1h21'8 | 8 | 5h53'0 | 6h14'4 | 15 | 0h46'0 | 1h21'2 |
| 2 | 1.48,7 | 2. 9,9 | 9 | 6.35,7 | 6.58,8 | 16 | 1.46,8 | 2.12,4 |
| 3 | 2.31,2 | 2.52,0 | 10 | 7.21,9 | 7.49,2 | 17 | 2.34,6 | 2.56,9 |
| 4 | 3.12,9 | 3.32,9 | 11 | 8.16,4 | 8.51,4 | 18 | 3.15,7 | 3.34,6 |
| 5 | 3.52,9 | 4.12,5 | 12 | 9.26,5 | 10. 9,5 | 19 | 3.52,6 | 4. 9,5 |
| 6 | 4.32,1 | 4.51,9 | 13 | 10.52,4 | 11.32,6 | 20 | 3.25,1 | 4.40,6 |
| 7 | 5.11,8 | 5.32,4 | 14 | » | 0.12,8 | 21 | 4.57,2 | etc. |

On n'a inscrit aucun nombre le 14 au matin, parce qu'alors la marée passant du matin au soir, tombe après midi. Cela vient de ce que les marées retardent chaque jour de $50' \frac{1}{2}$ en terme moyen, et que par conséquent à chaque lunaison synodique, il y a un jour qui n'a pas deux hautes mers : l'une des marées arrive un peu avant minuit, l'autre un peu après midi qui suit. (*V.* n° 42.)

Nous ne marquons pas ici les heures des basses mers : cet instant a par lui-même peu d'importance ; mais en outre ces phénomènes n'arrivent pas à l'heure du milieu entre les deux hautes mers voisines.

On voit combien des tables semblables à la précédente seraient utiles aux marins, qui sont souvent trompés par les prédictions fautives que les journalistes des ports publient chaque jour : les erreurs sont souvent si notables, que les marins en concluent que la science est fautive, et que leur expérience doit être préférée ; tandis que s'il ne fallait plus qu'ajouter l'établissement du port à tous les nombres d'une table toute calculée, aucune erreur ne pourrait être commise.

251. Expliquons maintenant la construct. de notre table XIII.

On trouvera dans le volume des *Prix de l'Académie* pour 1740, le beau mémoire de D. Bernoulli sur les marées. Ce sont les formules de cet illustre géomètre qu'on s'accorde à suivre dans le calcul des heures de ces phénomènes. Il est vrai qu'on y néglige des élémens très importans, tels que les changemens de déclin. des astres, et ceux de la distance du Soleil. Laplace, en traitant à fond ce sujet, a réussi à donner une théorie complète sur cette matière très délicate. Malheureusement sa formule est si compliquée, que les tables qu'on en pourrait conclure seraient d'un usage très difficile.

On s'en tient donc au travail de D. Bernoulli, surtout lorsqu'on s'aperçoit que la table qu'on en tire est d'un usage commode, ainsi qu'on vient de le voir, et que les résultats du calcul se trouvent sensiblement d'accord avec les faits observés. Il paraît donc que les hypothèses assez hardies de ce savant géomètre n'altèrent pas assez ses formules pour les mettre en contradiction avec l'expérience. Tels sont les motifs qui ont conduit à préférer cette théorie à d'autres plus précises. D'ailleurs, les circonstances accidentelles, et particulièrement la force et la direction des vents, apportent souvent un peu de trouble dans les expériences ; et comme on n'a jamais besoin de connaître l'heure avec la précision de quelques minutes, et qu'à l'instant du *maximum* d'élévation les eaux conservent

quelque temps une sorte de stagnation momentanée, on a trouvé toute satisfaction à se servir des tables de Bernoulli, et l'on s'en est tenu à elles.

Ce savant démontre que si l'on suppose que l'attraction de la Lune à la moyenne distance est deux fois et demie celle qu'exerce le Soleil, on a

$$B = \frac{4\sin^2\varphi - 7}{2\sin\varphi\cos\varphi}, \quad \sin\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left(1 + \frac{B}{\sqrt{4+B^2}}\right)}.$$

$\varphi$ est l'arc de distance en asc. dr. du Soleil à la Lune à l'instant qu'on considère; B est un arc auxiliaire que la première équ. détermine (cet arc est négatif et $> 1$); $\alpha$ est l'arc d'équateur compris entre le méridien actuel de la Lune et celui des points qui ont la haute mer, c'est-à-dire le temps qui s'écoule entre le passage de la Lune au méridien du lieu, et l'instant de la haute mer.

Voici maintenant comment je rends ces formules propres au calcul des logarithmes. Je pose

$$-\tfrac{1}{2}B = \tang\psi = \frac{3,5 - 2\sin^2\varphi}{2\sin\varphi\cos\varphi} = \frac{2,5 + \cos 2\varphi}{\sin 2\varphi};$$

et il vient

$$\sin\alpha = \sqrt{\tfrac{1}{2}\left[1 - \frac{\tang\psi}{\sqrt{(1+\tang^2\psi)}}\right]}$$

$$= \sqrt{\tfrac{1}{2}(1 - \tang\psi\cos\psi)} = \sqrt{\frac{1-\sin\psi}{2}}.$$

Savoir $\sin\alpha = \sin(45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi)$, et $\alpha = 45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi$.

Et comme la marée d'un jour est celle qui aurait dû avoir lieu 36 heures avant, qu'en $36^h$ la Lune s'avance de $19^\circ$ environ, Bernoulli prend $20^\circ$ en nombre rond, pour le retard des marées dû à cette cause. Changeons donc $\varphi$ en $\varphi - 20^\circ$, et il vient les équations

$$\tang\psi = \frac{2,5 + \cos 2(\varphi - 20^\circ)}{\sin 2(\varphi - 20^\circ)},$$

$$\alpha = 45^\circ - \tfrac{1}{2}\psi.$$

La 1re détermine l'arc auxiliaire $\psi$, pour chaque distance $\varphi$ de la Lune au Soleil ; la 2e donne le retard $\alpha$ de la haute mer sur l'heure du passage de la Lune au méridien. La table qu'on tire de ces formules est un peu différente de celle que donne Bernoulli ; mais cela vient de ce que notre calcul est plus précis. On réduit d'ailleurs les arcs $\varphi$ et $\alpha$ en temps ; $\varphi$ exprime l'heure solaire du passage de la Lune au méridien, et $\alpha$ la durée du retard de la haute mer sur celle de ce passage.

$\phi - 20^\circ$ croissant de o à $90^\circ$, $\alpha$ est négatif, comme exprimant un retard; mais au-delà et jusqu'à $180^\circ$, $\alpha$ prend le signe $+$ et désigne une avance. Il faut en général ajouter $\alpha$ avec son signe, à l'heure $\phi$ du passage. L'intervalle d'une marée à celle du lendemain est le plus petit dans les syzygies, et le plus grand dans les quadratures ; on trouve aisément le retard *maximum* ou *minimum*. Lorsque $\sin(\phi - 20^\circ) = \sqrt{0,7}$, le retard ou l'avance $\alpha$ de la haute mer sur le passage est le plus grand. L'intervalle entre les marées du soir ou du matin de deux jours consécutifs est alors précisément égal au jour lunaire de $24^h\, 50'\, \frac{1}{2}$. On trouve que ce *maximum* répond à $\sin \alpha = \sqrt{\frac{1}{2}(1 - \frac{1}{5}\sqrt{21})}$, ou bien $\varphi = 76^\circ\, 47'\, 19''$, ce qui donne $\alpha = 11^\circ\, 47'\, 21''$. Ainsi ; en temps, le *maximum* des retards ou avances est $\alpha = 47'\, 9'',4$, qui répond à $\varphi = 5^h\, 7'\, 9''$, et $= 9^h\, 32'\, 51''$. C'est lorsque la Lune passe au méridien à ces heures que le retard ou l'avance est le plus considérable.

En général, deux valeurs de $\varphi$, telles que $\varphi$ et $\varphi'$, donnent pour $\alpha$ des nombres égaux en signes contraires, quand on a $\varphi + \varphi' = 14^h\, 40'$, parce que les valeurs de $\varphi - 20^\circ$, ont alors $180^\circ$ ou $12^h$ pour somme.

Voici comment procède cette table ainsi formée :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\varphi = 20^\circ = 1^h 20'$, | $\alpha = 0'\, 0''$, | $\varphi = 7^h 20'$, | $\alpha = 0'$, |
| $\varphi = 25 = 1.40$, | $\alpha = -5.42,3$, | $\varphi = 7.40$, | $\alpha = +11.46'',2$, |
| $\varphi = 30 = 2$, | $\alpha = -11.32,3$, | $\varphi = 8.\ 0$, | $\alpha = +24.43,7$, |
| $\varphi = 35 = 2.20$, | $\alpha = -16.53,9$, | $\varphi = 8.20$, | $\alpha = +31.36,9$, |
| $\varphi = 40 = 2.40$, | $\alpha = -22.16,1$, | $\varphi = 8.40$, | $\alpha = +40.40,7$, |
| $\varphi = 45 = 3$, | $\alpha = -27.23,8$, | $\varphi = 9.\ 0$, | $\alpha = +45.\ 2,3$, |
| etc., | | etc. | |

252. Ceci se rapporte au cas où la Lune est à la moyenne distance de la Terre. D. Bernoulli trouve que son action étant $\frac{5}{2}$ dans ce cas, est 3 au périgée, et 2 à l'apogée. Or, 3 : $\frac{5}{2}$ :: 6 : 5, et 2 : $\frac{5}{2}$ :: 4 : 5; d'où il conclut que quand la Lune est périgée, le retard n'est que les $\frac{5}{6}$; et lorsqu'elle est apogée, il est les $\frac{5}{4}$ de celui qui a lieu dans les moyennes distances. Ainsi, il faut diminuer de $\frac{1}{6}$, et augmenter de $\frac{1}{4}$ tous les nombres $\alpha$, pour obtenir les retards relatifs au périgée et à l'apogée.

On formera ainsi une table où trois colonnes seront en correspondance avec les nombres $\varphi$: dans la 3e, on inscrira les nombres $\alpha$ ci-dessus obtenus dans le cas des moyennes distances. Dans la 2e, on mettra ces mêmes nombres diminués de $\frac{1}{6}$ pour la Lune périgée; et enfin, dans la 4e, seront ces nombres $\alpha$ augmentés de $\frac{1}{4}$, pour le cas de l'apogée. Et quant aux valeurs de $\varphi$, elles exprimeront les heures des passages de la Lune au méridien. Voici le commencement de cette table.

| Pass. mérid. $\varphi =$ | ☾ périgée $\frac{5}{6}\alpha =$ | ☾ moy. dist. $\alpha =$ | ☾ apogée $\frac{5}{4}\alpha =$ |
|---|---|---|---|
| 0° ou 0h | + 18′ 33″,4 | + 22′ 16″,1 | + 27′ 50″,1 |
| 5° ou 20′ | + 14. 4,9 | + 16.53,9 | + 21. 7,4 |
| 10° ou 40′ | + 9.36,9 | + 11.32,3 | + 14.25,4 |
| 15° ou 1h | + 4,45,2 | + 5.42,3 | + 7. 7,9 |
| 20° ou 1h 20′ | 0. 0,0 | 0. 0,0 | 0. 0,0 |
| 25° ou 1h 40′ | — 4.45,2 | — 5.42,3 | — 7. 7,9 |
| 30° ou 2h 0′ | — 9.36,9 | — 11.32,3 | — 14.25,4 |
| etc. | etc. | etc. | etc. |

253. Cette table n'est pas encore celle que nous donnons. Pour $\varphi = 0$, on trouve que 0 répond à $\alpha = + 22'16'',1$ : or, il importe que zéro remplace cette quantité, ainsi qu'on va le voir. C'est pourquoi on retranche ce nombre de tous ceux de cette table : on obtient ainsi les colonnes *périgée*, *moyenne distance* et *apogée* de la table XIII, lesquelles répondent aux parallaxes horizontales 61′,4, 57′ et 53′,8. Les autres colonnes s'obtiennent ensuite par interpolation.

Il est évident qu'on a le droit de retrancher ainsi 22′ 16″,1 à toutes les *corrections*, pourvu qu'on ajoute ce même nombre après coup. C'est ce qu'on fait en prenant l'établissement du port plus grand du 22′ 16″,1, et les tables sont construites avec cette partie additive constante. En effet, comme zéro est maintenant venu en face de $0^h$, dans la colonne des moyennes distances, on voit qu'il n'y a, dans ce cas, aucune correction à apporter dans l'équ. p. 365, à l'époque des syzygies, ou quand la Lune est au méridien à midi ou à minuit. Donc, *l'établissement du port est l'heure de la haute mer dans les syzygies, quand la Lune est à sa moyenne distance*, ou quand sa parallaxe horizontale est 57′.

254. Comme pour trouver l'heure d'une marée, l'établissement du port doit être préalablement déterminé, il faut observer l'heure exacte de la haute mer le jour même de la syzygie, quand la Lune est dans ses moyennes distances.

Mais on peut trouver l'établissement du port à toute marée quelconque, où la mer est calme. En effet, observez l'heure de la pleine mer un jour donné, et tout sera connu dans l'équ. p. 365, excepté le dernier terme. On pourra donc en tirer la valeur de l'établissement du port. Ainsi, lorsqu'un navire aborde une côte inconnue, l'observation d'une seule marée peut donner l'établissement du port, quantité qui sera employée pour connaître les marées durant tout le temps du séjour sur ce rivage. Ce résultat, dû à une seule observation, manque, il est vrai, de précision, parce qu'il aurait fallu répéter ces expériences; mais cela suffit aux besoins de la navigation.

255. Non-seulement on sait à quelle heure doit arriver la haute mer, mais on peut encore en prédire l'élévation, en faisant toujours abstraction de la force des vents. Laplace a donné, dans sa *Méc. cél.*, une formule générale pour trouver la hauteur de la mer à tout instant donné. Mais ce n'est guère que dans certaines circonstances qu'il est utile de connaître la hauteur absolue des eaux; et comme les grandes marées produisent quelquefois des malheurs, il est très avantageux de se mettre en garde contre ces évènemens, en en calculant d'a-

vance les effets. Lorsqu'on veut lancer à la mer des bâtimens qu'on vient de construire ou de réparer, il importe aussi de savoir sur quelle hauteur de marée on peut compter, pour être assuré que le navire sera à flot.

Ainsi, ce ne sont ordinairement que les marées syzygies qui font le sujet des calculs, et c'est à la considération de ces dernières que nous nous bornerons ici, comme on le fait aussi dans la *Conn. des Tems.*

La formule de Laplace pour trouver la hauteur d'une marée syzygie, au-dessus de la moyenne entre la haute et la basse mer, a pour facteur cette constante $z$,

$$z = \frac{40}{163}\,(i^3 \cos^2 D + 3i'^3 \cos^2 D').$$

(*V. Méc. cél.*, t. II, p. 289.) D et D' sont les déclin. respectives du Soleil et de la Lune à l'instant de la syzygie; $i$ est $= \frac{1}{r}$, $r$ étant le rayon vecteur du Soleil, et prenant 1 pour sa valeur moyenne (log $r$ est donné à la page 7 de chaque mois, *v.* n° 51, 4°); $i'$ est la parallaxe horiz. actuelle de la Lune divisée par 57′ 1″ qui en est la valeur moyenne (*). (*V.* n° 44.)

256. Pour appliquer cette formule aux divers cas qui se présentent, désignons par $\Delta$ et $\Delta'$ les demi-diamètres du Soleil et de la Lune, exprimés en secondes, nous aurons

$$z = A\Delta^3 \cos^2 D + B\Delta'^3 \cos^2 D',$$

$$\log A = \overline{10}.44075, \quad \log B = \overline{10}.95665.$$

Par exemple, le 31 octobre 1830, la pleine Lune arrive à 5ʰ 25′ du soir, et l'on tire de la *Conn. des Tems*

| | | |
|---|---|---|
| $D = -$ | 14° 7′ 8″ | log cos = 9.986675 |
| $D' = +$ | 9.57.34 | log cos = 9.993405 |
| $\Delta =$ | 16. 9,1 | log $\Delta$ = 2.98637 |
| $\Delta' =$ | 16.44 | log $\Delta'$ = 3.00173 |

(*) On pourrait dire aussi que $i$ est le rapport du demi-diamètre du Soleil (à l'instant de la syzygie), divisé par son demi-diamètre moyen, qui est 16′ 1″,7; $i'$ est le même rapport pour la Lune, dont le demi-diamètre moyen est 15′ 33″,5. (*V.* l'*Uranographie*, p. 391 et 401.)

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| A...... | $\overline{10}.44075$ | B.... | $\overline{10}.95665$ | |
| $\Delta^3$...... | 8.95911 | $\Delta'^3$..... | 9.00519 | |
| $\cos^2$ D. | 9.97335 | $\cos^2$ D′ | 9.98681 | 0,236 |
| 0,236.. | $\overline{1}.37321$ | | $\overline{1}.94865$...... | 0,889 |
| | | Hauteur cherchée... | $z =$ | 1,125. |

Il est plus exact de donner à l'équ. ci-dessus la forme

$$z = Ci^3 \cos^2 D + FH^3 \cos^2 D',$$

$$\log C = \overline{1}.38987, \quad \log F = \overline{11}.26454.$$

H désigne la parallaxe horizontale de la Lune à l'instant de la syzygie.

Prenons pour application, la pleine Lune du 6 juin 1830, qui arrive à $2^h\,28'$ du soir. On trouve

| | | |
|---|---|---|
| D = | 22° 38′ 49″ | log cos D = 9.96515 |
| D′ = − | 17.39.29 | log cos D′ = 9.97904 |
| H = | 55.14 | log H = 3.52035 |

log. rayon vecteur $r = 0.006525$, $\log i = \overline{1}.99347$.

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| C....... | $\overline{1}.38987$ | F....... | $\overline{11}.26454$ | |
| $i^3$........ | $\overline{1}.98042$ | $H^3$...... | 10.56106 | |
| $\cos^2$ D... | 9.93030 | $\cos^2$ D′.. | 9.95808 | 0,1998 |
| 0,1998... | $\overline{1}.30059$ | | $\overline{1}.78368$..... | 0,6077 |
| | | Hauteur cherchée.... | $z =$ | 0,8075. |

C'est par ce calcul qu'on donne chaque année, pour toutes les syzygies, à la page 158 de la *Conn. des Tems*, les hauteurs des marées, telles qu'elles arrivent $36^h$ après cette époque. Il nous reste à montrer l'usage du nombre $z$, qui est commun à tous les rivages.

257. En observant attentivement les hautes mers qui arrivent $36^h$ après les syzygies des équinoxes, en un port quelconque, et lorsque la Lune est à sa moyenne distance à la Terre, on trouve pour moyenne de toutes les élévations une certaine quantité $a$ qui varie avec les lieux; elle peut être regardée, en chacun, comme le terme moyen constant de la hauteur de la mer à l'époque de l'équinoxe; mais selon que les attractions des deux astres s'exerceront avec plus ou moins d'avantages, les hautes

mers monteront au-dessus ou au-dessous de ce terme constant. Si la Lune est périgée et dans son nœud, son action sera la plus forte, et la mer s'élèvera au-dessus de la moyenne $a$ : au contraire, quand la Lune sera apogée, et aura une grande déclinaison, les eaux se tiendront au-dessous de ce terme.

Ainsi, la hauteur $a$ étant connue par expérience en un port, il ne s'agit que de comparer les hautes mers à cette élévation $a$, et de reconnaître combien le niveau montera à son égard. Le nombre $z$ obtenu ci-dessus est le multiplicateur de la constante $a$, en sorte qu'on a

$$\textit{hauteur absolue de la mer} = az.$$

Par exemple, on sait à Saint-Mâlo que $a = 5^m,98$ ; donc, $36^h$ après la syzygie, le 31 octobre 1830, où l'on a $z = 1,13$, la hauteur de la marée s'élèvera à $1,13 \times 5^m,98 = 6^m,76$. Voici le sens qu'il faut attacher à ces divers nombres. A Saint-Mâlo, lorsqu'à l'équinoxe, la Lune est à sa moyenne distance à la Terre, et en conjonction ou en opposition avec le Soleil, $36^h$ après, la mer s'élève à la hauteur de $5^m,98$ au-dessus de la moyenne entre les deux termes des hautes et basses eaux, pris pour niveau de comparaison. Le 2 novembre au matin ($36^h$ après la syzygie), la mer montera de $6^m,76$ au-dessus du même niveau. Cela suppose que les vents ne viendront pas troubler le phénomène.

On donne, dans la *Conn. des Tems*, les valeurs de $a$ pour divers ports de France; il serait important d'étendre beaucoup cette table, et les expériences sont à cet égard très faciles. En effet, il n'est pas nécessaire d'attendre, pour les faire, l'époque des syzygies équinoxiales à moyenne distance lunaire, car $36^h$ après toute marée de syzygie, on peut observer la hauteur absolue des eaux, et divisant cette hauteur par le nombre calculé $z$, le quotient est la constante $a$.

Cette équ. détermine aussi le plus grand abaissement des eaux; car la mer s'abaisse à peu près autant au-dessous de la surface d'équilibre, dans une basse mer, qu'elle s'élève au-dessus dans la haute mer qui lui correspond.

En changeant de port, $a$ change de valeur. A Granville, on a $a = 6^m,35$, en sorte que le 2 octobre 1830, où l'on a $z = 1,14$, le produit $az = 7^m,24$ indique que la mer s'élèvera de $7^m,24$ au-dessus du niveau moyen, et de $14^m,48$ ($43^{pi}8^{po}$) au-dessus des eaux de la basse mer voisine. C'est en ce port que les marées sont les plus considérables dans toute la France, circonstance qui est due aux localités.

La plus grande valeur dont $z$ soit susceptible est 1,178 ; la moindre est 0,67. La 1re a lieu quand la Lune est périgée, dans l'équateur, et que le Soleil est près de l'équinoxe : l'autre arrive au solstice d'hiver, quand la Lune est apogée et à sa déclin. *maximum*.

## *Établissement du port.*

***Heure de la pleine mer des syzygies, la Lune étant à moyenne distance.***

| | | | |
|---|---|---|---|
| Dunkerque, Calais | 11h45′ | Emb. de la Tamise, Groningue | 11h15′ |
| Boulogne, St.-Valery S.-S. | 10.40 | Liverpool, Ait Pointe | 11. 0 |
| Dieppe, Trépott | 10.30 | Douvres, Chester | 10.50 |
| Le Havre, Honfleur | 9.15 | Dublin | 9.45 |
| La Hongue | 8. 0 | Bristol, Anvers | 6.45 |
| Cherbourg, Bordeaux | 7.45 | Plymouth, Stockholm | 6. 5 |
| Saint-Michel, Granville | 6.30 | Jersey, Guernesey, Limerick | 6. 0 |
| Nantes | 6. 5 | Hambourg, Waterford | 5. 0 |
| Saint-Malo, Cancale | 6. 0 | Saint-Pierre de la Martinique, Édimbourg | 4.30 |
| Morlaix, Vannes | 5.15 | Cork, Galloway | 4.29 |
| Rochefort, Quimper | 4.15 | Lisbonne, Wardhus | 4. 0 |
| Port-Louis, Oleron | 4. 0 | Amsterdam, Rotterdam | 3. 0 |
| Ile d'Aix, Royan | 3.40 | Londres, les Orcades | 2.45 |
| La Rochelle, Le Croisic | 3.45 | Cadix, cap Bonne-Espér. | 2.30 |
| Brest, Concarneau | 3.33 | Flessingue, Rye | 0.30 |
| L'Orient, Bellisle, Bayonne | 3.30 | Ostende | 0.20 |
| Rouen | 2.45 | | |
| Portsmouth, Southampton | 11.40 | | |

# TROISIÈME PARTIE.

## COMPOSITION ET USAGE DES TABLES ASTRONOMIQUES.

### *Tables du Soleil.*

258. Le mouvement annuel de la Terre autour du Soleil s'accomplit d'occident en orient, dans la durée d'une année sidérale de $365^j 6^h 9' 10'',75 = 365^j,2563744$ (*V.* note p. 88, et l'*Uranographie*, n° 111); l'orbite est une ellipse dont le Soleil occupe le foyer, et qu'on nomme *Écliptique.* On donne aussi ce nom au cercle céleste suivant lequel la sphère étoilée est coupée par ce plan; mais ce mouvement se traduit à nos yeux par un mouvement apparent du Soleil suivant cette même ellipse, dans le même sens et dans la même durée.

Il en résulte que le rayon conduit de notre œil au centre du Soleil va marquer au ciel un point sans cesse différent, et que l'astre nous semble avoir parcouru chaque jour un arc d'un peu moins d'un degré : il traverse donc certaines constellations. Nous ne pouvons voir les étoiles qui sont actuellement dans la direction où se trouve le Soleil; mais elles seront bientôt visibles lorsque, par sa marche dirigée vers l'orient, il s'en sera éloigné suffisamment vers la gauche, car elles se lèveront le matin un peu avant cet astre. Dans les jours suivans, ces étoiles en seront plus loin, et elles anticiperont de plus en plus sur l'heure de l'apparition du Soleil à l'orient; elles se lèveront $1^h$, puis $2^h$, puis $3^h$ avant lui, etc. Elles se coucheront bientôt à son lever, ou se lèveront à son coucher, restant toute la nuit sous nos yeux; et ainsi de suite.

Toutes ces apparences, dues au mouvement réel de la Terre, importent bien plus à nos besoins que le véritable mouvement de ce globe, parce qu'elles sont conformes à ce que nous voyons. Il faut savoir, à tout instant, quel est le *lieu du Soleil*, c'est-

à-dire à quel point du ciel répond le rayon qui de notre œil va au centre de cet astre, et se prolonge jusqu'à la sphère céleste; aussi les tables sont-elles construites pour faire connaître ce lieu.

On suppose donc que la Terre est fixée dans l'espace au foyer de l'ellipse que le Soleil décrit en un an. Cette courbe est plane et a sa place bien marquée au ciel, par l'étude qu'on a faite des étoiles qui s'en trouvent voisines. (*Voyez* page 14 et les cartes de l'*Uranographie.*) Mais en quel point de l'écliptique se trouve actuellement le Soleil? c'est ce qu'il s'agit de déterminer.

Nous avons dit, n° 14, que la longitude d'un astre est un arc d'écliptique céleste compté depuis le point vernal ♈ (fig. 12) jusqu'au pied de l'arc perpendiculaire abaissé de l'astre sur l'écliptique. Soient DA le plan de l'équateur, CA celui de l'écliptique, ou plutôt les intersections de la sphère céleste par ces deux plans. Si l'on connaît l'arc AI, étendu depuis ♈ jusqu'au Soleil I, comme l'obliquité, ou l'angle $\omega$, est donnée; on saura en quel lieu de la courbe se trouve cet astre. Ainsi, pour en avoir la situation absolue dans l'espace, il ne restera plus à trouver qu'un élément, sa distance à la Terre : car la longitude en donnant le point I, fixera la position de la droite menée à l'astre, et la longueur du rayon vecteur en déterminera la position sur cette ligne.

259. Pour faciliter les calculs, les astronomes ont remarqué que les changemens de vitesse du Soleil sont renfermés dans d'étroites limites. Ils supposent d'abord à cet astre un mouvement circulaire et uniforme, avec une vitesse moyenne entre les deux extrêmes; sauf à corriger ensuite le résultat des erreurs dues à l'hypothèse. Par là ils trouvent aisément ce qu'ils appellent la *longitude moyenne*, formée de la longitude initiale, plus de l'espace décrit d'un mouvement uniforme dans le temps écoulé. Ils n'ont d'abord qu'une position approchée du Soleil, mais ils la modifient après coup pour la rendre conforme aux faits. On comprend que le mouvement d'un astre dont la vitesse est constante et connue, donnant des espaces parcourus proportionnels aux temps, il est très facile d'en trouver le lieu à tout instant, dès qu'on connaît celui où il était à une *époque*

désignée. On sait que la vitesse constante déterminée par cette supposition est de (*v.* n°. 73)

| | |
|---|---|
| 59′ 8″33022 | par jour moyen, |
| 2.27,847 | par heure, |
| 2,464 | par minute. |

En multipliant le premier de ces nombres par les jours écoulés *depuis l'époque*, c'est-à-dire depuis le moment pris pour origine, ou terme de départ, on aura le chemin décrit en longitude, qu'il faudra ajouter à la longitude de l'époque. Et même, s'il y a plus de 365 jours écoulés, on se servira des nombres suivans, où l'on a supprimé les circonférences complètes.

*Le mouvement moyen du Soleil en longitude est*

| | | |
|---|---|---|
| En un an de 365j......... | 11ˢ29°45′40″417566 | = — 14′ 19″552434, |
| En un an de 366j,......... | o. o.44.48,777560, | |
| En 4 ans, dont 1 bissext. | o. o. 1.50,120258, | |
| En 100 ans, dont 24 bissext. | 11.29.46.44,676458 | = — 13,15,323542, |

260. On prend pour *époque* (*), minuit temps moyen à Paris, qui sépare une année de la précédente (minuit du 31 décembre au 1ᵉʳ janvier). Il suit des derniers travaux de M. Bessel (*Conn. des Tems* 1831) que *la longitude moyenne du Soleil à l'époque ainsi fixée* pour l'an 1800 + T est

$$280°23'35'',525 + 27'',605844\,T + 0'',0001221805\,T^2 - \alpha.$$

Le nombre $\alpha$ se trouve en divisant T par 4, et suivant que

le reste = o, 1, 2 ou 3,
on a $\alpha$ = 59′8″,330, 14′47″,083, 29′34″,166, ou 44′21″,248.

La 2ᵉ colonne de la table XIV est composée sur cette formule. Cette longitude doit ensuite être augmentée de 59′8″,33022 pour chaque jour écoulé depuis l'époque jusqu'à la date proposée.

(*) Les astronomes sont dans l'usage de commencer le jour à midi; mais les tables de Delambre et les nôtres prennent minuit pour origine, comme dans le temps civil. Lorsqu'on se sert de ces tables, il ne faut pas oublier que ces 12ʰ de diff. y sont comprises.

Pour faciliter ce calcul, la table donne aussi ce mouvement pour 1 mois de 30 jours, pour 1 jour, 1 heure, etc.

| | |
|---|---|
| Ainsi, la longitude moyenne du Soleil, au commencement de l'an 1830, est........................................ | 9s 10° 7′ 49″6 |
| Pour l'avoir le 1er avril, comme il y a 90 jours écoulés (n° 76), on ajoute 3 fois 29° 34′ 9″,9, mouvement en 1 mois,........................................ | 2 28.42.29,7 |
| Longit. moy. ☉ le 1er avril 1830........................ | 0. 8.50.19,3. |

La table de Delambre donne la marche qui répond à toutes les dates de l'année, et on l'y trouve à vue (*).

261. Représentons l'état des choses par une figure. Soit PEAF l'écliptique (fig. 10), orbite elliptique que le Soleil paraît décrire : la Terre T semble fixée au foyer ; FE est la ligne des équinoxes, dont les prolongemens vont marquer au ciel les points ♈ et ♎. Soit décrit un cercle *afpe* du centre T, et concevons un mobile *m*, qui parcourt cette courbe d'un mouvement uniforme, ayant une vitesse tellement réglée, qu'il se trouve en *p* sur le rayon TP qui va au périgée P quand le Soleil est en ce point P, et que ces deux corps s'y retrouvent ensemble à chaque révolution. Le Soleil en P est animé de sa plus grande vitesse, et devance d'abord le mobile *p*, qui n'a qu'une vitesse moyenne constante; le rayon vecteur de S sera donc en avant de celui de *s*. Mais à mesure que le Soleil s'approche de l'apogée A, comme sa marche se ralentit, le mobile s'en rapproche et l'atteint : ils sont ensemble sur la droite TA, l'un en A et l'autre en *a*; se trouvant dans la même direction. Le Soleil a alors sa moindre vitesse, et est devancé à son tour par le mobile : mais l'astre accélérant sans cesse sa marche, l'atteint enfin au périgée P. Le Soleil se trouve donc sans cesse plus voisin de l'apogée A que le mobile.

(*) Notre table tient compte des changemens dus à M. Bessel; la longitude y est donc actuellement plus grande d'environ 7″ que dans les tables de Delambre. En général, on doit, pour l'an 1800 + T, ajouter aux époques de celle-ci + 2″,65 + 0″,144477 T à la longitude moy., et 64″,99 — 0,41015 T à celle du périgée.

262. Soit $s$ le lieu actuel du mobile, $Ts$ son rayon vecteur; l'angle $sTP = z$ formé par ce rayon avec celui du périgée P est appelé *anomalie moyenne*, pour la distinguer de l'angle que fait avec TP le rayon vecteur TS du Soleil S, qu'on nomme *l'anomalie vraie*.

Quand le Soleil est en E, il nous paraît au point vernal ♈, et quand il est en M, l'angle MTE est sa *longitude* vraie. L'angle $m$TE formé par le mobile est la longitude moyenne : s'il est en $s$, cette longit. est l'arc *emfps*. La longitude du périgée est *emfp*.

Selon M. Bessel, au commencement de l'an 1800 + T, la *longitude du périgée* est

$$279° 30'8'',39 + 61'',5171.T + 0,0002037965.T^2.$$

Il est visible, sur la figure, que $sp = emfps - emfp$ : et en général que dans toute position du mobile, on a

$$\textit{anomalie moy.} = \textit{longit. moy.} \odot - \textit{longit. périgée} \ (*).$$

La 3ᵉ colonne de notre table fait connaître l'anomalie moy. pour l'époque et sa marche en 30 jours, 1 jour, 1 heure, afin de trouver la valeur de cet arc à toutes les dates. L'exemple suivant montre l'usage de ces nombres.

L'anomalie moyenne sert ensuite à trouver le lieu vrai du Soleil, c'est-à-dire à changer le lieu moyen en lieu elliptique : les

---

(*) Observez qu'il faut souvent, pour faire la soustraction, ajouter 12 signes à la longitude. Ainsi, quand le mobile est en $m$, la longit. moy. est *em*, l'anomalie moy. est *pem*; or,

$$pm = me + pe, \text{ et } pe = 360° - emfp;$$

d'où anom. moy. $pm$ = long. moy. $em$ + 360° — longit. $emfp$ du périgée,

équ. qui est la même que ci-dessus, en ajoutant 360° à la longit. moy.

Les anciens astronomes étaient dans l'usage de compter l'anomalie à partir de l'apogée; mais, avec raison, le Bureau des Longitudes préfère le périgée, pour que les comètes (dont l'apogée est invisible) soient rapportées à la même origine.

autres colonnes se rapportent aux perturbations planétaires. Tout cela sera expliqué plus tard.

Soit demandé le lieu moyen du Soleil à midi t. moy. de Paris, le 17 avril 1830. On compte trois mois écoulés depuis le commencement de l'année, et compensant les mois longs et courts pour les réduire tous à être de 30 jours, on voit qu'il y a 16$^j$ 12$^h$ de plus que ces 3 mois. Ainsi,

| | Longit. moy. | Anom. moy. |
|---|---|---|
| 1830............ | 9$^s$10° 7′49″6 | 0$^s$ 0° 6′56″ |
| 3 fois 30 jours.... | 2.28.42.29,7 | 2.28.42.14,4 |
| 10 jours......... | 9.51.23,3 | 9.51.21,6 |
| 6 fois 1 jour...... | 5.54.50,0 | 5.54.49,2 |
| 12 heures........ | 29.34,2 | 29.34,1 |
| Longit. moy. = | 12.25. 6. 6,8 | 3.15. 4.55 = $z$, |
| ou plutôt. $l$.... | 0.25. 6. 6,8. | |

Observez que la longit. du Soleil moyen est égale à son asc. dr.; ainsi en convertissaut cet arc en temps, on a 1$^h$ 40′24″,45 pour l'asc. dr. du Soleil moy., à midi moy. le 17 avril 1830.

263. Le Soleil partant de l'équinoxe ♈ ou E (fig. 10) décrit l'écliptique dans le sens EMAF, et revient au même lieu E après une année sidérale. Mais dans cette durée, par l'effet de la précession des équinoxes, la droite ♈E, suivant laquelle l'écliptique est coupée par l'équateur, tourne un peu autour du point T : ainsi l'équinoxe se déplace, et parcourt un petit arc de 50″,1, en rétrogradant de ♈ en ♈′. Arrivé en I, le Soleil est donc revenu à l'équinoxe, un peu avant de se trouver en E. Le temps de la révolution qui ramène l'astre à l'équinoxe s'appelle l'*année tropique* : cette durée est de 365$^j$ 5$^h$ 48′ 47″,65 = 365$^j$,2422181 jours moy. (*V*. p. 88.) Elle est plus courte que la sidérale de 20′ 23″,1, temps nécessaire pour décrire le petit arc IE de 50″,1.

En outre, par l'effet de l'action planétaire, l'orbite même tourne un peu autour du point T, et le périgée P vient en P′ par un mouvement *direct* ; l'arc PP′ est de 11″,66. Ainsi la longitude du périgée s'accroît chaque année de ces deux effets, savoir, 50″,1 de l'arc EI, et 11″,66 de l'arc PP′, en tout 61″,76, par an.

Le temps employé par le mobile *s*, partant du périgée pour y revenir, diffère des années sidérale et tropique; on lui donne le nom d'*année anomalistique* (365ʲ 6ʰ 13′ 54″,665=365,25966046 jours moyens). Cette année surpasse la sidérale de 4′ 43″,915, temps nécessaire pour décrire le petit arc PP′ de 11″,66.

On comprend maintenant la formation de la table XIV des mouvemens moyens du Soleil : on part des nombres qui appartiennent au commencement d'une année; et pour obtenir ceux des années suivantes, on ajoute périodiquement la marche moyenne pour 365 ou 366 jours, selon que l'année est commune ou bissextile. Cette marche en longitude est donnée par le n° 259, où l'effet de la précession a été compris. Quant à la longitude du périgée, elle croît chaque année de 61″,5171 + 0″,0004076.T, en désignant par T les années écoulées, à partir de 1800.

La table XIV ne peut servir que de 1830 à 1840; pour les autres époques, il faut recourir aux tables de Delambre, qui sont applicables à tous les siècles; mais il convient d'y apporter les petites corrections qui y sont reconnues nécessaires et dont le temps a développé les progrès. On verra aussi dans l'*Uranographie*, n° 343, des procédés généraux dont on peut faire usage.

264. Il ne faut pas confondre le mouvement régulier du mobile *s*, dont l'orbite est dans le plan de l'écliptique, avec celui du Soleil fictif qui règle le temps moyen, et qu'on appelle *Soleil moyen* (n° 31); car celui-ci parcourt l'équateur céleste. Ces deux mouvemens sont circulaires et uniformes, mais dans des plans différens, et celui du Soleil moyen est déterminé par cette condition :

*longit. moy. du* ⊙ = *asc. dr. du* ⊙ *moyen*,

c'est-à-dire que les arcs de ces deux cercles commencent à l'équinoxe, point commun à l'un et l'autre, et se terminent à des degrés égaux. Le temps moyen est réglé par les passages réguliers du Soleil équatorial au méridien.

Calculons maintenant le lieu vrai du Soleil sur son orbite elliptique. On donne le nom d'*équation du centre* à l'arc qu'il faut *ajouter* à la longitude moyenne pour avoir la longitude

vraie sur l'ellipse. Il faut conserver le signe de cet arc dans l'addition, qui se change en une soustraction, quand l'arc est négatif.

Il est prouvé, par la théorie (*v.* ma *Mécanique*, n° 183, et l'*Uranographie*, n° 337), qu'en désignant l'anomalie moyenne par $z$, on a

$$\textit{Équation du centre} = a \sin z + b \sin 2z + c \sin 3z.$$

On trouve que vers l'an 1830, en exprimant les termes en secondes de degré,

$$\log a = 3.8402353, \quad \log b = 1.86087, \quad \log c = 0.02350.$$

Ces coefficiens changent un peu avec le temps, et cette variation s'appelle *séculaire*, parce qu'elle est très faible. Comme notre table XIV ne s'étend qu'à 10 ans, nous avons pris nos coefficiens convenables à cette durée.

Ainsi, dans notre exemple, où $z = 105° 4' 55''$,

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $a$...... | 3.8402353 | $b$...... | 1.86087 | $c$...... | 0.02350 |
| sin $z$... | 9.9847769 | sin $2z$.. | 9.70111 — | sin $3z$.. | 9.84761 — |
| | 3.8250122 | | 1.56198 — | | $\bar{1}$.87111 — |

1er terme.. $1° 51' 23'',62$
2e. ........ $-\ 36,47$
3e. ........ $-\ 0,74$

$= 1° 50' 46'' 41$ = équ. du centre.
$25.\ 6.\ 6,8$ = longit. moy.

Longit. sur l'ellipse = 26.56.53,2.

L'une des tables de Delambre est destinée à épargner ces calculs, en les donnant tout faits : on y prend à vue l'équ. du centre correspondante à l'argument $z$, ainsi que la variation séculaire.

265. Calculons maintenant les petits écarts du mouvement elliptique, causés par l'action des planètes, c'est-à-dire les *perturbations*. Ces effets une fois connus, ainsi que la *nutation*, on en conclut

*Longit. vr. = longit. moy. + équ. du centre + perturb. + nutation.*

Les nombres des colonnes A, B, C, table XIV, expriment les positions moyennes de Vénus, Jupiter et la Lune par rapport à

la Terre; les actions de ces masses dépendent de ces positions à notre égard. On ne tient pas compte ici de Mercure qui est trop petit, non plus que de Saturne, ni d'Uranus, qui sont trop éloignés de la Terre pour exercer une action de plus de 1 à 2 secondes, quantités que nous croyons devoir négliger ici, mais dont on tient compte dans les tables de Delambre. Nous ne voulons qu'indiquer la construction de ces tables, et une approximation à 2″ ou 3″ près suffit à notre objet.

Les nombres A, B, sont les distances angulaires de Vénus et Jupiter à la Terre, ces planètes étant vues du Soleil, et les distances étant estimées en longitudes moyennes. C est celle de la Lune au Soleil, vus de la Terre; savoir :

A = ♀ − ♁, B = ♃ − ♁, C = ☾ − ☉.

Enfin, N est le supplément à 360° de la longitude du nœud ascendant de la Lune, servant au calcul de la nutation, comme il va être expliqué.

Au lieu d'exprimer les arcs A, B, C, N, en degrés, on trouve plus commode de représenter la circonférence par 1000; en sorte que 250 vaut 90°, 500 vaut 180°, etc. Quand on trouve une somme qui dépasse 1000, on supprime cette unité du 4e ordre, comme désignant 360°, ou la circonférence entière. On calcule les nombres de ces colonnes, précisément comme pour la longitude, afin de trouver les valeurs de A, B, C, N, pour la date proposée. On entre, avec ces quantités pour argumens, dans la table XIV, et l'on fait la somme des corrections qu'on y trouve, mais en ayant égard aux signes. La somme est la correction due aux perturbations, et doit être ajoutée à la longitude vraie.

Dans tout ceci, les longitudes sont rapportées à l'équinoxe moyen, c'est-à-dire qu'on suppose que le point ♈ parcourt lentement et uniformément 50″,1 dans l'année tropique. Mais on sait que le défaut de sphéricité de la Terre cause à son axe un balancement qui déplace ce point ♈ par petites oscillations (n° 315); et puisqu'il faut que les longitudes soient comptées du point ♈ apparent, tel que le donnent réellement toutes les causes agissantes, il faut ajouter encore à la longitude l'arc de

déplacement, avec son signe. Or, on a en général

*nutation lunaire en longitude* = 18″ sin ☊.

Comme N est le supplément à 1000 de l'arc ☊, on peut traduire N en degrés, et le calcul de la nutation est facile à faire ; mais on trouve cette opération effectuée dans l'une des colonnes de la table IV, où la valeur trouvée pour N est l'argument. On y prend en outre la *nutation solaire en longit.* qui, dans l'une des colonnes, répond à la date proposée. Ainsi, pour N = 534 et le 17 avril, on a −3″,75 et +1″,01. Cette table donne encore les nutations en asc. dr. et en obliquité. (*V.* ce qui a été dit p. 95 et 148.)

Quant à l'*aberration*, on peut la considérer comme constante et = −20″,3 (*v.* n° 308); elle se trouve comprise dans la table XIV avec les secondes de l'époque.

Appliquons ceci à notre exemple.

| | A | B | C | N |
|---|---|---|---|---|
| 1830...... | 889 | 480 | 211 | 519 |
| 3 mois.... | 154 | 774 | 49 | 13 |
| 10 jours... | 17 | − 25 | 339 | 1,5 |
| 6 jours.... | 16 | − 15 | 203 | −0,6 |
| 12 heures.. | 1 | − 1 | 17 | 0 |
| | 071 | 213 | 819 | 534. |

Perturb. et nut.. − 3″,00 − 5,71 − 6,73 − 3,75 + 1,01 = − 18″2

Longit. sur l'orbite.................. = 26° 56′ 53,2

Longit. vraie à midi moy.......... = 26.56.35,0.

La *Conn. des Tems* donne 26° 56′ 29″,3 ; la différ. vient de ce que nous avons adopté dans la table des époques des nombres un peu plus forts que ceux de Delambre, et négligé quelques petites corrections.

266. Une fois la longit. vr. connue, nous avons expliqué, p. 41, comment on peut calculer la déclin. et l'asc. dr. de l'astre. Quant à l'*équation du temps*, on sait qu'elle est = asc. dr. vr. — asc. dr. ou longit. moy. (*V.* p. 46.) Au reste, on peut trouver cette équation à fort peu près, sans passer par l'asc. dr. vr., à l'aide de la formule suivante :

*équ. du temps = équ. du centre + perturb.* − $c \sin 2\odot + d \sin 4\odot$.

Les deux 1[ers] termes reviennent à *longit. vr.* — *longit. moy.*, et ⊙ désigne la long. vraie On a

$$\log c = 3.9490733 -, \quad \log d = 2.2826915.$$

On réduit d'ailleurs en temps l'arc exprimé par ce second membre.

Ainsi, dans notre exemple, ⊙ $= 26^\circ\, 56'\, 53'',2$.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $c$.... | 3.9490733 — | $d$.... | 2.2826915 | Équ. centre. = | + 1° 50′ 46″4 |
| sin... | 9.9073850 + | | 9.9787143 | Perturb..... = | — 18,2 |
| | 3.8564583 — | | 2.2614058 | 1[er] terme.. | — 1.59.45,4 |
| | — 1° 59′ 45″,4 | | + 3′ 2″,6 | 2[e]......... | + 3. 2,6 |
| | | | | | — 6.14,6. |

Équ. du temps = — 24″,9... en arc.

267. *Le rayon vecteur* R du Soleil est donné par son log. à l'aide de la formule

$$\log R = 0.0003054 - i \cos z - f \cos 2z - g \cos 3z,$$

$$\log i = \bar{3}.86253 -, \quad \log f = \bar{5}.96254 -, \quad \log g = \bar{6}.1626 -.$$

Du reste ces coefficiens éprouvent de petites variations séculaires, en sorte que l'équ. n'est exacte que pour les dix années de 1830 à 1840; encore négligeons-nous ici les perturbations. Cette formule et sa variation sécul. sont réduites en table parmi celles de Delambre, et l'on y tient compte des perturbations planétaires. Comme notre objet principal est d'expliquer la formation et l'usage de ces tables, nous n'avons pas cru devoir grossir le volume en les donnant ici. Il nous suffira de savoir trouver une valeur très approchée de R.

Pour appliquer ces formules à notre exemple, faisons $z = 105^\circ\, 4'\, 55''$.

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\bar{3}$.86253 — | $\bar{5}$.96254 — | $\bar{6}$.1626 — | 0.0003054 |
| 9.41531 — | 9.93681 — | 9.8513 + | + 189601 |
| $\bar{3}$.27784 + | $\bar{5}$.89935 + | $\bar{6}$.0139 — | + 7931 |
| | | | — 103 |

R = 1,004627, log R = 0.0020483.

268. La parallaxe horizontale du Soleil est $= \frac{\pi}{R}$; $\pi$ désigne

la parallaxe pour la distance moyenne. Celle-ci est prise $= 8'',8$ dans la table de Delambre, mais elle est un peu trop forte; il faut préférer $8'',5776$ (p. 120).

La parallaxe de hauteur s'en tire aisément (n° 91).

Représentons par $\Delta$ le demi-diamètre du Soleil à la distance moyenne (on a $\Delta = 961'',45$; Delambre le prend trop grand).

$$\textit{demi-diam. apparent} = \frac{\Delta}{R}, \quad \log \Delta = 2.98293,$$

$$\textit{angle hor. du demi-dia.} = \frac{\Delta}{R \cos D}. \quad (\textit{V. page } 67.)$$

D est la déclin. de l'astre. Cette dernière valeur, exprimée en temps moyen ou sidéral, est la durée écoulée depuis le passage du bord du Soleil au méridien jusqu'à celui du centre. En représentant par $\odot$ la longit. vr. du Soleil, cette durée est

$$= Q - T \sin \odot + S \sin 2\odot,$$

en t. moy. $Q = 64'',024$, $\log T = 0.05404 -$, $\log S = 0.76045$,

en t. sid. . $Q = 64'',199$, $\log T = 0.05519 -$, $\log S = 0.76163$.

Le mouvement horaire du Soleil à la distance moyenne étant $M = 147'',834$, on trouve qu'à la distance R, il devient

$$= \frac{M \sqrt{(1 - e^2)}}{R^2}, \quad \text{numér.} = 147'',8260, \quad \log = 2.1697508.$$

Toutes ces formules servent de fondement aux tables, et peuvent les suppléer et servir à composer l'Annuaire de la *Conn. des Tems.*

Les actions planétaires font un peu sortir la Terre du plan de l'écliptique, et il en résulte pour le Soleil une petite latitude : mais comme cet arc est à peine d'une seconde, nous ne nous y arrêterons pas.

269. Montrons sur un exemple l'usage complet de cette théorie pour donner un type de calcul.

Prenons le 12 octobre 1830 à midi moyen de Paris (9 mois, 14 jours, 12 heures).

*Calcul de la longit. et de l'asc. dr. moyennes.*

| | *Longit. moy.* | *Anom. moy.* | A | B | C | N |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1830. .. | 9ˢ 10° 7′ 49″6 | 0ˢ 0° 6′56″ | 889 | 480 | 211 | 519 |
| 9 mois.. | 8.26. 7.29,1 | 8.26. 6.43 | 462 | 322 | 148 | 40 |
| 10 jours. | 9.51.23,3 | 9.51.22 | 17 | 975 | 339 | 2 |
| 4 jours.. | 3.56.33,3 | 3.56.33 | 7 | −10 | 136 | 0 |
| 12 heur. | 29.34,2 | 29.34 | 1 | −1 | 17 | 0 |
| Longit.. | 18.20.32.49,5 | 9.10.31.08 | 376 | 766 | 851 | 561. |

Perturb. et nut. $= + 2'',29 = + 9'',61 + 6'',46 - 6'',41 - 6'',61 - 0'',76$.

*Équ. du centre*, on a $z = 9^s\,10°\,31'\,8''$.

| | | |
|---|---|---|
| *a*. . . . . 3.8402353 | *b*. . . . . 1.86087 | *c*. . . . . 0.02350 |
| sin *z*. . . 9.9926396 − | sin 2*z*. . 9.55507 − | sin 3*z*. . 9.93050 + |
| 3.8328749 − | 1.41594 − | $\bar{1}$.95400 + |
| − 1° 53′ 25″,73 | − 26″,06 | + 0″,90 |
| − 26,06 | | |
| + 0,90 | | |

− 1.53.50,89 = équ. du centre.
6.20.32.49,50 = longit. moyenne.
+ 2,29 = perturb. et nutat.

6.18.39. 0,9 = longit. vr. sur l'ellipse à midi moy.

La *Conn. des Tems* donne 6ˢ 18° 38′ 43″.

*Équ. du temps*, on a $2\odot = 37°\,18'\,2''$.

| | | |
|---|---|---|
| *c*. . . . 3.94907 − | *d*. . . . 2.28269 | Équ. centre = − 1° 53′ 50″9 |
| sin. . . 9.78247 + | 9.98412 | Perturb. . . = + 2,3 |
| 3.73154 − | 2.26681 | 1ᵉʳ terme. . = − 1.29.49,4 |
| | | 2ᵉ terme. . . = + 3. 4,8 |

Équ. du temps = − 13′ 22″,2. . . en arc. . . . . − 3.20.33,2.

*Rayon vecteur.*

| | | | |
|---|---|---|---|
| | | | + 0.00003054 |
| $\bar{3}$.86253 − | $\bar{5}$.96254 − | $\bar{6}$.1626 − | − 0.00133024 |
| 9.26140 + | 9.97004 − | 9.7188 − | + 8562 |
| $\bar{3}$.12393 − | $\bar{5}$.93258 + | $\bar{7}$.8814 + | + 76 |

R = 0.9972104, log R = $\bar{1}$.99878668.

*Demi-diamètre et mouvement horaire.*

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Δ ......... | 2.98293 | | | | |
| R ........ — | 9.99879 | | | | |
| 964″,14.... | 2.98414 | demi-diam. = 16′ 4″,14. | | | |
| T ........ | 0.05404 — | S. ......... | 0.76045 + | | 2.1697508 |
| sin ⊙ ...... | 9.50486 — | 2⊙ ......... | 9.78247 + | R² — | $\bar{1}$.9976734 |
| + 0″362.. | $\bar{1}$.55890 + | 3″,492..... | 0.54292 | | 2.1721774 |
| + 3,492 | | | | Mouv. horaire = 148″,65. | |
| 64,024 | | | | | |
| 67,878 = temps moyen du passage du demi-diam. au méridien. | | | | | |

*Sur les Tables de la Lune.*

270. La Lune décrit autour de la Terre une orbite elliptique, dont celle-ci occupe le foyer, et dans son mouvement annuel sur l'écliptique, notre globe emporte avec lui la Lune qui en est le satellite. Les choses se passent pour nous comme si nous étions immobiles au foyer commun des deux orbites elliptiques décrites par le Soleil et par la Lune, dans des plans inclinés l'un sur l'autre de 5° environ. Mais la masse du Soleil agit si fortement sur la Lune, qu'elle l'écarte notablement de son ellipse; l'orbite non-seulement se balance légèrement autour de la ligne des nœuds, en faisant augmenter un peu, ou diminuer cet angle ; mais encore cette ellipse tourne dans son plan, en même temps que la ligne des nœuds tourne elle-même autour du foyer où est la Terre. De là les diverses révolutions suivantes :

La *synodique*, qui est celle des phases, ou la durée des retours au Soleil, ou des néoménies ;

La *sidérale*, temps de retour à la même étoile ;

La *tropique ou périodique*, durée du retour au même équinoxe, qui se déplace en vertu de la précession ;

L'*anomalistique*, retour au périgée, ou au sommet de l'ellipse ;

La *draconitique*, retour au nœud.

Voici les durées de ces *révolutions* en termes moyens, car les

perturbations qu'éprouve la Lune font qu'elles s'écartent plus ou moins des valeurs suivantes, qui sont en temps moyen.

Synodique....... = 29$^j$,53058 857215 = 29$^j$ 12$^h$44′ 2″87
Sidérale......... = 27,32166 1423 = 27. 7.43.11,5
Trop. ou périod.. = 27,32158 2418 = 27. 7.43. 4,7
Anomalistique.... = 27,55459 950 = 27.13.18.37,4
Draconitique..... = 27,21222 22 = 27. 5. 5.36,0
Du périgée, sidér. = 3232,575343; trop. = 3231$^j$,4751
Du ☊, sidér..... = 6798,279
—— tropique.. = 6788,50982; synod.= 346,619851.

La Lune décrit, par son mouvement propre vers l'est,

En longit., pour $24^h$ moy. = 13°17639639 = 13° 10′ 35″027,
En anom., pour $24^h$ moy. = 13,0649917 = 13. 3.52,97012.

Le ☊ rétrograde de 3′ 10″,64 par jour moyen.
Le mouvement relatif de la Lune au Soleil = 12°,19075 par jour.

En cent années de 365$^j$ $\frac{1}{4}$, le mouvement moyen de la Lune est

En longitude.... = 307°878222....= 10$^s$ 7°52′ 41″6 + 1336 circonf.
En anom. moy.. = 198,81814.....= 6.18.49. 5,3 + 1325
Du ☊......... = 134,1659722 ..= 4.14. 9.57,5 + 5
Du périgée...... = 109,046278....= 3.19. 2.46,6 + 11.

271. Le lieu de la Lune, à un instant donné, se trouve par le même procédé qu'on a suivi pour le Soleil. On suppose à l'astre un mouvement régulier et circulaire, qui donne le *mouvement moy.*, et le lieu approché : il faut ensuite corriger ce lieu de diverses inégalités, qui, sous le nom d'*évection*, *équation du centre*, *variation*, *équ. annuelle*, altèrent fortement le mouvement moyen. La table XV fait connaître ce dernier, et les argumens propres à donner les inégalités qui l'affectent. A est l'anomalie moy. de la Lune, z celle du Soleil (qu'on tire de la table XIV, ainsi que l'argument N de nutation); D la différ. des longit. moy. de ces deux astres, D = ☾ − ☉; $\delta$ est la distance en longit. de la Lune au nœud, $\delta$ = ☾ − ☊; c'est ce qu'on nomme l'*argument de latitude*, parce que cet arc en détermine la partie la plus influente.

Lorsqu'on a tiré de notre table les divers élémens qui se rapportent à la date proposée, savoir : la longit. moyenne, l'ano-

malie moy. ☾, et les arcs D, $z$ et $\delta$, il faut faire servir ces dernières quantités à corriger la première. Voici les principaux termes de ces corrections, qui, ajoutés à la longitude moyenne, donnent la *longitude vraie* =

*long. moy.* + *équ. du centre.* + *variat.* + *évect.* + *équ. ann.* + *perturbations.*

Voici les formules qui donnent ces divers termes, lorsqu'on connaît le premier et les argumens A, D, $z$, $\delta$.

*Équ. centre* = 6° 17′ 19″,7 sin A + 12′ 48″,7 sin 2A + 36″9, sin 3A,
log..... 4.3548706........ 2.8857569 1.5670264,

*Variation.* = − 122″,5 sin D + 39′ 30″,0 sin 2D + 11″,9 sin 4D,
log..... 2.0881361—...... 3.3747483...... 1.07555,

*Équ. ann..* = − 11′ 13″,7 sin $z$, *réduct.* = − 411″,7 sin 2$\delta$,
log..... 2.4284665— 2.6145809 —

*Évection..* = 1° 16′ 29″,6 sin E + 31″,2 sin 2E, E = 2D − A,
3.6617748 1.4941546,

*Perturb...* = 147″,7 sin (A − $z$) − 109″,3 sin (A + $z$) + 192″,2 sin (2D + A)
+ 38″,6 sin (E + 2D) + 165″,6 sin (2D − $z$) + 207″,1 sin (E − $z$)
+ 54″,8 sin 2(D − $\delta$) − 45″,1 sin (2$\delta$ + A) − 28″,7 sin (E + $z$)
+ 17″,6 sin (D + $z$) + 12″,8 sin (E − 2A) − 24″,8 sin (2D + $z$).

Telles sont les formes et les valeurs des termes qui composent les élémens de correction de la longitude moyenne, tels qu'on les trouve dans les tables de M. Damoiseau, les plus récentes et les plus exactes de celles qui ont été publiées. Nous supprimons ici quelques termes fort petits.

Les tables de la Lune sont destinées à faciliter ces calculs, en les offrant tout faits; on en tire à vue les termes de ces formules, ou du moins on n'a besoin que de quelques interpolations faciles. On ajoute ensuite les résultats: seulement les tables lunaires tiennent compte de plus petits termes, que nous avons omis ici, pour mieux faire comprendre ce mécanisme, en le simplifiant. D'ailleurs les arcs E, $\delta$, D, $z$, A... qui sont les argumens de ces tables, au lieu d'être exprimés en degrés, le sont, pour faciliter les calculs, en millièmes de la circonférence. Tout cela est précisément ce qui a été fait pour le

Soleil, p. 384. Cette remarque s'applique aux recherches qui suivront.

Pour montrer l'usage de ces formules, prenons l'ex. du minuit qui commence le 12 octobre 1830, temps moy. (9 mois de 30 jours, et 14 jours écoulés depuis le 1er janvier.)

| | *Longit. moy.* ☾. | *Anom. moy.* ☾ A. | D = ☾ − ☉. | δ = ☾ − ☊. |
|---|---|---|---|---|
| 1830..... | 11ˢ 26° 6′ 11″ 9 | 11ˢ 19° 54′ 1″ 8 | 2ˢ 15° 52′ 10″ | 6ˢ 2° 58′ 46″ |
| 9 mois.... | 10.17.37.37,4 | 9.17.32.51,8 | 1.21.30. 8 | 11. 1.55.29 |
| 10 jours... | 4.11.45.50,3 | 4.10.38.59,7 | 4. 1.54.27 | 4.12.17.37 |
| 4 jours... | 1.22.42.20,1 | 1.22.15.35,9 | 1.18.45.47 | 1.22.55. 3 |
| | 4.18. 5.59,7 | 3.10.21.29,2 | 9.28. 2.32 | 11.10. 6.55. |

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| Équ. centre | = 6. 6. 7,3... | (1) | 2D = | 7.26. 5. 4 |
| Varial.... | = − 30.57,5... | (2) | A = | 3.10.21.29 |
| Éq. et réd. | = + 3.40,7... | (3 et 4) | E = | 4.15.43.35 |
| Evect. ... | = + 52.52,7... | (5) | π = | 9.10. 2 (table XIV). |
| Perturb... | = − 12.43,5 | | | |
| Nutat.... | = − 7,5... | (6) | | |

4.24.24.51,9 = longit. vr. ☾ à midi moy., le 12 octobre 1830.

(1) *Éq. du centre.* — *Nutation* (6).

| | | | |
|---|---|---|---|
| 4.3548706 | 2.8857569 | 1.56703 | N = 561 donne |
| 9.9928642 | 9.5486816 − | 9.93273 − | Nut. = − 6″7 |
| 4.3477348 | 2.4344385 − | 1.49976 − | Nut. sol. = − 0,8 |
| 6° 11′ 10″8 | − 4′ 31″,9 | − 31″,6 | = + 6° 6′ 7″,3. |

(2) *Variation.*

| | | |
|---|---|---|
| 2.0881361 − | 3.3747483 | 1.07555 |
| 9.9457646 − | 9.9190053 − | 9.01000 |
| 2.0339007 + | 3.2937536 − | 0.68555 + |
| + 1′ 48″,1 | − 32′ 46″,8 + 1″,2 = − 30′ 57″,5. | |

| *Équ. ann.* (3). | *Réduct.* (4). | *Évection* (5). | |
|---|---|---|---|
| 2.42847 − | 2,61458 − | 3.6617748 | 1.49415 |
| 9.20226 | 9.80598 − | 9.8439087 | 9.99986 − |
| 1.63073 − | 2.42056 + | 3.5056835 | 1.49401 − |
| − 42″,7 | + 263″,4 | 53′ 23″,9 | − 31″,2. |

272. Trouver la *parallaxe horizontale équatoriale* π et le *demi-diamètre* Δ *de la Lune*. En ne conservant que les termes les plus influens, on a la formule

$$\pi = 57'\,0'',9 + 186'',5 \cos A + 10'',2 \cos 2A + 28'',5 \cos 2D + 34'',4 \cos E,$$
log . . . . . . = 2.2706788 . . . . . 1,00860 . . . . . . 1,45484 . . . . . 1,53656.

On a d'ailleurs, pour l'aplatissement $\mu = \frac{1}{301}$ (v. p. 122, 118, 58 et 61),

Parall. horiz. $\pi'$ à la latit. $l = \pi(1 - \mu \sin^2 l)$, $\log \mu = \bar{3}.5157002$,
Parall. pour la dist. zénith. $z = \pi' \sin z$,
Demi-diamèt. horizontal. $\Delta = 0,2725\,\pi'$, $\log = \bar{1}.4353665$,
Augm. de $\Delta$ à la dist. zén. $z = G\Delta^2 \cos z$, $\log G = \bar{5}.25021$.

$\Delta$ et son augmentation sont exprimés en secondes.

C'est ainsi que dans notre exemple on trouve

$$\pi = 56'\,38'',2, \quad \Delta = 15'\,26'',0.$$

273. Trouver la *latitude* $\lambda$ *de la Lune?* On corrigera d'abord les arcs A, D, $\delta$, en ajoutant à chacun la somme de toutes les quantités qui ont changé la longit. moy. en vraie; ces arcs sont ici nommés A', D' et $\delta'$. Voici la formule qui donne la latitude $\lambda$:

$$\lambda = 5^\circ\,8'\,59'',8 \sin \delta' + 8'\,47'',7 \sin(2D' - \delta') + 25'',7 \sin(2A' - \delta'),$$
log . . . 4.2681651 2.7223871 1.40993,

$$+ 23'',8 \sin(\delta' + z) - 25'',1 \sin(\delta' - z) - 15'',8 \sin(2D' - \delta' - A'),$$
log . . . 1.37658 . . . . . . . . . 1.39967 — . . . . . . . . . . 1.19866 —,

$$+ 22'',0 \sin(2D' - \delta' - z) - 10'',3 \sin(2D' - \delta' + z) - 14'',4 \sin(A' - \delta'),$$
1.34242 . . . . . . . . 1.01284 — . . . . . . . . . . . 1.15836 —.

Le calcul donne, dans notre exemple, $\lambda = -1^\circ\,19'\,24'',6$.

Trouver le *mouvement horaire de la Lune?* Soit $m$ ce mouvement en longitude, et $n$ en latitude, on a

$$m = 32'\,56'',46 + 215'',10 . \cos A + 14'',61 \cos 2A$$
$$+ 42'',03 . \cos 2D + 37'',79 \cos(2D - A),$$
$$n = m \times [0,09024 \cos \delta' + 0,002165 \cos(2D' - \delta')].$$

Tous ces calculs sont très longs, et ils le deviennent plus encore, lorsqu'on veut que les résultats soient précis. On trouvera dans l'*Uranographie*, p. 402, un procédé fort commode pour trouver le lieu de la Lune à 1' près.

*Tables des planètes.*

274. L'écliptique est *sah* (fig. 42), *s* le point vernal ♈ duquel sont comptées les longitudes et asc. dr. de l'ouest à l'est, savoir, les premières de *s* vers *bqh*... ; *fbr* est l'orbite d'une planète actuellement située en *c*, *b* son nœud ☊ : la vitesse de l'astre est variable. Prenons sur cette orbite un arc $br = bs$ ; c'est au point *r* que nous rapporterons d'abord les diverses positions de la planète.

Si l'on suppose, pour première approximation, que la marche est circulaire et uniforme, pour un spectateur placé dans le Soleil, l'arc décrit est proportionnel au temps. T désignant le nombre de jours écoulés dans une révolution sidérale complète, $\frac{360^\circ}{T}$ sera l'arc parcouru en 1 jour, d'un mouvement uniforme : la précession déplace chaque jour le point *s*, ou *r*, de 0°,000038102565 ; ajoutant cet arc au précédent, on obtient l'accroissement de distance au nouveau point *s*, ou *r*, en un jour. Il est facile d'en conclure la marche en 365 jours, ou en 1461 jours, c'est-à-dire pour une année civile commune, ou pour 4 années successives, dont une bissextile. Ces résultats sont inscrits dans la table XVII, pour Mercure, Vénus, Mars, Jupiter, Saturne et Uranus, planètes qui seules font le sujet des observations ordinaires, les autres planètes étant trop petites ou trop éloignées pour être facilement vues, si ce n'est avec de fortes lunettes; encore le premier et le dernier de ces corps sont-ils presque toujours invisibles à l'œil nu. Nous bornerons nos applications à ces six planètes; les tables astronomiques relatives aux autres sont construites sur les mêmes principes, et leur usage sera suffisamment expliqué par ce qui va être dit des premières.

On donne en outre dans cette table, pour le minuit qui commence les six années successives à partir de 1830, la longitude moyenne de ces six planètes, celle de son périhélie, celle du nœud ascendant *b*, et l'inclinaison de son orbite sur l'écliptique, ou l'angle *b*. L'observation a fait connaître ces élémens pour une

époque donnée, et leurs variations (*v.* p. 416); on en a déduit, par le calcul, les résultats portés dans la table.

On a d'ailleurs ici, comme pour le Soleil, p. 383,

*anomalie moy.* $z =$ *longit. moy.* — *longit. périhélie.*

On multipliera donc le mouvement diurne moyen de la planète par le nombre de jours écoulés depuis le 1[er] janvier de l'année proposée, jusqu'à celui pour lequel on cherche le lieu de l'astre, et ajoutant ce produit à la longit. moy. le 1[er] janvier, on aura celle qui convient à la date donnée. On aura de même la longit. du périhélie, et par suite l'anomalie moy. $z$, et enfin la longit. ☊.

275. Par exemple, pour trouver le lieu moyen de Vénus le 25 mai 1830, on a

| | Longit. moy. | Périhélie. | Nœud. |
|---|---|---|---|
| 1830. ...... | 60°54′37″5 | 129°6′36″ | 75°9′18″ |
| 4 mois. ... | 192.15.37,0 | 15 | 10 |
| 24 jours. .. | 38.27. 7,4 | 4 | 2 |
| Long. moy. | 291.37.21,9 | 129.6.55 | 75.9.30 |
| Périhélie. .. | 129. 6.55 | | |
| Anom.. $z =$ | 162.30.27 | 325.0.54 $= 2z$. | |

276. Ces calculs ne se rapportent qu'au mouvement circulaire et uniforme; il s'agit maintenant d'avoir égard à l'ellipticité de l'orbite, en ajoutant à la longit. moy. l'*équation du centre*, prise avec son signe. Or, il résulte des tables planétaires de MM. Bouvard et Lindenau, qu'en désignant par $z$ l'anomalie moy. ci-dessus obtenue, et par A, B, C des constantes dont on trouve les log. pour chacune de nos six planètes, dans la table XVI, on a pour l'équ. du centre, l'arc

$$\text{équ. du centre} = A \sin z + B \sin 2z + C \sin 3z\,;$$

cette valeur est exprimée *en degrés*.

Pour Vénus, $C = 0$, et l'on fait ce calcul :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A. . . . . . | 3.4518924 | B. . . . . . | 1.08814 | | 2699″8 |
| sin z. . . . | 9.9794381 + | sin 2z. . . | 9.75842 — | | — 7,0 |
| | 3.4313305 + | — 7″,02. . | 0.84656 — | | 2692,8 |

2699″,8 Équ. du centre. = + 0°44′52″8

| | |
|---|---|
| Long. moy. = | 291.37.21,9 |
| Longitude sur l'orbite. . . . L = | 292.22.14,7 |
| ☊ = | 75. 9.30,0 |
| *Argum. de latit.* = L — ☊ = | 217.12.44,7 |
| Double = | 74.25.29,4. |

277. La valeur de L ainsi obtenue est l'arc *rc* (fig. 42), mesuré sur l'orbite de la planète, *bcdf*. Mais il faut compter les longit. vraies sur l'écliptique *sq*, à partir du point vernal ♈ supposé en *s*, dans le sens *bqh*. . . Menons l'arc *cq* perpendiculaire à ce cercle *bqh*, et passant par la planète *c*; la latitude de cet astre sera l'arc $cq = \lambda$; sa longit. vraie sera l'arc $sq = l$ : il s'agit de calculer ces deux arcs.

Comme l'angle *b*, inclinaison de l'orbite sur l'écliptique, est toujours très petit, la différence entre les arcs *bc*, *bq*, est aussi fort petite, et l'on trouve plus commode d'évaluer cette différence, plutôt que de chercher directement l'arc *bq*, parce qu'il suffit de la développer en série, et d'en prendre le premier terme : c'est ce qu'on appelle la *réduction de l'écliptique*. On trouve que cette différence, ou $bc - bq = L - l$, est

*réduction à l'écliptique* = D sin 2 (L — ☊).

D est ici un coefficient constant, dont la valeur, exprimée en secondes, a pour log. un nombre donné table XVI, pour chaque planète. (*V.* à cet égard la note de la p. 394 de l'*Uranographie.*)

D'après cela, on trouve pour la longitude vraie *l* de la planète, comptée sur l'écliptique, depuis le point vernal *s*,

*l* = L — D sin 2 (L — ☊);

le dernier terme est ici exprimé en secondes d'arc, et donne la petite correction que doit éprouver l'arc L, calculé précédemment, pour devenir *l*.

Quant à la latitude $\lambda$, ou l'arc $cq$, en résolvant le triangle sphérique rectangle $bcq$ (équ. $n$, page 3), on trouve

$$\sin \lambda = \sin b \sin (\mathrm{L} - ☊).$$

L'inclinaison $b$ de l'orbite et la longit. ☊ du nœud sont connues par les opérations antérieures, et le calcul est très facile. L'arc L — ☊ est ce qu'on appelle *l'argument de latitude*, parce qu'il fait connaître celle-ci.

Du reste, les longit. et latit. vraies dont il s'agit ici sont *héliocentriques*, c'est-à-dire telles qu'on les observerait du centre du Soleil.

Ainsi dans notre exemple, où l'on a $b = 3^\circ\,23'\,27''$, on trouve

| | | | |
|---|---|---|---|
| D.......... | 2.25720 — | sin $b$.......... | 8.7719303 |
| sin 2 (L — ☊). | 9.98377 | sin (L — ☊).. | 9.7816387 — |
| | 2.24097 — | sin $\lambda$.......... | 8.5535690 — |

Réduction $= -174'',17 = -2'\,54'',2$, $\lambda = -2^\circ\,3'\,0'',5$.

$\mathrm{L} = 9^s\,22^\circ\,22.14,7$

$l = 9.22.19.20,5.$

La *Conn. des Tems* donne $l = 9^s\,22^\circ\,16'$ et $\lambda = -2^\circ\,4'$.

278. Quant à la distance R de la planète au Soleil, ou son rayon vecteur, sa valeur se développe en série, en fonction de l'anomalie moy. $z$, et l'on trouve (*v.* l'*Uranographie*, p. 378)

$$\mathrm{R} = \mathrm{M} - \mathrm{N} \cos z + \mathrm{P} \cos 2z\ ;$$

les valeurs des constantes sont données dans la table XVI pour nos six planètes, savoir : celle de M, et les log. de N et P.

Voici le calcul pour l'exemple ci-dessus où le dernier terme ne produit rien :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | | | | 138 |
| N...... | $\bar{3}$.69368 — | P..... | $\bar{5}$.22660 | M = | 0.7233485 |
| cos $z$.... | 9.97943 | cos $2z$. | 9.91344 | | — 47110 |
| — 47110.. | $\bar{3}$.67311 — | + 138. | $\bar{5}$.14004 | R = | 0.7186513. |

279. Voilà donc $l$, $\lambda$ et R connus pour un instant fixé; ces coordonnées déterminent le lieu absolu de la planète vue du Soleil. Il s'agit maintenant de changer la longit. $l$, et la latit. $\lambda$ *hé-*

*liocentriques*, en coordonnées $l'$ et $\lambda'$ *géocentriques*, c'est-à-dire telles qu'on les voit de la Terre.

Le plan de la fig. 47 est celui de l'écliptique TB; la Terre est en T; AP est l'orbite d'une planète qui est située en P, au-dessus du plan de la fig.; PL est une perpendiculaire abaissée sur ce plan; elle l'est aussi aux droites TL, SL, tracées sur ce même plan, l'une dirigée à la Terre T, l'autre au Soleil S, foyer commun des deux ellipses AP, TB, peu inclinées entre elles. Les triangles PSL, PTL, sont rectangles en L, et les angles $PSL = \lambda$, $PTL = \lambda'$ sont les latitudes, l'une héliocentrique, l'autre géocentrique. En menant $T\Upsilon'$ à l'équinoxe $\Upsilon'$, et sa parallèle $S\Upsilon$ qui va au même point, les angles $\Upsilon SL = l$, $\Upsilon' TL = l'$ sont les longitudes. Faisons $PS = R$, $TS = r$, distances actuelles du Soleil à la planète et à la Terre, l'une et l'autre connues, savoir, R par ce qui précède, et $r$ par ce qu'on a vu p. 389; SL et TL, qui sont les projections de PS et PT sur le plan de l'écliptique, sont ce qu'on appelle les *distances accourcies* de la planète au Soleil et à la Terre.

Cherchons d'abord les parties du triangle SLT. On en dénomme ainsi les angles : $STL = T$, ou l'angle à la Terre, est l'*élongation*, distance angulaire et géocentrique de la planète au Soleil; $SLT = P$, ou l'angle à la planète, est la *parallaxe annuelle*, ou l'angle sous lequel, de la planète, on voit le rayon vecteur ST de la Terre, ou le demi-diam. de l'écliptique; enfin $TSL = S$, ou l'angle au Soleil, est la *commutation*, distance angulaire et héliocentrique de la planète à la Terre. Dans ces dénominations, on substitue à la planète P sa projection L sur le plan de l'écliptique, ce qui n'a pas d'inconvénient, puisque les calculs qu'on va faire tiendront compte de cette circonstance.

On a

$$SL = SP \cos PSL, \text{ ou } SL = R \cos \lambda,$$

$$TSL = \Upsilon ST - \Upsilon SL,$$

où S = différ. des longit. de la Terre et de la planète; et comme la première de ces longit. = 180° + celle ⊙ du Soleil,

on a
$$S = \odot + 6' - l; \qquad (1)$$

l'arc $\odot$ est connu (p. 386), et l'on en conclut la commutation S.

Dans le triangle LTS, nous connaissons donc les côtés $ST = r$, $SL = R \cos \lambda$, et l'angle compris $TSL = S$; ainsi

$$SL + ST : SL - ST :: \tang \tfrac{1}{2}(T + L) : \tang \tfrac{1}{2}(T - L) :$$

or $S + T + L = 180^\circ$, $\tfrac{1}{2}(T + L) = 90^\circ - \tfrac{1}{2} S$; donc

$$\frac{\tang \tfrac{1}{2}(T - L)}{\cot \tfrac{1}{2} S} = \frac{R \cos \lambda - r}{R \cos \lambda + r} = \frac{\tang \phi - 1}{\tang \phi + 1},$$

en posant
$$\tang \phi = \frac{R \cos \lambda}{r}; \qquad (2)$$

mais
$$\frac{\tang \phi - 1}{\tang \phi + 1} = \frac{\tang \phi - \tang 45^\circ}{1 + \tang \phi \tang 45^\circ} = \tang(\phi - 45^\circ):$$

donc, en faisant $y = \tfrac{1}{2}(T - L)$, d'où
$$T = 90^\circ + y - \tfrac{1}{2} S, \qquad (3)$$

on a
$$\tang y = \tang(\phi - 45^\circ) \cot \tfrac{1}{2} S. \qquad (4)$$

L'équ. (1) fait connaître l'arc S; (2) et (4) donnent les arcs auxiliaires $\phi$ et $y$, enfin (3) détermine T : en sorte que les trois angles du triangle TSL sont connus.

Or, des triangles rectangles PLS, PLT, on tire

$$PL = SL \tang \lambda = TL \tang \lambda',$$

et de TSL,
$$\sin T : \sin S :: SL : TL;$$

donc
$$\tang \lambda' = \frac{\sin T \tang \lambda}{\sin S}. \qquad (5)$$

Quant à la longit. géocentrique $l'$, la parallèle $T\Upsilon'$ à $S\Upsilon$ va marquer au ciel le point vernal $\Upsilon'$, le même que marque $S\Upsilon$ : on a

$$l' = \Upsilon'TI = STI - ST\Upsilon' = T - ST\Upsilon'.$$

Or, $ST\Upsilon' = 180^\circ -$ longit. de la Terre $= 360^\circ -$ longit. $\odot$;

donc

$$l' = \odot + T. \qquad (6)$$

Appliquons ces formules à notre exemple ci-dessus, où l'on trouve

$$\odot = 2^s\,3^\circ\,42'\,13'', \quad \text{et} \quad \log r = 0.0058o3.$$

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | $6^s$ | R........ | $\bar{1}.8565099$ | $\varphi - 45^\circ =$ | $-9^\circ 21' 4'' 4$ |
| $\odot =$ | $2.\ 3^\circ 42' 13''$ | cos $\lambda$.... | 9.9997220 | cot $\frac{1}{2}$S.. | 0.3451348 |
| $l =$ | 9.22.19.20 | $r$......— | 5803 | tang.... | 9.2166260 — |
| S = | 10.11.22.53 | tang $\varphi$... | 9.8556516 | tang $\gamma$.. | 9.5617608 + |
| $-\frac{1}{2} =$ | $-5.\ 5.41.26$ | $\varphi =$ | $35^\circ 38' 55'',6$ | $\gamma =$ | $+20^\circ 4' 46''$ |
| $90^\circ + \gamma =$ | $+3.20.\ 4.46$ | tang $\lambda$... | 8.5538460 — | | |
| T = | 10.14.23.20 | sin T.... | 9.8540681 — | | |
| $\odot =$ | 2. 3.42.13 | sin S..— | 9.8752500 — | | |
| $l' =$ | 0.18. 5.33 | tang $\lambda'$... | 8.5326641 — | $\lambda' =$ | $-1^\circ 57' 10''$. |

La *Conn. des Tems* donne $l' = 0^s\,18^\circ\,1'$, $\lambda' = -1^\circ\,58'$; mais elle tient compte des perturbations, de la nutation et de l'aberration, qui ont été négligées ici.

280. Voici un autre exemple. Trouver le lieu de Mars, le 1<sup>er</sup> septembre 1830 à midi, jour où l'on a

$$\odot = 5^s\,8^\circ\,29'\,9'', \quad \log r = 0.0036\,97,$$

| | Longit. moy. | Périhélie. | ☊ | Inclin. |
|---|---|---|---|---|
| 1830..... | $7^s\ 5^\circ\ 4'\ 40''3$ | $11^s 2^\circ 55' 46''$ | $1^s 18^\circ 12'\ 8''$ | $1^\circ 51' 6'',2$ |
| 8 mois... | 4. 5.46.37,4 | 43 | 17 | |
| 3 jours... | 1.34.20,0 | | | |
| 12 heures. | 15.43,3 | | | |
| | 11.12.41.21,0 | 11.2.56.29 | 1.18.12.25 | |
| Périhélie. | 11. 2.56.29,0 | | | |

$z = 0.\ 9.44.52,0$, $\quad 19^\circ\,29'\,44'' = 2z$, $\quad 29^\circ\,14'\,36'' = 3z$.

| A | B | C | |
|---|---|---|---|
| 4.5846045. | 3.34916 | 2.25566 | $6505''7$ |
| 9.2286859 | 9.52340 | 9.68888 | 745,7 |
| 3.8132904 | 2.87256 | 1.94454 | 88,0 |
| $6505'',7$ | $+\ 745'',7$ | $+\ 88'',0$ | $= 7339,4.$ |

| | | | |
|---|---|---|---|
| D.... 1.73159 — | | Équ. du centre..... | $+\ 2^\circ\ 2'\ 19''4$ |
| 9.90269 — | sin 2(L — ☊) | Long. moy......... | 11.12.41.21,0 |
| 1.63418 + | | Long. sur l'orbite. L = | 11.14.43.40,4 |
| $+\ 43'',1$ = réduction | ...................... | | + 43,1 |
| | | Long. héliocent. . $l$ = | 11.14.44.23,5. |

| | | |
|---|---|---|
| sin $b$ ....... 8.5093646 | N ......... $\bar{1}$.151987 — | P ....... $\bar{3}$.81856— |
| sin (L—☊) 9.9517120— | cos $z$ .... 9.993684 | cos $2z$ ... 9.97436 |
| | | $\bar{3}$.79292— |
| sin λ ...... 8.4610766— | $\bar{1}$.144771 — | 62076 |
| λ = — 1° 39′ 24″ | — 0.1395632 | |
| M = 1.5303161 | R ....... 0.1413072 | |
| — 0.1395632 | cos λ .... 9.9998184 | cot ½S, 1.2625710— |
| — 62076 | $r$ ....... — 36970 | tang ... 9.1956609 |
| R = 1.3846453 | tang φ .... 0.1374286 | tang $y$ .. 0.4582319— |
| log R = 0.1413076 | φ = 53°55′ 4″ | $y$ = — 70°48′ 16″ |
| 6ˢ | φ — 45° = 8.55. 4 | — ½S = —176.52.23 |
| ☉ = 5. 8°29′ 9″ | sin T .... 9.5792694— | + 90 |
| — $l$ = —11.14.44.24 | tang λ ... 8.4629061— | T = +202.19.21 |
| S = 11.23.44.45 | sin S ... — 9.0371849— | ☉ = +158.29. 9 |
| ½S = 5.26.52.23 | tang λ′ .. 9.0049915— | $l'$ = 0.48.30. |

λ′ = — 5° 46′ 35″.

La *Conn. des Tems* donne $l$ = 11ˢ 14° 44′, $l'$ = 0ˢ 0° 47′,
λ = — 1.39, λ′ = — 5.46.

281. L'attraction qu'exercent mutuellement Jupiter et Saturne produit sur ces astres un déplacement dont on ne peut négliger l'étude. (*V. l'Uranographie*, n° 99.) Ces deux planètes ont des masses si considérables, qu'elles réagissent l'une sur l'autre, ce qui cause dans leurs marches un effet qu'on doit prendre en considération. Sous le titre de *grande inégalité*, notre table XVI donne l'arc qu'il faut ajouter à la longit. moy. de Jupiter; on retranche cet arc pour Saturne.

Cherchons le lieu de Saturne le 11 octobre 1830 à minuit (0ʰ du matin); il y a 9 mois de 30ʲ, + 13ʲ écoulés depuis le 1ᵉʳ janvier.

| | Longit. moy. | Périhélie | ☊ | Inclin. |
|---|---|---|---|---|
| 1830..... | 4ˢ 10° 7′ 35″9 | 2ˢ 29° 43′ 2″ | 3ˢ 22° 11′ 29″ | 2° 29′ 31″ |
| 9 mois... | 9. 2.39,8 | 57 | 23 | |
| 13 jours... | 26. 7,7 | 3 | 1 | |
| Gr. inég.. | — 46.10,3 | | | |
| | 4.18.50.13,1 | 2.29.44. 2 | 3.22.11.53 | |
| Périhél. — | 2.29.44. 2 | | | |
| Anom.. $z$ = | 1.19. 6.11,1; | 3ˢ 8° 12′ 22″ = $2z$, | 4ˢ 27° 18′ 33″ = $3z$. | |

| A | B | C | |
|---|---|---|---|
| 4.36391 | 2.90809 | 1.59418 | 17473",5 |
| | | | + 801,0 |
| 9.87846 + | 9.99553 + | 9.73246 + | + 21,2 |
| 4.24237 | 2.90362 | 1.32664 | + 18295,7 |

17473",5 + 801",0 + 21",2 = 5° 4′ 55",7

4.18.50.13,1

*Longit. sur l'orbite.* L = 4.23.55. 8,8

☊ = 3.22.11.53

| D | |
|---|---|
| 1.99045 − | L − ☊ = 1. 1.43.16 |
| | Double = 2. 3.26 |
| 9.95160... sin 2 (L − ☊) | L = 4.23.55. 8,8 |
| 1.94205 −...... − 87",5 = réduction........... | − 1.27,5 |

*Longit. héliocent. sur l'éclipt.* $l$ = 4.23.53.41,3.

sin $b$........ 8.6382788
sin (L − ☊)... 9.7208253
sin λ.......... 8.3591041 *Latit. héliocent.* λ = + 1°18′35"8

| N | P | | |
|---|---|---|---|
| | | M = | 9.557276 |
| $\bar{1}$.72907 − | $\bar{2}$.17768 − | 2°... − | 350824 |
| 9.81602 + | 9.15508 − | 3°... + | 2152 |
| $\bar{1}$.54509 − | $\bar{3}$.33276 + | R = | 9.208604 |
| −0.350824 | + 0.002152 | log R = | 0.9641938. |

Les tables du Soleil donnent ⊙ et $r$, et l'on a

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | 6s | R......... | 0.964194 | φ − 45° = | 38°48′50" |
| ⊙ = | 6.17°38′43" | cos λ...... | 9.999887 | tang... | 9.9054819 |
| $l$ = − | 4.23.53.41 | $r$.........− | $\bar{1}$.999073 | cot ½ S. | 9.7045848 − |
| S = | 7.23.45. 2 | tang φ..... | 0.965008 | tang $y$. | 9.6100667 − |
| ½ = − | 3.26.52.31 | φ = | 83° 48′ 50" | $y$ = | − 22°10′5" |
| 90° + $y$ = | 2. 7.49.55 | tang λ... | 8.3592243 + | | |
| T = | 10.10.57.27 | sin T..... | 9.6780597 − | | |
| ⊙ = | 6.17.38.43 | sin S..− | 9.9065684 − | | |
| $l'$ = | 4.28.36.10 | tang λ′... | 8.3307156 + | λ′ = | + 1°13′37". |

La *Conn. des Tems*, qui tient compte de perturbations que nous avons négligées, donne $l' = 4^s\,28°\,27'$, $\lambda' = +\,1°\,13'$.

282. Les mêmes calculs s'appliquent à toutes les planètes; on pourrait avoir égard aux perturbations, à la nutation et à l'aber-

ration, qui sont toujours de très petites quantités : c'est ce que font les tables complètes de MM. Bouvard et de Lindenau; on opère d'une manière absolument analogue à ce que nous avons fait pour le Soleil et la Lune.

Nous devons ajouter que les coefficiens A, B, C... de la table XVI ne sont pas constans, et qu'ils éprouvent de petits changemens avec le temps : c'est ce qu'on appelle leurs *variations séculaires*. Les nombres cités ne sont donc vrais que pour l'an 1830, et exigent des modifications pour les autres années. Mais comme ces variations sont extrêmement lentes, on peut employer les valeurs de A, B, C... comme constantes pendant au moins 10 ans consécutifs, sans avoir à craindre d'erreurs notables, surtout en considérant qu'on a négligé ici les perturbations, qui exercent une bien plus grande influence.

Les autres nombres de la table ont aussi leurs variations séculaires, excepté cependant les moyens mouvemens, qui restent constans avec la durée indéfinie.

*Sur la manière de réduire les formules en tables.*

283. Lorsqu'une formule est d'un fréquent usage, on trouve un très grand avantage à la réduire en table, d'où l'on puisse tirer, pour ainsi dire, à vue, la valeur de la quantité demandée. Où en serait-on si l'on était obligé de recourir à la formule des logarithmes, pour trouver ceux des nombres donnés, lorsque ces log. sont nécessaires, ou réciproquement? Le plus souvent l'équation renferme une variable $x$ qui est connue dans chaque cas, et qu'on appelle l'*argument de la table;* la table est destinée à faire connaître la valeur correspondante de l'autre variable $y$, dans l'équ. $y = f(x)$ entre ces deux quantités. La table contient alors dans une colonne les valeurs consécutives qu'on attribue à la variable $x$, et, en regard de chacun de ces nombres, on inscrit, dans une seconde colonne, les valeurs correspondantes $y$. La table n'a donc que deux colonnes, et est à simple entrée.

Par exemple, dans les tables logarithmiques, un *nombre* est donné, et l'on en cherche le *logarithme;* le premier est l'argu-

ment avec lequel on entre dans la table, où il est placé dans une première colonne : on lit le logarithme inconnu dans une seconde colonne, sur la ligne où est inscrit le nombre. Cette table peut aussi servir à résoudre le problème inverse, étant donné le logarithme, trouver le nombre correspondant.

Mais quelquefois l'équation renferme trois variables..... $y=f(x, v)$ : il y a alors deux argumens donnés, $x$ et $v$, et l'on cherche la valeur correspondante de $y$. La table est dite à *double entrée*. Une première colonne contient les valeurs successives de $x$, et toutes les colonnes suivantes de la même page se rapportent à celles de $v$ ; et l'on inscrit en tête de chaque colonne une valeur particulière de $v$. On obtient $y$, en cherchant le nombre qui répond à la ligne où se trouve $x$, et à la colonne qui est relative à $v$.

Ainsi pour avoir la quantité $y$, il faut chercher, dans la première colonne, le nombre $x$ ; suivre la ligne horizontale où ce nombre se trouve, jusqu'à ce qu'on arrive à colonne qui porte en tête la quantité $v$ ; $y$ est inscrit dans la case qui se trouve à l'intersection de ces deux lignes, l'une horizontale, l'autre verticale. La table de Pythagore, pour trouver le produit de deux nombres $x$ et $v$, est de cette espèce, et se rapporte à l'équ. $y = x \times v$. Notre table IX des augmentations $x$ du demi-diamètre lunaire R, est aussi à double entrée ; nous en avons donné la formule, p. 61, où les variables sont $x$, R, et la dist. zénith. Z'.

284. Comme les tables procèdent toujours par valeurs régulières des argumens, les nombres donnés d'une question ne s'y trouvent pas le plus ordinairement : on est donc obligé de recourir aux interpolations pour insérer entre les valeurs de la table les quantités qui y manquent et dont on a besoin. C'est ce qu'on fait dans les tables de logarithmes, pour obtenir ceux des nombres fractionnaires, etc. ; nos tables de réfraction, de parallaxes, etc., sont aussi dans le même cas.

Nous avons exposé, p. 33, 63 et 97, le procédé à suivre pour faire ces calculs, dans les tables à simple entrée, et il est inutile de dire qu'il importe que ces interpolations se fassent de mémoire, autant que cela est possible. Il convient donc que les résul-

tats $y$ de la table soient en général très voisins les uns des autres.

285. Nous avons donné, p. 200, l'équ. (B) qui sert aux *réductions* k *au méridien;* la table X en donne les grandeurs. Il a donc fallu calculer les valeurs de $k$ pour toutes celles des angles horaires $p$. On change d'abord $p$ en $15x$, pour que l'argument soit le temps $x$, et l'on a

$$k = \frac{2 \sin^2 (7\frac{1}{2}x)}{\sin 1''} = m \sin^2 (7\tfrac{1}{2}x),$$

en faisant $m = \frac{2}{\sin 1''}$, $\log m = 5.6154551$.

On fait varier $x$ de seconde en seconde, savoir, $x = 0''$, $1''$, $2''$, $3''$... Le calcul donne chaque valeur correspondante de $k$, il ne reste plus qu'à disposer ces résultats en table.

On opère de même pour toute autre équation $y = f(x)$; c'est-à-dire qu'on attribue à $x$ des valeurs consécutives voisines, qu'on prend, le plus souvent, en progression arithmétique; puis on fait les calculs prescrits par la forme de la fonction $f$. Lorsque cette fonction renferme plusieurs termes, on calcule chacun séparément, ce qui donne d'abord une table pour chaque terme, après quoi on réunit les termes pour ne former qu'une seule table du tout.

286. Mais comme ces opérations sont très longues, à cause de la multitude des valeurs de $x$, on les abrège beaucoup par l'un des deux procédés que nous allons exposer.

I. On se contente de faire les calculs pour de certaines valeurs de $x$ équidistantes, et l'on interpole ensuite en ayant égard aux différ. 2es, 3es..., suivant la méthode exposée p. 97; et pour faciliter les opérations, on choisit les valeurs de $x$, telles que les résultats $y$ soient assez rapprochés pour que les différ. 2es soient nulles, ou du moins constantes : dans le 1er cas, l'interpolation se réduit à distribuer des différences en partie proportionnelles sur les nombres intermédiaires, comme on l'a fait page 33.

Ainsi, dans l'équ. $k = m \sin^2 (7\frac{1}{2}x)$, on fera

| | | | |
|---|---|---|---|
| $x=8'$, d'où $k=125''654$ | | | |
| 8.10''........... 130,940 | $\Delta^1=5''286$ | | $\Delta^2=0,113$ |
| 8.20........... 136,339 | 5,399 | | 0,108 |
| 8.30........... 141,846 | 5,507 | | |

Comme les $\Delta^2$ sont très petits, il est permis de les considérer comme constans dans chaque intervalle. Ainsi, appliquant la méthode de la note p. 98, on aura $h=10$, $\delta''=0,0011$, $\delta'=0,5236$, et il vient pour

| $x=8'0''$ | $k=125''654$ | $x=8'\ 6''$ | $k=128''813$ |
|---|---|---|---|
| 8.1 | 126,178 | 8. 7 | 129,343 |
| 8.2 | 126,703 | 8. 8 | 129,874 |
| 8.3 | 127,228 | 8. 9 | 130,407 |
| 8.4 | 127,755 | 8.10 | 130,940 |
| 8.5 | 128,284 | etc. | etc. |

On a soin de pousser l'approximation un peu plus loin qu'il n'est nécessaire; on néglige ensuite la dernière décimale, qu'on n'est pas assuré d'avoir exacte.

On voit que ce procédé réduit d'abord la table à un dixième de son étendue définitive, et qu'on la complète ensuite par une interpolation absolument semblable à celle dont on ferait usage si la table n'était d'abord composée que de 10 en 10 secondes, et qu'on voulût trouver les nombres correspondans aux secondes intermédiaires.

On trouve une autre application de ce procédé à la formation de la *Table des cordes*, dans notre *Cours de Math. pures*, t. II, p. 518. C'est sur cette théorie que nous avons composé la table de notre *Goniométrie*.

287. II. Le second procédé dont on fait usage pour réduire en table une formule proposée $y=f(x)$, consiste à calculer d'abord directement une valeur de $y$, répondant à une quelconque donnée de $x$; puis à déduire les nombres suivans $y$ de proche en proche, pendant une certaine étendue, par l'équ. de la page 97, après s'être procuré les $\Delta'$, $\Delta^2$, ... par la différenciation de l'équ. $y=f(x)$. On a

$$dy=f'.dx\,,\ d^2y=f''.dx^2,\ldots$$

Il est clair que si $dx$ est très petit, c'est-à-dire si l'on ne met qu'un très court intervalle entre les valeurs de $x$, on peut prendre $dy, d^2y, \ldots$ pour $\Delta^1, \Delta^2 \ldots$, et ensuite appliquer la formule citée; sauf à simplifier les calculs en prenant certaines précautions pour que $\Delta^2$, ou au moins $\Delta^3$, puisse être regardé comme constant. L'adresse du calculateur consistera ensuite à préparer les expressions $dy, d^2y\ldots$ de manière à conduire à des opérations courtes et faciles. Et si les valeurs de $x$ ainsi adoptées sont trop rapprochées pour la table qu'on veut composer, on rejettera après coup les résultats qu'on ne veut pas y conserver, mais qui auront servi à trouver les autres. C'est surtout quand les $\Delta^2$ sont si petits qu'on peut les supposer nuls, que ce procédé rend les opérations promptes et faciles.

Ainsi, pour $y = \log x$, on aura

$$dy = \frac{Mdx}{x}, \quad d^2y = -\frac{Mdx^2}{x^2}, \ldots$$

M étant un nombre constant, appelé *module*, dont nous avons donné la valeur page 3.

Or, si l'on fait $dx = 1$, la table des nombres $x$ procédera d'unité en unité; et si $x$ est très grand, $d^2y$ sera si petit, qu'on pourra le supposer nul. Ainsi, on sera en droit de prendre $\Delta^1 = \frac{M}{x}$, et pendant une certaine étendue de la table, $\Delta^1$ sera censé constant, parce qu'en se bornant au nombre limité de décimales dont on a besoin, ces accroissemens de $x$ n'influent sur le quotient $\Delta^1$ qu'à des intervalles éloignés. Cet exemple est développé dans notre *Cours de Math.*, t. II, p. 180. On y voit, par exemple, que pour $x = 10001$, on a $\Delta^1 = 0{,}000043425$, ainsi $\log. 10001 = 4{,}0000434$ : la même différence existera entre tous les log. même au-delà du nombre 10020, en sorte que, par de simples additions, on trouve de suite 20 log. au moins. Au-delà de 10020, on prend ce nombre pour $x$, et l'on calcule de nouveau $\Delta^1$, qui donne 10 autres logarithmes, et ainsi de suite.

Reprenons notre équ. $k = m \sin^2 (7\frac{1}{2}x)$, d'où

$$dk = 2m \sin(7\tfrac{1}{2}x).\cos(7\tfrac{1}{2}x).7\tfrac{1}{2}dx = 7{,}5\,mdx \sin(15x),$$

$$d^2k = \cos(15x).m.7{,}5.15dx^2 = \tfrac{1}{2}\,15^2\,mdx^2 \cos(15x);$$

on fait $dx = 1''$, ou plutôt $= 1 \times \sin 1''$, pour exprimer l'arc en secondes, et à cause que $mdx = 2$,

$$dk = 15 \sin(15x) = \delta', \quad d^2k = 225 \sin 1'' \cos(15x) = \delta''.$$

Prenons, par exemple, $x = 8'$, nous aurons $\delta' = 0{,}524$ et $\delta'' = 0{,}0011$ comme précédemment. On peut donc, en partant de $x = 8'$, calculer d'abord les nombres de la table de seconde en seconde, jusqu'à $8'\ 10''$, comme on l'a fait ci-devant; puis prenant le dernier résultat pour terme de départ, et faisant $x = 8'\ 10''$, dans les $d^1$ et $d^2$ ci-dessus, en tirer les valeurs de $\delta'$ et $\delta''$ qui serviront à continuer la série dix rangs plus loin; et ainsi de suite.

288. Quant aux tables à double entrée, l'interpolation s'en fait comme il a été expliqué p. 63. On comprend qu'on évite le plus qu'on peut ces sortes de tables, parce que les interpolations en sont difficiles, à moins que les nombres n'y soient si rapprochés, que ce calcul soit presque inutile.

Et quant à la manière de composer ces tables sur la formule $y = f(x, v)$, il suit de ce qui a été expliqué qu'on compose chaque colonne qui répond à une valeur particulière de $v$, ce qui réduit, pour cette partie, la fonction à la seule variable $x$, et par conséquent ramène la question à ce qui a été expliqué ci-devant. Il ne nous reste donc rien à ajouter à ce sujet.

On conçoit de même la formation des tables dans le cas de quatre variables $y = f(x, v, t)$ : mais on n'y a jamais recours, parce qu'il serait impossible d'en disposer les résultats dans les cases d'un parallélépipède. On doit donc décomposer la table en plusieurs autres, dont chacune se rapporte à une valeur particulière de celle des variables qui se prête le mieux à cette opération.

*De la composition des formules astronomiques, et de la détermination des constantes; Équations de condition; Méthodes de Tobie Mayer et des moindres carrés.*

289. Les formules qu'on réduit en tables astronomiques sont données par la théorie de l'attraction; elles se composent d'élémens les uns constans A, B, C, . . ., les autres variables $\phi$, $\theta$, $\xi$; . . . c'est en attribuant à ceux-ci les valeurs qui conviennent aux circonstances, qu'on en déduit le lieu des planètes à chaque instant.

Mais cela suppose que les constantes sont connues dans l'équation qu'on réduit en table : c'est l'observation qui en fait connaître les valeurs. Expliquons comment on les détermine.

Supposons d'abord qu'il n'y ait qu'une seule constante A inconnue dans l'équ. $F(A, \phi, \theta ...) = 0$, qui représente les circonstances d'un phénomène. On fera une observation d'où l'on tirera les valeurs correspondantes des variables $\phi$, $\theta$...; substituant ces nombres, l'*équ. de condition* $F = 0$ ne renfermera que la seule inconnue A, et l'on pourra en tirer la valeur.

Il est vrai que l'observation la plus attentive ne donnera pas en toute rigueur les quantités $\phi$, $\theta$..., et que la valeur de A qui résultera du calcul ne sera pas exacte. Mais en répétant un grand nombre de fois les expériences, tous les nombres A qu'on en tirera devront différer très peu les uns des autres : on rejettera même, comme défectueuses, les observations qui conduiraient à de trop fortes différ.; prenant ensuite pour A la moyenne entre tous ces résultats très voisins, cette valeur sera indépendante des erreurs d'observation, parce que ces erreurs se compensent par leur multitude. C'est cette marche que nous avons suivie dans tout ce qui a été dit précédemment.

Supposons que l'équ. renferme plusieurs constantes A, B, C..., dans l'équ. $F(\phi, \theta, ... A, B...) = 0$, qui exprime la dépendance des élémens du phénomène. On fera d'abord une observation propre à faire connaître les valeurs simultanées des variables $\phi$, $\theta$,...; en substituant celles-ci, on aura une relation $F = 0$ entre les seules constantes inconnues; c'est ce qu'on appelle

une *équation de condition*. En répétant les expériences autant de fois qu'il y a de ces constantes, on aura donc le même nombre d'équ. et d'inconnues, et l'on pourra trouver celles-ci par le secours de l'élimination.

Et comme les observations sont susceptibles de petites erreurs, on ne pourra regarder comme exacts les nombres A, B, C,... ainsi déterminés. Mais nous verrons comment on corrige ces quantités approchées.

Nous avons supposé que la forme de la fonction F était connue, et c'est en effet ce qui arrive dans l'état actuel de l'Astronomie : mais dans le cas où elle ne le serait pas, on la trouve d'une manière empirique, c.-à-d. qu'on la suppose, et qu'on la soumet ensuite aux épreuves qui peuvent confirmer ou détruire l'hypothèse. C'est ce qu'on fait pour certaines *inégalités*. Ainsi, les *perturbations* reprenant les mêmes valeurs quand les astres reviennent dans les mêmes positions relatives, on préjuge que ces variations suivent tous les progrès des distances angulaires de ces corps. Et comme en désignant par $\alpha$ l'angle d'où dépend cette inégalité, sin $\alpha$ croît et décroît avec $\alpha$, et repasse périodiquement par les mêmes grandeurs, on représente par A sin $\alpha$ cette inégalité, A étant une constante inconnue qui en est la plus grande valeur. On s'assure ensuite si en effet A sin $\alpha$ peut prendre successivement toutes les valeurs qu'on observe pour cette inégalité, et l'on tire de ce procédé empirique la forme de la fonction cherchée, et la constante A. C'est, au reste, ce que la théorie de l'attraction confirme, en prouvant que la perturbation causée par l'action d'une planète sur une autre peut être mesurée par la fonction

$$A \sin \alpha + B \sin 2\alpha + C \sin 3\alpha \ldots$$

(V. *Méc. cél*, t. III, p. 104.)

Chaque planète produit, il est vrai, sa perturbation particulière, et toutes ces actions se combinent entre elles pour produire un fait unique, qui est l'effet observé. Mais il y a un principe général qui veut que, *quand plusieurs causes produisent des variations très petites, il est permis de calculer sé-*

*parément l'effet de chaque cause, comme si elle existait seule; et la somme de tous les résultats est l'effet de toutes ces causes combinées.* Ainsi, chaque planète produit sa perturbation, qui donne sa série propre; la somme de toutes les séries semblables est l'effet général. Il faut donc déterminer à la fois toutes les constantes par l'observation et les équ. de condition qu'elle fournit.

290. Montrons, sur des exemples, l'usage de ces procédés, et commençons par le cas où la formule ne renferme qu'une seule constante à déterminer.

On sait que l'aberration d'une étoile en déclin. (n° 308) est exprimée par la valeur

$$\mu\,(1 + \tfrac{1}{2}\,e^2)\,\frac{\cos Æ \sin D}{\cos\varphi}\,\sin(\odot + \varphi);$$

en posant $\tan\varphi = \sin\omega \tan D \sec Æ - \cos\omega \tan Æ$.

Æ est l'asc. dr. de l'étoile, D sa déclin., $\odot$ la longit. du Soleil, $\mu$ une constante à déterminer, $\omega$ l'obliquité de l'écliptique; enfin, son excentricité $e = 0{,}0168$, $\log(1 + \frac{1}{2}\,e^2) = 0.0000598$. Les catalogues donnent D et Æ, qu'on peut d'ailleurs trouver par observation (p. 50); ainsi, il est facile de calculer l'arc $\varphi$ pour une étoile désignée, et de poser

$$m = (1 + \tfrac{1}{2}\,e^2)\,\frac{\cos Æ \sin D}{\cos\varphi};$$

$$\textit{Aberr. en décl.} = \mu m \sin(\odot + \varphi) = \mu X.$$

L'observation de la hauteur méridienne de l'étoile corrigée de la réfraction, donne sa déclin. app., d'où l'on retranche : 1°. la nutation, 2°. la précession, 3°. l'aberration. Les deux premières sont supposées connues, et la troisième est $= \mu X$, $\mu$ étant inconnue. La diff. est donc la déclin. vraie, réduite au 1<sup></sup>er janvier de l'année courante.

Que l'on répète cette opération un autre jour, et la déclin. vraie qu'on obtiendra devra être la même que la précédente. Égalant donc ces deux expressions, on aura une équ. qui contiendra $\mu$; d'où l'on tirera la valeur de cette constante. En réi-

térant un grand nombre de fois ce procédé, on obtiendra autant de valeurs de $\mu$, qui devront différer très peu les unes des autres : on prendra pour $\mu$ la moyenne entre ces divers résultats.

Il convient de faire l'observation sur des étoiles circompolaires, à leur passage au méridien supérieur, parce qu'étant alors peu distantes du zénith, la réfraction n'est pas douteuse : en outre, les observations que l'on comparera devront être faites à six mois d'intervalle, pour que les longit. ⊙ diffèrent d'à peu près 6 signes ; car le nombre X, qui devient diviseur, est le plus grand possible, et le quotient est plus exact. Voici le calcul pour deux dist. zénith. méridiennes de α Cassiopée, observées à Greenwich en 1826.

| | | | |
|---|---|---|---|
| Le 8 mai...... | 4° 5′ 49″59 | Le 7 novembre. | 4° 6′ 27″ 71 |
| Réfraction...... | 4,133 | ............... | 4,182 |
| Latitude...... | 51.28.39 | ............... | 51.28.39 |
| Déclin. app.... | 55.34.32,723 | ............... | 55.35.10,892 |
| Préc. nutat.... | + 6,751 | | − 2,745 |
| Aberration.... | + 0,694.$\mu$ | ............... | − 0,668.$\mu$ |

Au 1 janv... $D = 55.34.39,474 + 0'',694\mu = 55.35.\ 8,147 - 0'',668\mu$,

d'où $1'',362\,\mu = 28'',673, \quad \mu = 21'',052$.

Tel est le procédé qu'a suivi M. Richardson, dans son Mémoire inséré parmi ceux de la Société Astr. de Londres ; d'où il conclut $\mu = 20'',446$, par une moyenne entre 4119 dist. zénith. méridiennes de 12 circompolaires.

On trouve, par le même procédé, la constante de la nutation, et toute constante qu'on peut isoler des autres dans une équation, pour la considérer à part.

291. Venons-en maintenant au cas où l'équ. renferme plusieurs constantes ; je prends l'exemple suivant, que je dois à l'obligeance de M. Bouvard. Ce savant astronome y fait voir qu'on peut obtenir une ébauche assez exacte du mouvement d'une planète, par un très petit nombre d'observations ; et nous exposerons d'autant plus volontiers les détails de ce procédé, qu'il est très propre à faire concevoir la formation,

la disposition et l'usage des tables, but principal que nous nous sommes proposé dans cette troisième partie.

La construction des tables du Soleil et des planètes suppose d'abord que l'astre se meut d'un mouvement uniforme et circulaire; c'est ce qu'on appelle le *mouvement moyen;* ensuite on corrige la longitude qui en résulte de ce qu'on appelle l'*équation du centre*, opération qui rétablit le corps dans son orbite elliptique, où sa vitesse est variée. L'équ. du centre n'est autre chose que la différence entre le lieu moyen et le lieu vrai, calculé par la formule dont on va parler ci-après.

Ainsi, la longitude vraie du Soleil à un instant donné dépend de quatre élémens :

1°. La *longitude moyenne* L au minuit qui commence l'année;

2°. Le *moyen mouvement diurne* $m$, c.-à-d. l'arc que l'astre décrit chaque jour dans un cercle, avec une vitesse constante, en sorte qu'après $t$ jours, la longitude moyenne soit devenue $L + mt$;

3°. L'*excentricité* $e$ de l'ellipse, quantité qui en détermine les dimensions;

4°. Enfin, la *longitude moyenne* $p$ *du périgée*, qui fixe la position de l'orbite dans l'espace, parce qu'on suppose ici qu'on en connaît l'obliquité.

Une fois ces quatre constantes connues, le lieu de l'astre l'est aussi; car les lois de Képler ont donné la théorie du mouvement elliptique; d'où résulte que si $v$ est la *longitude vraie* d'une planète à un instant quelconque, $e$ l'excentricité de son orbite, $\varphi$ l'*anomalie vraie* comptée du périhélie, on a cette relation (*)

$$\text{longit. moy.} = v - 2e \sin \varphi + \tfrac{5}{4} e^2 \sin 2\varphi + \text{etc.} \quad (1).$$

Les trois premiers termes de cette série suffisent pour une ap-

(*) Cette formule est démontrée dans tous les traités d'Astronomie. (V. *Mécan. cél.*, t. I, p. 181; *Astron.* de Delambre, t. I, p. 39.) Elle se tire aussi des équ. de l'*Uranographie*, p. 378, en éliminant l'arc auxiliaire $\varphi$.

proximation, même en supposant l'orbite très excentrique. Voulant l'appliquer au Soleil, nous sommes même en droit de négliger les $e^2$, ainsi nous poserons

$$L + mt = v - 2e \sin (v - p), \qquad (2)$$

puisque évidemment longit. moy. $= L + mt$, et anomalie vraie $=$ longit. vraie $v$ — longit. $p$ du périhélie, $\varphi = v - p$. Telle est la formule qu'il faut réduire en table pour être en état d'obtenir la longit. vraie $v$ à chaque instant, lorsque la longit. moy. $L + mt$ est connue. Mais il faut avant tout déterminer par l'observation les quatre constantes $L$, $m$, $e$ et $p$.

Que l'on observe avec soin quatre passages du Soleil au méridien, afin d'en avoir l'asc. dr., et par suite la longitude vraie $v$. (*V.* p. 51). On aura quatre valeurs correspondantes des variables $v$ et $t$, qui, substituées dans l'équ. (2) ci-dessus, en donneront trois autres, telles que

$$L + mt' = v' - 2e \sin (v' - p), \text{ etc.};$$

en soustrayant ces équ. deux à deux, L disparaît, et il vient trois équ. de la forme

$$m(t' - t) = v' - v - 2e [\sin (v' - p) - \sin (v - p)]. \quad (3)$$

Faisons, pour abréger, $t' - t = \theta$, $v' - v = a$, comme en chassant $v'$, il vient

$$\sin(v' - p) = \sin (v - p + a) = \sin (v - p) \cos a + \cos (v - p) \sin a,$$

on a

$$m\theta = a + 2e [\sin (v - p)(1 - \cos a) - \cos (v - p) \sin a].$$

Donc on a ces trois équ. pour déterminer $m$, $e$ et $p$ :

$$m\theta - a = 2e [2 \sin (v - p) \sin^2 \tfrac{1}{2} a - \cos (v - p) \sin a],$$
$$m\theta' - a' = 2e [2 \sin (v - p) \sin^2 \tfrac{1}{2} a' - \cos (v - p) \sin a'],$$
$$m\theta'' - a'' = 2e [2 \sin (v - p) \sin^2 \tfrac{1}{2} a'' - \cos (v - p) \sin a''].$$

En faisant $\theta' = t'' - t$, $\theta'' = t''' - t$, $a' = v'' - v$, $a'' = v''' - v$.

On élimine $e$ en divisant membre à membre. En représentant

pour abréger par M et N les premiers quotiens, il vient les équ. suivantes, qui ne renferment plus que les deux inconnues $m$ et $p$ :

$$(4)\begin{cases} M = \dfrac{m\theta - a}{m\theta' - a'} = \dfrac{2 \operatorname{tang}(\nu - p) \sin^2 \frac{1}{2} a - \sin a}{2 \operatorname{tang}(\nu - p) \sin^2 \frac{1}{2} a' - \sin a'}; \\ N = \dfrac{m\theta - a}{m\theta'' - a''} = \dfrac{2 \operatorname{tang}(\nu - p) \sin^2 \frac{1}{2} a - \sin a}{2 \operatorname{tang}(\nu - p) \sin^2 \frac{1}{2} a'' - \sin a''}. \end{cases}$$

Réduisant chacune de ces équ. au même dénominateur, on en tire ces valeurs :

$$2 \operatorname{tang}(\nu - p) = \frac{M \sin a' - \sin a}{M \sin^2 \frac{1}{2} a' - \sin^2 \frac{1}{2} a} = \frac{N \sin a'' - \sin a}{N \sin^2 \frac{1}{2} a'' - \sin^2 \frac{1}{2} a}. \quad (5)$$

Voilà donc $p$ éliminé, et l'équ. (5) ne contient plus que l'inconnue $m$, engagée dans les fonctions M et N. Voyons donc à tirer $m$ de cette équ. On réduit au même dénom., et il vient $Mn + Ni + kMN = 0$, en posant pour abréger

$$\begin{aligned} n &= \sin a \sin^2 \tfrac{1}{2} a' - \sin a' \sin^2 \tfrac{1}{2} a, \\ k &= \sin a' \sin^2 \tfrac{1}{2} a'' - \sin a'' \sin^2 \tfrac{1}{2} a', \\ i &= \sin a'' \sin^2 \tfrac{1}{2} a - \sin a \sin^2 \tfrac{1}{2} a''. \end{aligned}$$

On prépare d'abord ces expressions pour le calcul des log., en remarquant que $\sin a = 2 \sin \frac{1}{2} a \cos \frac{1}{2} a$ ; et l'on a

$$\begin{aligned} n &= 2 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} a' \sin \tfrac{1}{2} (a' - a), \\ k &= 2 \sin \tfrac{1}{2} a' \sin \tfrac{1}{2} a'' \sin \tfrac{1}{2} (a'' - a'), \\ i &= -2 \sin \tfrac{1}{2} a \sin \tfrac{1}{2} a'' \sin \tfrac{1}{2} (a'' - a). \end{aligned}$$

Remettant pour M et N leurs valeurs (4), l'équ. ci-dessus devient

$$\frac{n(m\theta - a)}{m\theta' - a'} + \frac{i(m\theta - a)}{m\theta'' - a''} + \frac{k(m\theta - a)^2}{(m\theta' - a')(m\theta'' - a'')} = 0;$$

d'où $[m(n\theta'' + i\theta' + k\theta) - (na'' + ia' + ka)](m\theta - a) = 0$.

Or, $m\theta - a$ n'est pas nul, puisque $e$ le serait aussi (par l'équ. 3). C'est donc le premier facteur qui est $= 0$ ; d'où l'on tire

$$m = \frac{na'' + ia' + ka}{n\theta'' + i\theta' + k\theta} = \frac{a'' + \frac{i}{n}a' + \frac{k}{n}a}{\theta'' + \frac{i}{n}\theta' + \frac{k}{n}\theta}, \qquad (6)$$

en divisant haut et bas par $n$. Du reste, on a

$$\frac{i}{n} = -\frac{\sin\frac{1}{2}a''\sin\frac{1}{2}(a''-a)}{\sin\frac{1}{2}a'\sin\frac{1}{2}(a'-a)}, \quad \frac{k}{n} = \frac{\sin\frac{1}{2}a''\sin\frac{1}{2}(a''-a')}{\sin\frac{1}{2}a\sin\frac{1}{2}(a'-a)}. \qquad (7)$$

$\theta$, $\theta'$, $\theta''$, sont les jours écoulés depuis celui de la 1re observation jusqu'aux trois autres; $a$, $a'$, $a''$, sont les accroissemens qu'éprouve la longitude vraie depuis le premier jour jusqu'aux subséquens respectifs.

Ainsi, après avoir trouvé les valeurs de ces fractions, on les substituera dans l'équ. (6), qui donnera le moyen mouvement diurne tropique $m$. Connaissant $m$, on calculera les valeurs de M et N, qui sont les premiers membres des équ. (4) : substituant ces nombres dans l'équ. (5), on aura deux valeurs de tang $(v-p)$, et par suite, de la longitude moyenne $p$ du périhélie. Recourant à l'équ. (3), on en tirera cette valeur de l'excentricité $e$,

$$e = \frac{\frac{1}{2}(m\theta - a)}{\sin(v-p) - \sin(v'-p)}. \qquad (8)$$

Enfin, l'équ. (2), qui en représente 4, à cause des valeurs de $v$ et $t$, correspondantes aux 4 observations, donnera la longitude moyenne $m$ de l'époque. Telle est l'élégante méthode de M. Bouvard pour ébaucher l'orbite d'une planète.

Appliquons cette théorie au Soleil.

Voici les résultats de quatre observations faites en 1819 à l'Observatoire royal de Paris, vers les apsides et les moyennes distances, rapportées au temps moyen.

| | |
|---|---|
| 3 janvier, à 12h 4′ 38″5 | $v = 9^s 12° 20' 57''9$ |
| 6 avril, à 12. 2.40,3 | $v' = 0. 15.50.52,1$ |
| 28 juin, à 12 2.40,1 | $v'' = 3. 5.52.39,8$ |
| 1er oct., à 11.49.52,8 | $v''' = 6. 7.26.41,8$ |

| | |
|---|---|
| $\theta = 92,998632$, | $a = 93°29'54''2 = 93°,498389$ |
| $\theta' = 175,998630$, | $a' = 173.31.41,9 = 173,528306$ |
| $\theta'' = 270,989749$, | $a'' = 265. 5.43,9 = 265,095528.$ |

*Calcul de* m *par les équ.* (7 et 6).

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sin \frac{1}{2} a''$ | 9.8672987 — | | | 9.8672987 — |
| $\sin \frac{1}{2}(a''-a)$ | 9.9988314 | | $\sin \frac{1}{2}(a''-a')$ | 9.8553442 |
| $\sin \frac{1}{2} a'$ — | 9.9993070 | | $\sin \frac{1}{2} a$ — | 9.8623469 |
| $\sin \frac{1}{2}(a'-a)$ — | 9.8082026 | | | 9.8082026 |
| $\frac{i}{n}$ | 0.0586205 — | | $\frac{k}{n}$ | 0.0520934 |
| $a'$ | 2.2393703 | | $a$ | 1.9708041 |
| | 2.2979908 — | 105°4138 | | 2.0228975 |
| | — 198°6053 | $a'' =$ 265,0955 | | |
| | | — 198,6053 | | |
| | | Numér. = 171,9040. | | |
| | 0.0586205 — | | | 0.0520934 |
| $\theta'$ | 2.2455093 | | $\theta$ | 1.9684765 |
| | 2.3041298 — | 104°8504 | | 2.0205699 |
| | — 201°4326 | $\theta'' =$ 270,9897 | | |
| | | — 201,4326 | Numér. | 2.2352863 |
| | | Dénom. = 174,4075 | | — 2.2415651 |
| | | | $\log m =$ | $\bar{1}$.9937212 |
| | | | 3600″ | 3.5563025 |
| | | $m = 3548'',328 = 59' 8'',33$ | | 3.5500237. |

*Calcul de* M *et* N (équ. 4), *et de* v — p (équ. 5).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $m$ | $\bar{1}$.9937212 | | $\bar{1}$.9937212 | | $\bar{1}$.9937212 |
| $\theta$ | 1.9684765 | $\theta'$ | 2.2455093 | $\theta''$ | 2,4329529 |
| | 1.9621977 | | 2.2392305 | | 2.4266741 |
| | 91°66374 | | 173°47244 | | 267°10012 |
| $a$ | — 93,49839 | $a'$ — | 173,52831 | $a''$ — | 265,09553 |
| | — 1,83465 | | — 0,05587 | | + 2,00459 |
| log | 0.2635533 — | | — $\bar{2}$.7471787 — | | — 0.3020256 |
| | | | 0.2635533 — | | 0.2635533 — |
| | | M | 1.5163746 + | N | $\bar{1}$.9615277 — |
| N | $\bar{1}$.9615277 — | | $\bar{1}$.9615277 — | | |
| $\sin a''$ | 9.9984070 — | $\sin^2 \frac{1}{2} a''$ | 9.7345974 | | |
| | 9.9599347 + | | 9.6961251 — | 0.5 | $\bar{1}$.6989700 |
| Nombre | 0.9118739 | | — 0.4967353 | Numér. | 8.9358236 |
| $\sin a$ — | 0.9981367 | $\sin^2 \frac{1}{2} a$ — | 0.5305102 | Dénom. — | 0.0116743 |
| Numér. — | 0.0862628 | Dénom. — | 1.0272455 | tang $(v-p)$ | 8.6231193 |

d'où $\nu - p =$ 2°24′ 15″44

La valeur de M donne de même. = 2.24.11,86

La moyenne est.......... $\nu - p =$ 2.24.13,65

Et comme on a.............. $\nu =$ 9ˢ12.20.57,9,

il vient, longit. du périhélie à l'époque..... $p =$ 9. 9.56.44,2.

*Calcul de e par l'équ. (8).*

On a $\nu - p =$ 2°24′ 13″65 sinus naturel...... 0,0419418

$\nu' - p =$ 95.54. 7,9 sinus............ — 0,9946987

— $\bar{1}$.9789822 —....... Dénom. = — 0,9527569

$m\theta - a$......... 0.2635533 —

0,5............. $\bar{1}$.6989700

log $e$........... $\bar{1}$.9835411

3600″.......... 3.5563025

3.5398436.... $e =$ 57′ 46″,12.

sin 1″.......... $\bar{6}$.6855749

$\bar{2}$.2254185.... $e =$ 0,0168042.

Cette dernière expression est rapportée à la distance moyenne prise pour unité.

*Calcul de la longit. moy.* L *de l'époque* (équ. 2).

$m$.................. 3.5509237

$t$ = 2ʲ,5032235..... 0.3984996 $\nu$ = 9ˢ12°20′57″9

3.9485233.................. — 2,28. 2,26

2.................. 0.3010300

$e$.................. 3.5398436

sin ($\nu - p$)....... 8.6226467

2,4635203................. — 4.50,75

L = 9. 9.48. 4,9.

Comparons les valeurs que nous venons de trouver à celles des tables, corrigées par M. Bessel.

| | L | $m$ | $p$ | $e$ |
|---|---|---|---|---|
| | L = 9ˢ9°48′ 4″9, | $m$ = 59′ 8″ 33, | $p$ = 9ˢ9°56′ 44″2, | $e$ = 0.016804 |
| Tables | 9.9.47.58,4 | 59.8,33 | 9.9.49.37,3 | 0.016784 |
| Erreur.. | + 6,5 | 0,00 | + 7. 6,9 | + 0.000020. |

On voit quelle précision on obtient de ces calculs, et que

quatre expériences ont suffi pour trouver à fort peu près ce qu'ont donné des milliers d'observations. Nous avons supposé le périhélie immobile; mais la précession et l'action des planètes en augmentent chaque année la longitude d'environ 61"; Il aurait fallu dépouiller les valeurs de $v$ de cet effet, et aussi des perturbations, ce qui aurait dû conduire à des résultats plus approchés.

On comprend maintenant comment on peut déterminer à fort peu près les élémens de l'orbite d'une planète, par quatre observations; car la même marche de calcul peut être appliquée à tous ces corps. Seulement, si cette orbite avait une excentricité un peu forte, il faudrait tenir compte du terme en $e^2$ dans l'équ. (1), et des perturbations qui affectent chaque observation. Le calcul deviendrait plus compliqué; mais on pourrait y supposer connu le mouvement moyen diurne $m$, qu'on trouve aisément par la durée de la révolution; ce qui ne laisserait que trois constantes inconnues, et n'exigerait plus que trois équ. et trois observations.

De plus, comme les planètes ne se meuvent pas dans le plan de l'écliptique, il faut avoir égard à la réduction sur l'orbite, afin de ramener les observations à ce plan, et à supposer ces corps vus du centre du Soleil, ainsi qu'il a été expliqué p. 399.

La formation des tables du Soleil suit de ce qui vient d'être exposé; car la valeur de L donne la longitude de l'époque; le nombre $m$, ou la marche diurne du Soleil moyen, sert à composer le mouvement des mois, jours, heures... On a donc d'abord la longitude moyenne à tout instant. En transformant l'équ. (1) en fonction de l'anomalie moyenne $z$, au lieu de l'anomalie vraie $\varphi$, on a la formule de l'équ. du centre, p. 386.

Il ne reste plus, pour avoir une idée exacte de la disposition des tables des planètes, que d'indiquer comment on corrige les coefficiens constans et l'on introduit les perturbations. C'est ce que nous allons expliquer.

292. On corrige les constantes, dont on a déjà une approximation, par deux procédés différens. Commençons par la méthode différentielle de Tobie Mayer.

On remplace, dans l'équ. proposée, ces constantes A, B, C, ..

par $A+x$, $B+y$, $C+z$,...; $x$, $y$, $z$,... étant les petites corrections qu'on veut trouver. Il est clair qu'on est autorisé à en négliger les puissances supérieures, ce qui donne à l'équ. cette forme :

$$x\varphi + y\theta + z\xi + \ldots = m. \qquad (1)$$

Cette relation est visiblement la différentielle de l'équ proposée par rapport aux constantes A, B, C.... En posant $x = dA$, $y = dB$, $z = dC$,... les inconnues sont ici $x$, $y$, $z$.... Quant à $\varphi$, $\theta$, $\xi$,... ce sont les variables du problème.

Qu'on fasse une observation, pour en tirer des valeurs $a$, $b$, $c$,.. de ces variables, et l'équ. deviendra

$$ax + by + cz + \ldots = m. \qquad (2)$$

De même, une 2ᵉ, une 3ᵉ... observations, donneront

$$a'x + b'y + c'z + \ldots = m,$$
$$a''x + b''y + c''z + \ldots = m, \text{ etc.}$$

Et d'abord remarquons que si l'on se procure ainsi autant d'équ. que d'inconnues $x$, $y$, $z$..., on pourra en tirer celles-ci par l'élimination, et perfectionner les valeurs de A, B, C..., ce qui a déjà été fait en plusieurs lieux de ce livre. Et s'il arrive que $a$ soit très grand par rapport à $b$, $c$...; qu'il en soit de même pour $b'$, à l'égard de $a'$, $c'$..; et aussi de $c''$, par rapport à $a''$, $b''$..., l'élimination sera très aisée à faire : car ne prenons, par ex., que deux inconnues; nous aurons

$$x = \frac{m}{a} - \frac{by}{a}, \quad y = \frac{m}{b'} - \frac{a'x}{b'}.$$

Or, $\frac{b}{a}$ et $\frac{a'}{b'}$ étant supposés fort petits, le dernier terme de chaque équ. est négligeable pour une première approximation : ainsi, faisant $x = \frac{m}{a}$, dans la valeur de $y$, on aura celle-ci presque exacte; et cette valeur servira à donner $x$ avec plus de précision, etc. Ce procédé est celui qu'on a employé p. 106.

La méthode de Tobie Mayer consiste à tirer de l'observation un grand nombre d'équ. de la forme (2), et à combiner ces équ. par addition, soustraction..., à multiplier quelqu'une d'elles par un nombre pris à volonté, enfin à s'arranger de manière que l'une, $x$, des inconnues ait seule un très grand coefficient dans l'équ. résultante. Une autre combinaison donnera de même une équ. finale, où le coefficient de $y$ sera seul considérable, etc. On aura ainsi des équ. influencées par toutes les observations, et qui, jouissant de la propriété dont on vient de montrer l'usage, donneront les corrections $x$, $y$, $z$..., et par suite, les constantes A, B, C... Celles-ci une fois connues, l'équ. proposée $F(\varphi, \theta \ldots) = 0$ servira à donner l'une quelconque des variables, quand les autres seront déterminées, et l'on pourra réduire cette formule en table.

Il se peut que deux inconnues, $x$, $y$, aient leurs coefficiens $a$, $b$, proportionnels et de même signe dans toutes les équ. de condition : alors on ne peut combiner ces équ. de manière à accroître $a$, sans augmenter aussi $b$. Mais on égale $ax + by$ à une lettre $\alpha$, et l'on traite cette quantité $\alpha$, comme une inconnue qui remplace $ax + by$ dans les équ. Quand toutes les inconnues sont trouvées, ainsi que $\alpha$, on fait deux sommes de toutes les équ., et l'on a deux équ. qui suffisent pour trouver $x$ et $y$.

293. Ce procédé est simple et assez expéditif; les astronomes en font un fréquent usage. Mais quoique la *méthode des moindres carrés,* imaginée par M Legendre, donne lieu à des calculs beaucoup plus longs, on la préfère à cause de son exactitude. Cette méthode consiste à déterminer les corrections $x$, $y$, $z$,..., de manière que *la somme des carrés de toutes les erreurs soit la plus petite possible.*

Que l'on ait trouvé par l'observation, ainsi qu'on l'a expliqué ci-devant, des valeurs simultanées $a$, $b$, $c$..., pour les variables $\varphi$, $\theta$, $\xi$..., qui entrent dans l'équ. (1) (où nous transposerons $m$); il s'agira de trouver les corrections $x$, $y$, $z$... de nos constantes, non pas en rendant nulle la somme $ax + by + cz \ldots + m$, ce qui n'est pas vrai en toute rigueur, mais en faisant

en sorte que la somme des carrés des erreurs soit un *minimum*.

Soit donc $e$ l'erreur commise dans une première observation, $e'$ dans une seconde, $e''$ dans une troisième, etc. Nommons $a$, $b$, $c$,... les valeurs numériques des coefficiens dans la première expérience; $a'$, $b'$, $c'$,... ceux de la seconde, etc. Nous aurons

$$e = ax + by + cz + dt + \ldots,$$
$$e' = a'x + b'y + c'z + d't + \ldots,$$
$$e'' = a''x + b''y + c''z + d''t + \ldots,$$
etc.

On aura autant de ces équations de condition qu'on a fait d'observations. Faisons la somme des carrés de ces équ., et contentons-nous d'écrire au 2ᵉ membre les termes en $x$, attendu que les autres sont de même forme. Il viendra

$$e^2 + e'^2 + e''^2 + \ldots =$$
$$(a^2 + a'^2 + a''^2 \ldots)x^2 + 2xy(ab + a'b' + ..) + 2xz(ac + a'c' + ..) + \text{etc.}$$

Cette équation est de la forme $S = Mx^2 + 2Nx + P$. Pour que cette quantité soit *minimum*, il faut que la dérivée soit nulle, savoir, $Mx + N = 0$. Ainsi en ne considérant que le facteur inconnu $x$, il faut que l'on ait

$$0 = x(a^2 + a'^2 + \ldots) + y(ab + a'b' \ldots) + z(ac + a'c' + \ldots) + t(ad..)$$

ou

$$0 = a(ax + by + cz + dt \ldots) + a'(a'x + b'y + c'z \ldots) + a'' \ldots \text{ etc.}$$

*Pour former l'équation du* minimum *relative à l'une des inconnues, multipliez chaque équation de condition par le coefficient de l'inconnue dans cette équation, pris avec son signe, et faites la somme de tous ces produits.*

Il est bien entendu qu'on en fera autant pour chaque inconnue, ce qui donnera un égal nombre d'équations et d'inconnues au 1ᵉʳ degré. En effet, d'après la théorie connue des *maxima* de plusieurs variables, il faut que la condition soit satisfaite par rapport à chaque variable (*V.* mon *Cours de Math.*, nº 720.)

Il ne restera plus qu'à éliminer par les procédés ordinaires, et on aura pour $x, y, z\ldots$ des valeurs telles, que les erreurs qui proviendront des petits défauts d'observation seront atténuées à un tel degré qu'on puisse se servir de l'équ. comme si les coefficiens étaient exacts.

Comme ce procédé ne s'applique qu'autant qu'on a un grand nombre d'observations, l'appareil de calcul est fort étendu. Nous en donnerons plus tard un exemple. Consultez le mémoire de M. Legendre sur *la détermination des orbites des comètes*.

La méthode des moindres carrés s'applique à une multitude d'expériences de Physique, de Chimie, d'Astronomie... Elle offre un moyen sûr de déterminer, avec les moindres erreurs possibles, les constantes des équations qui représentent la loi des phénomènes. C'est un des plus ingénieux procédés dont la science ait pu s'enrichir pour perfectionner les théories et étendre les recherches.

294. Pour bien concevoir la méthode que nous venons d'exposer, ne supposons qu'une seule inconnue dans l'équ.; on a $\phi x = \theta$; $x$ est une constante qu'il s'agit de trouver d'après une observation; $\phi$ et $\theta$ sont des variables susceptibles de prendre une multitude de valeurs correspondantes. Si l'on connaissait bien exactement, par expérience, deux de ces valeurs $a$ et $m$ correspondantes de $\phi$ et $\theta$, on aurait $ax = m$, et $x = \frac{m}{a}$ serait connu. On substituerait la valeur de ce coefficient constant dans l'équ. proposée $\phi x = \theta$, et l'on aurait l'équ. $m\phi = a\theta$, dont on ferait tel usage qu'on voudrait.

Mais lorsqu'on tire $a$ et $m$ de l'observation d'un phénomène, on ne peut regarder ces quantités comme connues que par approximation, et la petite erreur qu'on a commise doit influer sur le nombre $x$ qu'on en déduit. Pour affaiblir cette erreur, on réitère les expériences, parce que les erreurs doivent se compenser dans la série des épreuves, à moins qu'il n'existe une cause d'erreur commune à toutes, et qui se reproduise constamment, ce qu'on est supposé avoir évité.

Ainsi $ax - m$ dans chaque expérience ne sera pas rigoureu-

sement nul, et il y aura de petites erreurs $e$, $e'$, $e''$... en sorte qu'on aura

$$e = ax - m, \qquad \text{(A)}$$
$$e' = a'x - m',$$
$$e'' = a''x - m'', \text{ etc.}$$

Ces erreurs $e, e', e''$... ne sont pas de grandeurs connues, et même le soin qu'on a mis aux expériences semble faire penser qu'elles sont nulles, ce qu'on sait cependant ne pas avoir lieu en toute rigueur.

Multiplions chacune de ces équ. par le coefficient de $x$, et ajoutons; il viendra

$$S(ae) = x\,S(a^2) - S(am),$$

en désignant par le signe S une somme de termes ayant tous même forme, $S(a^2) = a^2 + a'^2 + a''^2 + \ldots$ On en tire

$$x = \frac{S(ae)}{S(a^2)} + \frac{S(am)}{S(a^2)}. \qquad \text{(B)}$$

Et d'abord supposons qu'on ait $S(ae) = 0$; cette valeur de $x$ se réduira à cette quantité constante connue

$$x = \frac{S(am)}{S(a^2)};$$

les équ. (A) deviennent donc

$$e = a\frac{S(am)}{S(a^2)} - m,\quad e' = a'\frac{S(am)}{S(a^2)} - m',\quad e'' = a''\ldots, \text{ etc.}$$

Les erreurs de chaque observation ne sont plus inconnues, et la valeur de chacune est *indépendante de celle des autres*, lorsqu'on a $S(ae) = 0$ : représentons ces nombres par $\varepsilon, \varepsilon', \varepsilon''$, . . , savoir

$$\varepsilon = a\frac{S(am)}{S(a^2)} - m,\quad \varepsilon' = a'\frac{S(am)}{S(a^2)} - m',\quad \varepsilon'' = a''\ldots \text{ etc.},$$

et faisons
$$\xi = \frac{S(am)}{S(a^2)}. \qquad \text{(C)}$$

Telles sont les valeurs particulières de $e, e', e'' \ldots x$, dans le cas supposé de $S(ae) = 0$, savoir,

$$\iota = a\xi - m,\ \iota' = a'\xi - m,\ \iota'' = a''\xi - m, \text{etc.}$$

Mais si cette condition n'a pas lieu, on retombe sur les équ. (A) et (B), qui, en y introduisant les valeurs (C), deviennent

$$x = \xi + \frac{S(ae)}{S(a^2)},$$

$$e = \iota + a\frac{S(ae)}{S(a^2)},$$

$$e' = \iota' + a'\frac{S(ae)}{S(a^2)},$$

etc.

Or, il est aisé de voir que les erreurs dépendent de l'une d'entre elles, qui, lorsqu'elle est donnée, détermine toutes les autres; car on tire $\frac{S(ae)}{S(a^2)} = \frac{e - \iota}{a}$, et substituant

$$e' = \iota' + \frac{a'}{a}(e - \iota),\quad e'' = \iota'' + \frac{a''}{a}(e - \iota),\ \text{etc.}$$

Ainsi la connaissance d'une seule $e$ de ces erreurs entraînerait celle des autres, et *elles ne seraient plus indépendantes*, comme cela arrivait dans le cas où l'on faisait $S(ae) = 0$. On voit donc que cette condition est la seule qui convienne, lorsque les erreurs sont indépendantes les unes des autres.

Mais lorsqu'on considère l'équ. (B), qui est entre les constantes $S(am)$, $S(a^2)$, et les variables $x$ et $S(ae)$, sans avoir égard à son origine, elle existe entre deux variables dont l'une est donnée par l'autre, qui peut recevoir toute valeur arbitraire. Si l'on attribue à $S(ae)$ toutes les grandeurs possibles, $x$ prendra des valeurs correspondantes : et parmi ces quantités, il ne faut conserver que celle qui vient de $S(ae) = 0$, parce que c'est la seule qui laisse $x$ indépendante des erreurs d'observation. Et puisque cette condition est celle des moindres carrés, ce qui vient d'être dit démontre la méthode dont il s'agit.

Ainsi dans tout système d'observations destinées à faire con-

naître $x$, si les erreurs sont isolées et fortuites, tantôt par excès; tantôt par défaut, sans qu'aucune partie constante les affecte, sans dépendance mutuelle, il faudra nécessairement qu'on ait $S(ae)=0$, c'est-à-dire que $x$ sera donné par la méthode des moindres carrés, parce qu'elle est la seule qui puisse remplir les conditions imposées.

295. Supposons qu'on ait $a=1$, savoir,

$$e=x-m,\ e'=x-m',\ e''=x-m'',\ \text{etc.},$$

la règle ci-dessus se réduit à $S(\iota)=0$, ou $\iota'+\iota''+\iota'''\ldots=0$; ainsi les sommes des erreurs par excès et par défaut sont égales. On a alors

$$x=\frac{S(m)}{n}=\frac{m+m'+m''\ldots}{n},$$

$n$ étant le nombre des observations. On voit que le cas des moyennes arithmétiques est compris dans celui que nous avons analysé. Si l'on veut que les erreurs soient indépendantes les unes des autres, il faut que leur somme soit nulle, $S(\iota)=0$; car sans cela, on aurait

$$e'=\iota'+(e-\iota),\ e''=\iota''+(e-\iota),\ e'''=\iota'''+(e-\iota),\ \ldots$$

Les erreurs comprendraient toutes une partie constante, qui les augmenterait d'une même quantité.

Ce que nous avons dit d'une seule inconnue $x$, peut se dire de même de plusieurs, et il est aisé de généraliser la démonstration précédente, qui est due à M. Ivory.

Nous ne pouvons appliquer nos méthodes à quelque exemple astronomique; le grand nombre des équ. de condition, celui des inconnues qui s'y trouvent engagées, rendent les calculs si volumineux, qu'ils ne sauraient trouver place ici. Mais nous pouvons prendre pour exemple la longueur du pendule à secondes. Il est démontré, par la théorie, que cette longueur $l$ a pour valeur générale dans le lieu dont la latitude est $\lambda$,

$$l=x+y\sin^2\lambda,$$

$x$ et $y$ étant deux constantes inconnues qu'il faut trouver par

observation. Supposons qu'on ait mesuré exactement les longueurs $l$ du pendule en des lieux dont la latitude est $\lambda$ : deux expériences suffiront, puisqu'en substituant ici les nombres correspondans qu'on aura obtenus, on aura deux équ. en $x$ et $y$, qui feront connaître ces quantités.

Mais comme les observations les plus attentives sont sujettes à de petites erreurs, on multiplie les épreuves, et au lieu de deux équ., on en a une multitude. Pour abréger, nous n'en prendrons que six.

Ainsi sous 6 latitudes connues, on a mesuré la longueur du pendule à secondes : pour chaque station, $l$ et $\lambda$ sont connus, sauf les petites erreurs des observations. En les substituant dans l'équ. $0 = x + y \sin^2\lambda - l$, le 2[e] membre ne sera pas rigoureusement nul, comme il devrait l'être ; ainsi il sera $= e$, ou $e'$, ou $e''$... On trouvera donc 6 équ. de condition. En prenant les nombres consignés dans le Mémoire de M. Mathieu, *Conn. des Tems* de 1812, ces équ. sont

$$e = x + y . 0^m 3903417 - 0^m 9929750,$$
$$e' = x + y . 0,4972122 - 0,9934620,$$
$$e'' = x + y . 0,5667721 - 0,0938784,$$
$$e^{IV} = x + y . 0,4932370 - 0,9934740,$$
$$e^{V} = x + y . 0,5136117 - 0,9935967,$$
$$e^{VI} = x + y . 0,6046628 - 0,9940932.$$

Pour employer la méthode des moindres carrés, il faut multiplier ces six équ. par le coefficient de $x$ dans chacune, ajouter et égaler à zéro ; ce coefficient est *un*, ainsi il faut simplement faire leur somme ; d'où

$$6x + y . 3^m,0657375 - 5^m,9614793 = 0.$$

De même multiplions chaque équ. par le coefficient de $y$, ajoutons, etc., nous avons

$$x . 3^m,0657375 + y . 1^m,5933894 - 3^m,0461977 = 0.$$

L'élimination de $x$ et de $y$ entre ces équ. conduit à

$$x = 0^m,9908755, \quad y = 0,0052942, \quad \log y = \bar{3}.7238509.$$

Ainsi on a en général pour la longueur du pendule à secondes

dans le lieu dont la latitude est $\lambda$,

$$l = 0^m,9908755 + y \sin^2\lambda,$$

formule qui fait connaître cette longueur $l$ dans un pays quelconque, sans qu'il soit désormais nécessaire de consulter l'expérience.

Nous n'avons pas appliqué ici la méthode Mayer, non-seulement parce qu'elle est très facile à employer, mais encore parce que l'exemple ne s'en accommoderait pas bien, attendu que $x$ et $y$ ont mêmes signes dans les équ. de condition, et que les coefficiens de chaque inconnue y sont les mêmes ou peu différens.

*Détermination de l'obliquité de l'écliptique et des passages du Soleil aux solstices et aux équinoxes.*

296. Nous avons indiqué, n° 77, comment le calcul fait connaître l'obliquité $\omega$ de l'écliptique ; mais les élémens de cette opération sont tirés de l'observation. Voyons quels sont les procédés qui conduisent à cette détermination.

Soit AB l'équateur (fig. 43), AS l'écliptique, A le point vernal ♈, l'angle $A = \omega =$ l'obliquité apparente qu'on veut trouver par observation. S est le Soleil à un instant quelconque, AB son asc. dr. $= \text{Æ}$, et SB sa déclin. $= D$. Si ces deux arcs étaient connus, le triangle sphérique rectangle ASB donnerait (équ. $s$, p. 5)

$$\tang D = \sin \text{Æ} \tang \omega, \qquad (1)$$

d'où l'on pourrait tirer la valeur de $\omega$.

Or, en observant, d'un lieu quelconque, l'heure du passage du Soleil au méridien et sa hauteur, on sait exprimer cette heure en temps sidéral (n° 109), qui est l'asc. dr. Æ en temps (n° 8). Les équ. (1) du n° 144 font connaître la déclin. apparente D, d'après la hauteur $h$, ou la dist. zénith. $z$, au méridien :

$$D = l - z = l - (90° - h).$$

Ainsi le problème est résolu.

297. Mais on voit que ce procédé est affecté de l'erreur sur le temps absolu indiqué par la pendule. Pour éviter cette erreur, on observe l'instant où une étoile E passe au méridien, le même jour où l'on a observé le passage du Soleil S. La durée sidérale $a$ qui s'écoule entre ces deux passages est l'arc CB d'équateur, arc qu'on peut regarder comme exactement connu, attendu que la pendule ne doit pas sensiblement varier dans l'intervalle; on peut d'ailleurs tenir compte par le calcul de ses petites variations (n° 102). Ajoutant donc l'asc. dr. apparente de l'étoile, ou l'arc AC à l'arc CB d'équateur qu'on vient de trouver, on obtient l'arc AB = Æ. Il faut au contraire retrancher $a$ de l'asc. dr. de l'étoile, quand elle passe au méridien après le Soleil: ainsi Æ ☉ = Æ ✶ $\pm a$, + quand l'étoile passe la 1re, — dans l'autre cas.

Quant à la hauteur méridienne du Soleil, on pourra faire des observations réitérées, tant avant qu'après le passage, et opérer comme il a été expliqué n° 145.

**Par ex.**, le 9 juin 1818, on a obtenu, au mural de l'Observatoire royal de Paris, la dist. zénith. du centre du Soleil, correction faite de la collimation et de réfr. — parall.; on l'a trouvée de

| | | |
|---|---|---|
| … | $z =$ | 25°55′ 0″77 |
| La latitude de la salle est… | $l =$ | 48.50.13,10 |
| Déclin. du Soleil à midi vrai… | D = | 22.55.12,33 |
| La pendule marquait lors du passage… | | 5h 7′ 17″05 |
| Régulus a passé au méridien à… | | 9.58.16,32 |
| Intervalle… | | 4.50.59,27 |
| Retard diurne — 2″,31; en 4h 51′… | | + 0,47 |
| Temps sidéral écoulé entre les passages… | $a =$ | — 4.50.59,74 |
| Asc. dr. app. de Régulus… | | 9.58.43,31 |
| Asc. dr. du Soleil au méridien… | Æ = | 5. 7.43,57. |

La *Conn. des Tems* donne une diff. de — 1″,32 en déclin., et de + 3″,17 en asc. dr.; ces erreurs viennent de l'observation, etc. Ensuite, on a

| | | | |
|---|---|---|---|
| tang D… | 9.6261715 | $\omega =$ | 23°27′53″56 |
| sin Æ… — | 9.9886038 | — Nut. luni sol. | — 6,93 |
| tang $\omega$… | 9.6375677 | Obliq. moy… = | 23.27.46,63. |

Ce qui s'accorde assez bien avec ce qu'on a dit p. 95.

298. Comme on peut douter que l'asc. droite apparente de l'étoile soit exactement celle qu'on tire des catalogues, corrigés de la précession et de l'aberration, pour apporter dans cette détermination toute la rigueur dont les observations sont susceptibles, voici comment il faudra s'y prendre.

Soit AB l'équateur (fig. 44), AS l'écliptique, A le point vernal ♈, origine des asc. dr. et des longitudes; l'angle A est l'obliquité apparente $\omega$ qu'on veut déterminer; S est le Soleil en un lieu quelconque de l'écliptique, AB son asc. dr. $Æ$, SB sa déclin. D apparente. On observe le même jour le Soleil S et une étoile E, lors de leurs passages au méridien, et l'on en conclut, comme il vient d'être expliqué, la déclin. D, et l'arc $CB = a =$ différ. entre les asc. dr. On répétera les mêmes observations un autre jour, pour une étoile E', qui pourra être la même que la première fois, et pour le Soleil S', arrivé en un autre lieu de son cours. On en conclura de même la déclin. $D' = S'B'$, et la différ. des asc. dr. $C'B' = a'$. Lorsque l'étoile aura été observée après le Soleil, on prendra en —, cette différ. $a$ ou $a'$.

Les données tirées de l'observation sont considérées comme exactes, savoir $a$ et $a'$, D et D'; et l'on a cette seconde équation

$$\text{tang } D' = \sin Æ' \text{ tang } \omega. \qquad (2)$$

Ordinairement les observations se font au mural ou au cercle méridien, qui donnent à la fois la hauteur de l'astre et l'heure de son passage (*v.* n° 40); mais deux personnes peuvent prendre part à l'opération : l'une trouve cette dernière quantité à l'aide de la lunette méridienne; l'autre obtient la première par le secours du cercle répétiteur. (*V.* p. 199.)

De ces équ. on tire, en éliminant $\omega$,

$$\frac{\sin Æ'}{\sin Æ} = \frac{\text{tang } D'}{\text{tang } D};$$

d'où $$\frac{\sin Æ' + \sin Æ}{\sin Æ' - \sin Æ} = \frac{\text{tang } D' + \text{tang } D}{\text{tang } D' - \text{tang } D}.$$

Or, d'une part, le premier membre (équ. 16, p. 2)

$$= \text{tang } \tfrac{1}{2}(Æ' + Æ) \cot \tfrac{1}{2}(Æ' - Æ);$$

d'une autre part, le 2^e^ est

$$= \frac{\sin D' \cos D + \sin D \cos D'}{\sin D' \cos D - \sin D \cos D'} = \frac{\sin (D' + D)}{\sin (D' - D)}.$$

D'ailleurs $Æ' - Æ = \text{arc BB}' = C'B' + CC' - CB$;

et faisant l'arc $BB' = k$, et $CC' = \delta =$ différ. des asc. dr. des deux étoiles, on a

$$k = \delta + a' - a. \qquad (3)$$

Cette équ. fera connaître l'arc $k$ : on prendra $a$ ou $a'$, en signe contraire, si l'étoile passe au méridien après le Soléil ; $\delta = 0$ quand le Soleil a été comparé deux fois à la même étoile, et $\delta$ prend le signe — lorsque l'asc. dr. de la 2^e^ est moindre que celle de la première.

D'après cela, reprenons l'équ. ci-dessus, et posons..... $Æ' + Æ = y$ ; cet arc sera donné par l'équ.

$$\tang \tfrac{1}{2} y = \frac{\tang \frac{1}{2} k . \sin (D' + D)}{\sin (D' - D)}. \qquad (4)$$

Ainsi les arcs $k$ et $y$ seront déterminés par le calcul des équ. (3) et (4), et par suite on connaîtra les asc. dr. $Æ'$ et $Æ$ par les formules

$$Æ' + Æ = y, \qquad Æ' - Æ = k;$$

d'où $$Æ' = \tfrac{1}{2}(y + k), \qquad Æ = \tfrac{1}{2}(y - k). \qquad (5)$$

Enfin, les équ. (1) et (2) donneront $\omega$, savoir :

$$\tang \omega = \frac{\tang D}{\sin Æ} = \frac{\tang D'}{\sin Æ'}.$$

Lorsque l'intervalle des deux observations comparées sera d'un petit nombre de jours, comme il doit arriver d'après ce qu'on va dire, les arcs $k$ et $D' - D$ seront très petits et devront remplacer les tang. et sin. : ici $k$ et $y$ sont exprimés en arcs et non pas en temps.

299. En général, les deux valeurs de $\omega$ obtenues par ces calculs ne se trouveront pas rigoureusement égales : cela tient

aux erreurs inévitables de l'observation ; mais on prendra la moyenne des résultats, et cette moyenne sera considérée comme exacte, surtout si l'on répète ce procédé un grand nombre de fois.

Il est d'autres causes d'erreurs, très faibles, il est vrai, mais dont on doit tenir compte. D'une part, le Soleil n'est pas exactement sur l'écliptique, puisque les perturbations lui font prendre une latitude qui peut aller jusqu'à 1″ : les tables astronomiques, fondées sur la théorie de l'attraction, donnent cette latitude chaque jour.

D'une autre part, la nutation et la précession en déplaçant le point équinoxial, et les actions planétaires, en changeant l'obliquité, ne permettent pas, en toute rigueur, de regarder l'écliptique comme conservant la même situation après quelque temps.

300. Voici comment on pourra éviter ces deux causes d'erreur. 1°. On calculera la latitude $\lambda$ du Soleil par les tables, et, projetant ce petit arc sur le cercle de déclin. de l'astre, on retranchera cette projection de la déclin. obtenue (*) : on aura ainsi les valeurs de D et D′ qu'il faudra employer dans les équ. précédentes.

2°. On aura soin de ne séparer les observations que de 2 à 3 jours, pour que l'obliquité, la nutation et la précession ne changent pas dans cet intervalle de quantités perceptibles à nos instrumens.

Nous ne donnerons pas d'application numérique de cette théorie, parce qu'elle est peu usitée, attendu que la suivante offre plus de précision et donne lieu à des calculs plus faciles.

301. On observera le Soleil près d'un solstice, tel que celui

(*) L'angle $\varphi$ que fait le cercle de déclin. avec l'écliptique est donné par l'équation

$$\cos \omega = \cos D \sin \varphi,$$

et la projection de $\lambda$ est $= \lambda \sin \varphi$ ; ainsi la déclin. corrigée est $= D - \frac{\lambda \cos \omega}{\cos D}$. On prend $\lambda$ en $-$ quand la latitude est australe.

d'été, par exemple. Si l'astre était placé juste au solstice à midi vrai (ce qui arrive pour un des méridiens), comme alors Æ serait $= 90°$, et que la hauteur du passage donnerait la déclin. D; l'équ. (1) montre, ce qui est d'ailleurs évident, qu'on aurait $D = \omega$, ou la déclin. égale à l'obliquité.

Mais comme il arrive rarement que le Soleil occupe le point solsticial juste à midi vrai, et que d'ailleurs on n'aurait de la sorte qu'une seule observation, qui serait plus ou moins défectueuse, pour détruire cette erreur et la faire disparaître par la multitude des épreuves, on fait intervenir dans la recherche de $\omega$ les déclin. de l'astre, 10 à 15 jours, tant avant qu'après le solstice. Voici comment on lie ces résultats par le calcul.

Chaque observation donne sa valeur de $\omega$, ainsi qu'il va être expliqué, et l'on prend la moyenne entre tous ces nombres; cette moyenne peut être considérée comme indépendante des erreurs d'expériences, lesquelles se compensent.

Lorsqu'une déclin. D est donnée, et que $\omega$ est connu, au moins à très peu près, on obtient la longitude L correspondante; car en résolvant le triangle rectangle ASB (fig. 43), où $AS = L$, $SB = D$, on a (équ. $n$, p. 5)

$$\sin D = \sin L \sin \omega. \qquad (6)$$

On observera des hauteurs ou des distances zénithales du Soleil près du méridien, l'un des jours voisins d'un solstice; par le procédé de la p. 199, on en déduira avec précision la hauteur, ou la distance zénithale appar. de l'astre lorsqu'il est au méridien, corrigée de réfr. $+$ parall. De là résultera la déclin. D par les équ. (1) p. 197, avec une grande précision. Or, de cette valeur, on peut conclure, par le calcul, ainsi qu'on va le dire, la déclin. que l'astre prend quand il occupe le solstice, arc qui est précisément l'obliquité demandée $\omega$. Chaque jour donne donc une valeur de $\omega$, et l'on a ainsi cet arc par une suite combinée d'épreuves sur l'exactitude desquelles on peut compter.

Mais observons que, comme on connaît d'avance $\omega$ à fort peu

près, et qu'il ne s'agit que de corriger cette valeur, on se sert de ce nombre approché et de l'équ. (6) pour trouver la longit. L du Soleil qui répond à chaque déclin., c.-à-d. à chaque dist. zénith. observée.

302. Soit $\delta$ la différ. entre la déclin. D dont il s'agit, voisine d'un solstice, et celle $\omega$ du solstice même, ou

$$\omega = D + \delta.$$

Pour trouver $\delta$, appelons $i$ la distance en longit. du Soleil au solstice, distance connue, soit par les tables, soit plutôt par l'observation, ainsi qu'on vient de le dire, savoir : $L = 90° - i$. Comme nous supposons que l'on est près d'un solstice, l'arc $i$ est petit, et seulement d'au plus 12°. L'équ. (6) devient

$$\sin(\omega - \delta) = \cos i \sin \omega;$$

développant le 1er membre, divisant l'équ. par $\sin \omega$, et recourant à l'équ. (6), p. 1, il vient

$$\cos \delta - \cot \omega \sin \delta = \cos i = 1 - 2\sin^2 \tfrac{1}{2} i;$$

d'où $$\cot \omega \sin \delta = 2\sin^2 \tfrac{1}{2} i - 2\sin^2 \tfrac{1}{2}\delta,$$

et $$\sin \delta = 2\tang \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} i - 2\tang \omega \sin^2 \tfrac{1}{2}\delta. \quad (7)$$

Comme près du solstice, l'arc $\delta$ n'est que d'un petit nombre de secondes, le dernier terme de l'équ. est négligeable devant les autres termes, pour une première approximation, et l'on a

$$\sin \delta = 2\tang \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} i.$$

Mais pour plus d'exactitude, il convient de rétablir cette valeur dans notre équ., c'est-à-dire de faire dans son dernier terme

$$\sin \tfrac{1}{2}\delta = \tfrac{1}{2}\sin \delta = \tang \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} i;$$

donc $$\sin \delta = 2\tang \omega \sin^2 \tfrac{1}{2} i - 2\tang^3 \omega \sin^4 \tfrac{1}{2} i.$$

Maintenant simplifions l'expression, en remplaçant $\sin \delta$ par $\delta$, et $\sin \frac{1}{2} i$ par $\frac{1}{2} i - \frac{1}{48} i^3 \ldots$ et nous aurons

$$\delta = \tfrac{1}{2}\tang \omega . i^2 - \tfrac{1}{24}\tang \omega (1 + 3\tang^2 \omega) i^4,$$
$$+ \tfrac{1}{720}\tang \omega (1 + 30\tang^2 \omega + 45\tang^4 \omega) i^6.$$

Pour exprimer les arcs $\delta$ et $i$ en secondes, il faut les changer en $\delta \sin 1''$ et $i \sin 1''$ ; d'ailleurs les coeff. sont des quantités constantes, car $\omega$ ne varie qu'insensiblement. Faisons..... $\omega = 23° 27' 40''$, quantité qui conviendra pendant plusieurs années, et nous aurons pour la formule de *réduction au solstice,*

$$\delta = Ai^2 - Bi^4 + Ci^6 \qquad (8)$$

$$\log A = \bar{6}.0220403, \quad \log B = \overline{18}.5085458-, \quad \log C = \overline{29}.12436.$$

$\delta$ est ce qu'il faut ajouter à l'arc D pour qu'il devienne $= \omega$. Dans cette formule, les arcs $\delta$ et $i$ sont exprimés en secondes.

Le calcul différentiel prouve (*v.* p. 96) que pour chaque seconde de diminution de l'obliquité $\omega$, $\delta$ variera de

$$-\frac{2 \sin 1''}{\sin 2\omega}\,\delta = -F\delta, \qquad \log F = \bar{5}.1230280 -.$$

Cette formule de correction permet d'étendre les valeurs de nos coefficiens A, B, C, à des temps assez éloignés.

L'équ. (8) suffit pour calculer des observations qui ne dépassent pas 15° de distance en longitude au solstice; $i$ devient négatif au-delà de ce terme, car la longitude dépasse 90°. Pour le solstice d'hiver on a $L = 270° - i$, et la formule s'applique de même. On trouve dans l'*Astronomie de Delambre* (t. II, p. 245) une table composée sur cette formule pour faciliter les opérations numériques, et l'on y donne un moyen de tenir compte des changemens que $\omega$ éprouve avec le temps.

303. Appliquons cette théorie à des exemples.

Le 30 juin 1818, des observations du passage du Soleil au méridien de l'Observatoire royal de Paris ont donné pour distance zénithale de l'astre, corrigée de réfraction — parallaxe............................................ $z = 25° 36' 48'' 38$.

La latitude connue du lieu est......... $l = 48.5.013,10.$

Diff. = déclin. au midi observé......... $D = 23.13.24,72.$

En prenant $\omega = 23° 27' 55''$, pour l'obliq. app., l'équ. (6) donne

sin D......... 9.5958481
sin $\omega$......— 9.6000939

sin L......... 9.9957542, $L = 97^\circ\, 59'\, 55'',3$, $i = -7^\circ\, 59'\, 55'',3$.

La *Conn. des Tems* donne à fort peu près le même nombre, savoir, $i = -8^\circ\, 0'\, 13''$. Voici le calcul de l'équ. (8) :

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| A...... | $\bar{6}.0220403$ | B...... | $\overline{18}.5085458$ — | C...... | $\overline{29}.12436$ |
| $i^2$...... | 8.9186432 | $i^4$...... | 17.8372864 | $i^6$...... | 26.75593 |
| | 2.9406835 | | 0.3458322 — | | $\bar{3}.88029$ |
| | 872″335 | | — 2″,217 | | + 0″,0076. |

$\delta = 870,126 = 14'\, 30'',13$

$D = 23.13.24,72$

$\omega = 23.27.54,85$ = obliquité apparente.

Comme on trouve dans les tables astronomiques, qu'à la date proposée, la latitude du Soleil est $+ 0'',08$, il faut retrancher ce petit arc, qui, au solstice, se confond avec sa projection sur le cercle de déclin. Ainsi l'obliquité apparente n'est réellement que de $23^\circ\, 27'\, 54'',77$.

Il s'agit d'en déduire l'*obliquité moyenne* $\Omega$ : il faut donc corriger ce résultat de la nutation luni-solaire (*v.* p. 95). Or, l'argument N de nutation lunaire, ou le supplément du ☊, est 901, qui donne $+ 7'',49$ dans la table IV ; on y trouve aussi, $- 0'',75$ de nutation solaire, à la date du 30 juin ; en tout, $+ 6'',74$. Mais ces nombres sont destinés à trouver l'obliquité apparente, lorsqu'on connaît la moyenne : ici c'est le cas inverse ; il faut donc prendre ce résultat en signe contraire. On trouve enfin que l'obliquité moyenne au solstice d'été de l'an 1818 est $\Omega = 23^\circ\, 27'\, 48'',03$. C'est aussi à fort peu près ce que donne notre formule de la p. 94.

Prenons pour second exemple une observation du solstice d'hiver, faite à Paramatta le 6 décembre 1827, par M. Rumcker (*Mém. Soc. Astr. de Londres*, t. III, p. 475). En corrigeant de la réfr. — parall., il a trouvé que la distance zénithale du centre du Soleil était.................. $z = 11^\circ 24' 24'' 66$.

La latitude du lieu est............... $l = -33.48.44,50$.

Ainsi la déclin. de l'astre est australe. $D = -22.24.19,84$.

En prenant $\omega = 23° 27' 40''$, on trouve

sin D'..... 9.5811065 —
sin ω.....— 9.6000211

sin L..... $\overline{9.9810854}$ — L = 286° 47' 15", i = 16° 47' 15".

C'est ce qu'on pourrait tirer aussi de la *Conn. des Tems* de 1827, en calculant la longitude du Soleil pour le midi de Paramatta, le 6 décembre, et observant que le méridien de cette ville est à 9h 54' 44" à l'est de Paris.

| | | |
|---|---|---|
| A...... $\overline{6}$.0220403 | B...... $\overline{18}$.5085458 — | C...... $\overline{29}$.12436 |
| $i^2$...... 9.5625770 | $i^4$...... 19.1251540 | $i^6$...... 28.68773 |
| 3.5846173 | 1.6336998 — | $\overline{1}$.81209 |
| 1° 4' 2",530 | — 43",022 | + 0",649. |

La somme 1° 3' 20",157 est la réduction au solstice; ainsi,

| | | |
|---|---|---|
| Déclin. ☉ le 6 décembre 1826..... D | = | — 22° 24' 19" 84 |
| Réduction au solstice.............. | | — 1. 3.20,16 |
| | | — 23.27.40,00 |
| Correction de latitude solaire...... | | + 0,77 |
| Obliquité apparente............ ω | = | 23.27.39,23 |
| N = 409, nut. lunaire — 7",82.... | | + 7,82 |
| nut. solaire — 0",64.... | | + 0,64 |
| Obliquité moy. le 1er janv. 1828... Ω | = | 23.27.47,69. |

La formule p. 94 ne donne que 42"; la différ. provient des erreurs d'observations et des circonstances dont il a été question au lieu cité.

304. Une fois l'obliquité moyenne Ω connue à un instant déterminé, il est aisé d'en déduire la position des équinoxes, de vérifier les asc. dr. de toutes les étoiles par des observations directes, et de connaître la valeur actuelle de la précession des équinoxes. C'est ce qui nous reste à expliquer.

Peu de jours, tant avant qu'après le passage du Soleil à l'un des équinoxes, on fera des observations de hauteur de l'astre près le méridien, pour en conclure sa distance zénithale méridienne, précisément comme on vient de le dire pour les solstices. On en tirera la déclin. de l'astre chaque jour, et corrigeant de la latitude solaire, ainsi qu'on l'a expliqué dans la note p. 435, on aura cette déclin. dégagée de cette circonstance.

A l'aide de cette déclin. vraie D du Soleil, on calculera la longitude L et l'asc. dr. Æ correspondantes, en résolvant le triangle sphérique rectangle ASB (fig. 43) : on a (équ. $n$ et $s$, page 5),

$$\sin D = \sin L \sin \omega, \qquad (9)$$

$$\tan D = \sin Æ \tan \omega, \qquad (10)$$

d'où $$\sin \omega = \frac{\sin D}{\sin L}, \quad \tan \omega = \frac{\tan D}{\sin Æ}, \qquad (11)$$

formules où $\omega$ désigne l'obliquité apparente de l'écliptique. Dans l'état supposé des choses, la déclin. D est très petite, et on a la longitude L avec précision, quand même $\omega$ ne serait pas exactement connu. En effet,

$$\frac{dD}{dÆ} = \tan \omega \cos Æ \cos^2 D\,;$$

cette quantité a sa plus grande valeur aux équinoxes, où $D = 0$, et $Æ = 0$ ou $180°$ : ainsi la déclin. change alors avec la plus grande vitesse.

305. On pourra donc calculer l'asc. dr. du Soleil à midi vrai : comparant à l'heure de la culmination d'une étoile quelconque, on aura l'asc. dr. de cette étoile, en supposant connue l'avance diurne de la pendule ; ainsi l'asc. dr. de l'étoile déterminera la position de l'équinoxe.

Comme la latitude du lieu est un des élémens de la détermination de la déclin. D, il sera bon de répéter les observations à l'équinoxe opposé, afin que les erreurs de latitude s'entre-détruisent.

Le 21 mars 1830, on a $\omega = 23° 27' 33'',40$ ;

| | | | |
|---|---|---|---|
| A Paris, la latitude étant | | $l =$ | 48° 50′ 14″ |
| on a trouvé la dist. zénith. mérid. vraie.......... | | $z =$ | 48. 41. 3,41 |
| | | donc..... D = | + 0. 9. 10,59 |
| sin D.......... | 7.4264025 | tang D....... | 7.4264041 |
| sin ω...... | − 9.5999891 | tang ω...... | − 9.6374572 |
| sin L........ | 7.8264134 | sin Æ........ | 7.7889469 |
| | L = 0° 23′ 3″,06 | | Æ = 0° 21′ 8″,72 |
| | | | En temps = 0h 1. 24,58. |

Supposons que le même soir on ait observé α Castor, et qu'on ait trouvé que cette étoile passe au méridien après le Soleil, en temps sidéral, à . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . $t = 7^h22'20''66$

Comme on a. . . . . . . . . . . . . $Æ\odot = 0.\ 1.24,58.$

on en conclut que. . . . . . . . . . $Æ\star = 7.23.45,24,$

du moins si l'on s'est assuré de la marche de la pendule sur le temps sidéral, et qu'on ait corrigé le temps écoulé $t$.

306. Au reste, il n'est pas nécessaire de connaître $\omega$, et même on peut trouver un moyen de vérifier la valeur de cet arc. En effet, observez le Soleil au méridien, le jour qui précède et le jour qui suit l'équinoxe; les hauteurs corrigées de *réfr.—parall.* donneront les déclin. D et D', l'une australe, l'autre boréale; mais dans ce qui suit nous ferons abstraction du signe — de la première. Le Soleil a passé à l'équinoxe dans l'intervalle de ces deux midis vrais, et le temps écoulé de l'un à l'autre a été T, d'après la pendule.

Soit $b$ l'équinoxe (fig. 42), $bh$ l'équateur, $fb$ l'écliptique, $r$ et $c$ les lieux du Soleil aux deux midis consécutifs, $rs = D$, $qc = D'$ les déclin. connues. On peut supposer que le mouvement en déclin. est uniforme dans cet invervalle, parce que, près de l'équinoxe, la déclin. du Soleil change avec la plus grande vitesse et la plus grande uniformité, ce changement ne variant que de sa 1400ᵉ partie. Dans la durée T, la déclin. a changé de D + D'; donc elle change, dans le temps $\theta$, marqué par la pendule, de

$$\theta = \frac{DT}{D+D'} = T\left(1 - \frac{D'}{D'+D}\right).$$

Ainsi, on trouve l'heure que marquait la pendule lorsque le Soleil était à l'équinoxe $b$, en ajoutant $\theta$ à l'heure marquée par la 1ʳᵉ culmination (en $r$), ou en ôtant $\frac{D'T}{D+D'}$ à celle de la 2ᵉ (en $c$). A cet instant, le Soleil est dans l'équateur, et son angle horaire $\gamma$ est l'asc. dr. du point de l'équateur qui est au méridien, ou l'heure sidérale actuelle : cherchons cette heure.

307. L'angle horaire du Soleil varie de 0 à 360 degrés dans

la durée de o à T heures de la pendule ; ainsi on a cette proportion :

Si T donne 360°, le temps $\theta$ donne $\gamma$ :

$$\gamma = \frac{360^\circ\,\theta}{T} = \frac{360^\circ\,D}{D+D'} = \frac{24^h\,D}{D+D'}, \text{ (en temps sid.)}.$$

Cet angle $\gamma$ du cercle horaire du Soleil avec le méridien est du côté occidental.

Les soirs des deux mêmes jours où l'on a pris les hauteurs méridiennes du Soleil, on notera l'heure de la culmination d'une étoile ; soient $t$ et $t'$ les intervalles indiqués par la pendule depuis les passages du Soleil au méridien jusqu'à ceux de cette étoile, le 1^er et le 2^e jours. On a $t > t'$, parce que le Soleil, par son mouvement propre vers l'est, s'avance du côté où est l'étoile.

Puisque, pour atteindre l'équinoxe A, le Soleil a eu besoin du temps $\theta$, en partant du 1^er midi, et qu'il faut à l'étoile le temps $t$ pour culminer, l'angle des deux plans horaires de ces astres, à l'instant de l'équinoxe, est $t - \theta$ ; en temps de la pendule. Ce serait l'asc. dr. de l'étoile, si la pendule indiquait juste le temps sid., ce que nous ne supposons pas. Or, $t - t'$ est la durée que l'arc CC' de l'équateur met à traverser le méridien, ou la marche sidérale en asc. dr. Otant de T, le reste $T + t' - t$ est donc le temps de la pendule nécessaire pour la révolution entière des 360° de l'équateur, ou pour l'intervalle des deux culminations de l'étoile. Donc,

si $T + t' - t$ répondent à 360°, $t - \theta$ répond à $\phi$ ;

$$\phi = \frac{360^\circ\,(t-\theta)}{T+t'-t} = \frac{24^h\,(t-\theta)}{T+t'-t}, \text{ (en temps sid.)}.$$

Tel est l'angle horaire est de l'étoile avec le méridien lors de l'équinoxe. Et il faut observer que $\gamma$ et $\phi$ sont indépendans de l'espèce de temps marqué par la pendule, pourvu que la marche en soit uniforme. L'asc. dr. de l'étoile, ou sa distance à l'équinoxe, comptée sur l'équateur, est donc $= \phi + \gamma$, et substituant pour $\phi$ et $\gamma$ leurs valeurs, on a, en temps sidéral,

$$\text{Æ}\star = \frac{24^h(t-\theta)}{T+t'-t} + \frac{24^h\, D}{D+D'},$$

$$= \frac{24^h}{D+D'} \times \frac{t(D+D') - DT + D(T+t'-t)}{T+t'-t},$$

ou $$\text{Æ}\star = \frac{24^h}{D+D'} \times \frac{Dt' + D't}{T+t'-t}, \quad \text{(en temps sid.)}.$$

Cette équ. détermine la position de l'équinoxe. L'observation de la culmination de toute autre étoile doit s'accorder avec ce résultat, ce qui fournit des procédés de vérification. Quand l'étoile est au méridien, c'est la distance de l'équinoxe à ce plan.

Puisque $\tau = T + t' - t$ est le temps de la pendule entre deux passages d'une étoile, répondant à $24^h$ sid., on aura $24^h : \tau :: \text{Æ}\star : X = \frac{\tau . \text{Æ}\star}{24}$; tel est le temps de la pendule à écouler depuis le passage du point ♈, jusqu'à celui de l'étoile. $\tau - X$ est ensuite le temps à écouler pour que le point ♈ revienne au méridien, ou $\tau\left(1^h - \frac{1}{24}\text{Æ}\star\right)$.

Pour la facilité du calcul, on écrit

$$\text{Æ}\star = \frac{24^h\, t}{D+D'} \times \frac{\frac{Dt'}{t} + D'}{T+t'-t}.$$

Par exemple, les 20 et 21 mars 1830, on trouve, par des hauteurs méridiennes, que les déclin. du Soleil sont opposées, et que

$D = 0^\circ\, 14'\, 29'',80$ A, $D' = 0^\circ\, 9'\, 10'',59$B, $D + D' = 0^\circ\, 23'\, 40'',39$.

La pendule a donné pour l'intervalle des passages $T = 24^h\, 3'\, 43'',40$. On a observé ces deux jours les culminations de $\alpha$ Castor : l'intervalle de midi vrai à chacune a été, selon la pendule,

$$t = 7^h\, 26'\, 1'',57, \quad t' = 7^h\, 22'\, 20'',66.$$

Voici le calcul :

| | | | |
|---|---|---|---|
| D | .9394194 | | |
| $t'$ | 4.4239113 | | |
| $t$ | — 4.4275116 | $D' = 9' 10'' 59$ | |
| | 2.9358195 | 14.22,62 | |
| | 3.1502067 | 23.33,21 | $T = 24.\ 3.43,40$ |
| $t$ | 4.4275116 | | $t' = 7.22.20,66$ |
| $24^h$ | 4.9365137 | | $-t = -7.26.\ 1,57$ |
| | — 4.9365263 | | $\tau = 24.\ 0.\ 2,49$ |
| $D + D'$ | — 3.1524077 | | |
| Æ★ | 4.4252980 | Æ★ $= 7^h 23' 45'' 50$ | |
| Or, la pendule marquait | | 7.23.50,20 | |
| donc elle avançait de | | 4,70 sur t. sid. | |
| D'ailleurs, elle avance en $24^h$ sid. de | | 2,49. | |

Ainsi tout est connu sur la position de l'équinoxe au ciel, celle du Soleil, la marche de la pendule, et l'équ. ($t$ 1) déterminera l'obliquité de l'écliptique.

Pour avoir l'équinoxe moyen et l'obliquité moyenne, il faut corriger (en signe —) de la nutation.

En reproduisant ces calculs après plusieurs années, on peut trouver la précession des équinoxes et la diminution annuelle d'obliquité, ainsi qu'on va l'expliquer ci-après.

*Sur la précession des équinoxes.*

308. La théorie de l'attraction démontre que, par l'effet de l'aplatissement de la Terre, l'équateur prend une position lentement variable par rapport à l'écliptique, et que les points d'intersection de ces deux cercles sur la voûte céleste rétrogradent perpétuellement. Soit $aq$ l'écliptique, $fg$ l'équateur (fig. 46) à une époque quelconque ; le point vernal $g$ se trouve transporté en $h$ après $t$ années : $mh$ est la seconde position de l'équateur ; $gh$ est ce qu'on appelle *précession lunisolaire* *, effet qu'il faut éviter de confondre avec la nutation, et dont on fait la part séparément.

En outre, l'action des planètes sur le sphéroïde terrestre déplace aussi l'écliptique $qa$ d'une très petite quantité, et la transporte en $bq$ après $t$ ans. L'équateur varié $hm$, coupe le

nouvel écliptique $bq$ sous un angle $\Omega$ qui varie lentement, et l'ancien écliptique $aq$ sous un autre angle $\omega'$, qui diffère très peu du premier angle $g = \omega$, après un temps considérable. Ainsi, le point $\Upsilon$ devient le nouveau point vernal, et l'angle $\Omega$ la nouvelle obliquité. Les longitudes et asc. dr. étaient comptées, dans l'origine, de $g$ vers $a$ et vers $f$; elles le sont maintenant de $\Upsilon$ vers $b$ et $m$. Si l'on prend l'arc $qg = qn$, $\Upsilon n$ est ce qu'on appelle la *précession totale* $\psi$, qui est un peu moindre que la précédente : $n$ est le premier point vernal transporté sur la nouvelle écliptique, et $n\Upsilon$ la rétrogradation.

309. Je ne m'arrêterai pas à donner ici les formules qui servent à déterminer les longit., latit., déclin. et asc. dr. des astres, après un laps de plusieurs siècles; il est rare qu'on ait besoin de les appliquer : on les trouvera dans l'*Uranographie*, p. 435. Pour des durées moindres de 1 à 2 siècles, certaines parties de la fig. varient si peu, qu'il est permis de les regarder comme constantes, et les autres éprouvent des changemens proportionnels aux temps. Ainsi l'angle $\omega = \omega'$ que font les deux équateurs $gf$, $hm$, avec l'écliptique primitive $qa$, et la latitude $\lambda$ de l'astre, restent sensiblement les mêmes; mais la nouvelle obliquité, après le temps $t$, est l'angle $b\,\Upsilon m = \Omega$, qui est différent de $\omega$.

Nous rapporterons ici les formules de M. Bessel (*v. Conn. des Tems* de 1829, p. 314) ; les astronomes les ont adoptées, et les regardent comme les plus exactes. On désigne par $t$ le nombre d'années écoulées depuis 1750.

Obliq. de l'éclipt. en 1750. $\omega = 23^\circ\, 28'\, 18'',0$,

Obliq. sur cette dernière.. $\omega' = \omega + 0'',00000\ 984233\, t^2 = \text{angle } h$,

Obliq. sur l'éclipt. varié.. $\Omega = \omega - 0'',52114.t - 0'',00000\ 272295.t^2$,

Mouv. d'asc. dr. $\Upsilon h$..... $\mu = (0'',1644\text{[illegible]}\, t - 0'',00024\ 39428\, t^2) : \cos \omega'$,

Angle des deux éclipt.... $q = (0'',48892.t - 0'',00000\ 30719\, t^2$,

Arc $qh$............... $= \theta = 171^\circ\, 36'\, 10'' - 5'',21.t$.

310. Reprenons les équ. (2), (3) et (4), p. 531, tirées du triangle sphérique $PpL$ (fig. 12) :

$$\sin D = \cos \omega \sin \lambda + \sin \omega \cos \lambda \sin l, \qquad (2)$$

$$\cos \lambda \cos l = \cos D \cos Æ, \qquad (3)$$

$$\cos \lambda \sin l = \sin \omega \sin D + \cos \omega \cos D \sin Æ. \qquad (4)$$

DR♈ est l'équateur primitif dont le pôle est en P ; CI♈ l'écliptique dont $p$ est le pôle ; I♈R $= \omega$ angle des deux plans : l'astre est en L, $p$L et PL sont les complémens de la latitude LI, et de la déclin. LR ; ♈I est la longitude $l$, ♈R l'asc. dr. Æ. Pour avoir égard aux petites variations simultanées de D ; Æ et $l$ ($\lambda$ et $\omega$ étant constans), prenons les différentielles des équ. (2) et (3) par rapport aux trois premiers arcs seuls. Et d'abord (2) donne

$$\cos D dD = \sin \omega \cos \lambda \cos l . dl;$$

chassant $\lambda$ à l'aide de l'équ. (3), et divisant par cos D,

$$dD = \sin \omega \cos Æ\, dl. \qquad (5)$$

De même différencions (3) par rapport à $l$, D et Æ,

$$\cos \lambda \sin l . dl = \sin D \cos Æ\, dD + \cos D \sin Æ\, dÆ;$$

mettons pour $\cos \lambda \sin l$ sa valeur (4), et (5) pour $dD$,

$$(\sin \omega \sin D + \cos \omega \cos D \sin Æ)\, dl$$
$$= \sin D \cos^2 Æ \sin \omega\, dl + \cos D \sin Æ\, dÆ;$$

réunissons les termes en $dl$,

$$(\sin \omega \sin D \sin^2 Æ + \cos \omega \cos D \sin Æ)\, dl = \cos D \sin Æ\, dÆ;$$

enfin on a

$$dÆ = (\cos \omega + \sin \omega \operatorname{tang} D \sin Æ)\, dl.$$

Il faut faire à cette valeur une petite correction. La différenciation qui vient d'être faite a supposé que le point vernal se transportait (fig. 46) de $g$ en $h$, et que $h$ est la nouvelle position de ce point : or il doit être transporté en ♈ ; il faut donc, de Æ, retrancher $h$♈ $= \mu$ ; ainsi la variation $dÆ$ doit être diminuée de $d\mu$ ; d'où

$$d\,\mathcal{R} = (\cos\omega + \sin\omega \operatorname{tang} d \sin \mathcal{R})\, dl - d\mu. \qquad (6)$$

Quant à la valeur de $d\mu$, abaissons l'arc $hp$ perpendiculaire à $qb$; comme l'angle $q$ est toujours très petit, même après 12 à 15 siècles, il est permis de supposer le triangle $\Upsilon hp$ rectiligne; on a $\Upsilon h = \mu = \dfrac{\Upsilon p}{\cos\omega}$ : or,

$$\Upsilon p = hg - \Upsilon n$$
$$= \textit{précession lunisol. } \Psi - \textit{précession totale } \psi;$$

donc
$$\mu = \frac{\Psi - \psi}{\cos\omega}.$$

On a d'ailleurs par la théorie, selon M. Bessel (*Conn. des Tems* de 1829, p. 315).

$$\Psi = 50''\,37572.t - 0''\,00012\,17945\,t^2 = \text{arc } gh,$$
$$\psi = 50,21129.t + 0,00012\,21483\,t^2 = \text{arc } \Upsilon n,$$

formules où $t$ désigne le nombre d'ans à compter de 1750 (*). Actuellement (en 1830) $\omega = 23°27'40''$, et l'on trouve

$$d\mu = 0'',179248 - 0'',00053185.\,t.$$

Faisons donc, pour abréger,

$$m = \cos\omega . dl - d\mu, \quad n = \sin\omega . dl,$$

et nous aurons, au lieu des équ. (5) et (6), pour la précession en asc. dr. et en déclin.

---

(*) En différenciant cette valeur de $\psi$, on trouve que la *précession totale annuelle* pour l'an $1750 + t$ est

$$= 50'',21129 + 0'',0002442966.\,t.$$

Pour en obtenir la valeur en 1830, il faut faire $t = 80$ ans; on trouve ainsi que ce mouvement est maintenant

$$\text{par an,} = 50''23083 = 0'\,8371805 = 0°01395\,30083,$$
$$\text{par jour,} = 0,1376187 = 0,00229\,3645 = 0,00003\,82274.$$

$$d\,Æ = m + n \sin Æ \tan D, \qquad (A)$$
$$dD = n \cos Æ. \qquad (B)$$

En comptant les années depuis 1750, et désignant par $t$ le nombre d'ans écoulés, M. Bessel trouve par des calculs très précis, que

$$m = 46'',02824 + 0'',00030\,86450.\,t,$$
$$n = 20,06442 - 0,00009\,70204.\,t.$$

Ces quantités ne sont pas absolument constantes; mais elles varient très lentement, et si l'on se contente des centièmes de seconde, elles restent les mêmes pendant plus de 30 ans. Ainsi dans une durée de 10 ans, $m$ et $n$ sont sensiblement constantes. On verra bientôt qu'on peut les trouver par observation, à une époque quelconque.

Puisque les relations (2), (3) et (4) lient entre elles les valeurs de $\omega$, $l$, D... à tous les momens, les différentielles de ces variables désignent leur mouvement pendant une même durée, pourvu que le changement soit très petit : on prend cette durée d'une année. Ainsi $dÆ$ et $dD$ sont les mouvemens annuels de précession en asc. dr. et en déclin. On a $dl = 50'',1$; $m$ et $n$ restent sensiblement constans pendant plusieurs années (20 à 30 ans) après l'époque initiale pour laquelle on a calculé ces nombres.

M. Bessel trouve pour les valeurs de ces quantités, qui sont les mêmes pour toutes les étoiles,

| | | | |
|---|---|---|---|
| en 1830.. | $m = 46'',05293$, | $n = 20'',05666$, | $\log n = 1.30226$, |
| en 1840.. | 46,05601, | 20,05569, | 1.30224, |
| en 1850.. | 46,05910, | 20,05472, | 1.30222. |

On peut trouver ces arcs $m$ et $n$ par observation. On obtient les asc. dr. et déclin. d'une étoile (nº 40) à deux époques espacées de 10 ans; on divise par 10 la différence des arcs, et l'on a leur variation annuelle. Tout est alors connu dans les équ. (A) et (B), excepté $m$ et $n$, et l'on peut en tirer les valeurs de ces quantités. En répétant la même opération pour diverses étoiles

qui n'ont pas de mouvement propre, on obtient autant de valeurs presque égales de $m$ et de $n$; les moyennes entre tous les résultats sont avec précision les vraies valeurs de ces nombres, indépendantes des erreurs d'observation; et même si l'étoile a un mouvement propre, lorsqu'on aura les constantes $m$ et $n$, on pourra déterminer ce mouvement.

311. Il résulte de cette discussion que $m$ et $n$ sont exactement connus dans les équ. (A) et (B). Maintenant il est facile d'assigner, pour chaque étoile, et en secondes d'arcs, les *variations annuelles*, puisqu'on connaît l'asc. dr. et la déclin. ainsi que l'obliquité $\omega$. Ce sont ces variations qu'on inscrit près de chaque étoile dans les catalogues (*v.* table VII), et qui en donnent les coordonnées à une date quelconque, ainsi qu'on l'a expliqué n° 74; mais il ne faut pas que cette date s'éloigne de celle d'origine, au-delà de la limite où les variations cessent d'être proportionnelles aux temps, ce qui sera bientôt facile à reconnaître. Voilà pourquoi il faut refaire les catalogues tous les dix ans. On sait quels sont, au commencement de cette période, les arcs $\omega$, Æ et D, pour chaque étoile; on calcule les variations annuelles par les équ. (A) et (B), et ces variations servent pour les dix années qui suivent, sauf ce qui va être dit plus bas.

312. La correction de déclin. $d$D n'a le signe — que quand cos Æ est négatif, c'est-à-dire pour les étoiles dont l'asc. dr. est entre $6^h$ et $18^h$ (ou de 90° à 270°). Celle d'asc. dr. est positive, excepté pour quelques circompolaires, qui, étant placées depuis $12^h$ jusqu'à $24^h$ d'asc. dr., ont en outre tang. D assez grand pour que le 2e terme de $d$Æ l'emporte sur le 1er, $m$.

Et même il convient d'observer ici que pour les circompolaires, tang. D croît si rapidement, qu'il n'est plus permis de regarder la variation annuelle $d$Æ comme constante durant plusieurs années successives, lorsqu'on exige des résultats précis. Il faut en dire autant de certaines valeurs de $d$D. Voici donc ce qu'on doit faire en général à cet égard.

313. On pourrait calculer les variations d'année en année, en prenant, dans les équ. (A) et (B), chaque fois, pour Æ et D les

valeurs qui appartiennent au $1^{er}$ jour de l'année correspondante. Mais le procédé suivant est plus commode et aussi sûr.

Prenons la différentielle des équ. (A) et (B) :

$$d^2\text{Æ} = n \cos \text{Æ} \text{ tang D } d\text{Æ} + \frac{n \sin \text{Æ}\, d\text{D}}{\cos^2 \text{D}},$$

$$d^2\text{D} = -n \sin \text{Æ}\, d\text{Æ}.$$

Mettons $d$D au lieu de $n \cos$ Æ dans la première de ces valeurs, et multiplions par $\sin 1''$ pour exprimer en secondes d'arc; nous aurons les diff. secondes des variations annuelles en asc. dr. et en déclin. Sous cette forme :

$$d^2\text{Æ} = \left(\text{tang D } d\text{Æ} + \frac{n \sin \text{Æ}}{\cos^2 \text{D}}\right) d\text{D} \sin 1'',$$

$$d^2\text{D} = -n \sin \text{Æ}\, d\text{Æ} \sin 1''.$$

Il est facile de calculer ces valeurs pour chaque étoile. Mais presque toujours elles sont si petites qu'on doit les négliger : alors les $d^1$ sont constans, et les variations croissent proportionnellement au temps pendant 10, 20, ... ans, et même davantage. Mais lorsqu'il arrive que ces $d^2$ ont des grandeurs notables, alors les $d^1$ varient d'une année à l'autre. Ainsi on a au commencement

de la $1^{re}$ année diff. $1^{re} = d^1$,
de la $2^e$ ............ $= d^1 + d^2$,
de la $3^e$ ............ $= d^1 + 2d^2$,
de la $4^e$ ............ $= d^1 + 3d^2$,

et ainsi de suite. C'est-à-dire qu'on compose la progression arithmétique qui a $d^1$ pour $1^{er}$ terme et $d^2$ pour différence. (*Voyez* à ce sujet la note du n° 98, p. 78.) Mais il ne faut pousser cette série que jusqu'à une certaine limite, surtout lorsque $d^2$ est grand, parce que les $d^3$ devraient être pris en considération.

Avant de faire des applications de cette théorie, nous devons ajouter que les asc. dr. des catalogues sont presque toujours données en temps, et que dans nos équations elles sont

supposées en arcs. Il faudrait donc convertir les $d$Æ et $d^2$Æ en secondes de temps, en les divisant par 15. On voit qu'il faut (en 1830 et années suivantes) prendre dans $d$Æ

$$m = 3'',070195 \text{ et } \log n = 0.12617;$$

et dans $d^2$Æ on introduira pour $d$Æ sa valeur en secondes de temps, et pour log $n$ celle qu'on vient d'indiquer; $d^2$Æ sera alors exprimé en secondes de temps.

314. Soit prise pour exemple la polaire au commencement de 1830, époque où l'on a

Æ $= 0^h 59' 30'',76 = 14° 52' 41'',4, \quad D = 88° 24' 8'',82.$

Voici d'abord le calcul des $d^1$ par les équ. (A) et (B):

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $n$......... | 0.12617 | | | |
| sin Æ.... | 9.40954 | | $n$....... | 1.30226 |
| tang D.... | 1.55456 | | cos Æ... | 9.98519 |
| | 1.09027......... | 12″310 | | 1.28745 |
| | | $m$ = 3,070 | $d$D = | 19″,384 |
| | | $d$Æ = 15,380 en temps = 3′ 50″,70 en arc. | | |

Pour les $d^2$, on a

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $d$Æ......... | 1.18693 | $n$......... | 0.12617 | $n$......... | 1.30226 — |
| tang D....... | 1.55456 | sin Æ.... | 9.40954............... | | 9.40954 |
| $d$D......... | 1.28745 } | ............... | $\bar{5}$.97302 | $d$Æ...... | 2.36305 |
| sin 1″....... | $\bar{6}$.68557 } | cos² D..— | 6.89052 | sin 1″..... | $\bar{6}$.68557 |
| 0″0518...... | $\bar{2}$.71451 | | $\bar{2}$.61821 | $d^2$D...... | $\bar{3}$.76042 — |
| 0,0415 | | | 0″,0415 | $d^2$D = | — 0″,0058. |
| 0,0933 = $d^2$Æ. | | | | | |

Ainsi partant des valeurs de $d^1$ ci-dessus, on formera les séries suivantes:

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1<sup></sup>er janvier. | 1830 | 1831 | 1832 | 1833 | 1834.... |
| en asc. dr.. $d^1$ = | 15″380 | 15″472 | 15″566 | 15″659 | 15″752.. |
| en déclin.. $d^1$ = | 19,384 | 19,378 | 19,372 | 19,367 | 19,361.. |

Mais le mouvement propre de l'étoile n'est point ici pris en

considération; on a trouvé qu'il est de $+0'',097$ en asc. dr. et de zéro en déclin. On ajoute ces nombres aux $d^s$ ci-dessus, et l'on forme le tableau suivant.

| Ans. | Var. ann. | Asc. dr. | Var. ann. | Déclin. |
|---|---|---|---|---|
| 1830 | 15"477 | 0h59'30"76 | 19"384 | 88°24' 8"82 |
| 1831 | 15,570 | 0.59.46,24 | 19,378 | 88.24.28,20 |
| 1832 | 15,664 | 1. 0. 1,81 | 19,372 | 88.24.47,58 |
| 1833 | 15,757 | 1. 0.17,47 | 19,367 | 88.25. 6,95 |
| 1834 | 15,850 | 1. 0.33,23 | 19,361 | 88.25.26,32 |
| 1835 | 15,944 | 1. 0.49,08 | 19,355 | 88.25.45,68 |
| | etc. | etc. | etc. | etc. |

Quant aux fractions d'année, l'interpolation se fait à la manière accoutumée, en supposant les variations annuelles constantes dans le cours entier de l'année, ce qui ne produit pas 0",01 d'erreur dans le cas le plus défavorable. On pourrait au reste se servir des differ. secondes.

Pour donner à ces calculs une latitude plus étendue, nous présenterons ici le tableau suivant, qu'on peut interpoler comme on l'a dit dans la note page 98. Nous y avons compris δ petite Ourse, qui fait assez souvent le sujet des observations.

| Étoiles. | Ans. | Asc. dr. | Var. ann. | Déclin. | Var ann. |
|---|---|---|---|---|---|
| α polaire. | 1830 | 0h59'30"76 | +15"478 | 88°24' 8"82 | +19"381 |
| | 1840 | 1. 2.10,32 | 16,470 | 88.27.22,43 | 19,299 |
| | 1850 | 1. 54. 0,29 | 17,567 | 88.30.35,40 | 19,240 |
| | 1860 | 1. 8. 1,73 | 18,784 | 88.33.47,64 | 19,163 |
| δ pet. Ourse. | 1830 | 18h27' 5"13 | −19"167 | 86°35' 5"70 | + 2"363 |
| | 1840 | 18.23.53,03 | 19,241 | 86.35.27,93 | 2,085 |
| | 1850 | 18.20.40,21 | 19,305 | 86.35.47,36 | 1,805 |
| | 1860 | 18.17.26,77 | 19,360 | 86.36. 3,97 | 1,523 |

### *Sur la nutation.*

315. Si la Terre était sphérique, et que chacune de ses couches concentriques eût une densité constante, il n'y aurait ni précession ni nutation. Le défaut de sphéricité du globe pro-

duit la précession luni-solaire, dont nous allons parler; mais comme la Lune, qui cause principalement cet effet, n'est qu'accidentellement dans l'écliptique, cette rétrogradation du point ♈ éprouve une *inégalité périodique* qu'on appelle la *nutation*. Le Soleil y contribue aussi, et selon les positions de ces deux astres dans leurs orbites et celle du nœud lunaire, le point ♈ se trouve déplacé, et l'axe terrestre dérangé de sa position. Les planètes contribuent aussi par leurs attractions, à la précession, et à diminuer sans cesse l'obliquité de l'écliptique. Ces mouvemens, savoir, la précession, le décroissement d'obliquité et la nutation, dus à la même cause, sont partagés par les astronomes en trois effets. L'un est un mouvement général et séculaire qui porte le point ♈ vers l'ouest; c'est la précession, donnant le lieu moyen de ce point. Le second est un abaissement lent et graduel de l'équateur sur l'écliptique; c'est le changement d'obliquité. Enfin le troisième consiste en une oscillation de l'axe et de l'équateur de la Terre, qui écarte un peu le point ♈ de part et d'autre du lieu moyen où il serait en vertu de la seule précession, et balance l'équateur, en faisant décrire à l'axe des pôles une petite ellipse autour de l'axe moyen. Nous avons eu égard aux deux premiers effets, dont nous savons calculer l'influence; il nous reste à traiter du 3ᵉ; ce dernier est périodique, et les choses redeviennent les mêmes par rapport à l'état moyen, chaque fois que le Soleil et la Lune se retrouvent aux mêmes positions relatives à l'égard du nœud ☊. On peut voir dans l'*Uranographie* comment toutes ces choses arrivent. Ce qui nous importe, c'est d'avoir le *lieu apparent* des astres, qui se trouvant rapportés à l'équateur et au point ♈, dépend de l'état réel de ce plan par rapport à l'écliptique. Après avoir trouvé le lieu moyen, c'est-à-dire, après avoir eu égard à la précession et à l'obliquité moyenne, lorsqu'on veut avoir le lieu apparent, il faut donc tenir compte de la nutation, qui détermine la place véritable de l'équateur, savoir l'obliquité apparente de l'écliptique, et le lieu vrai du point ♈.

On calcule ces effets en cherchant d'abord la variation produite sur l'obliquité de l'écliptique par la nutation; car cette

variation $\Delta\omega$ une fois connue, le reste n'est qu'une recherche de pure analyse.

316. Dans les *Astron. fundam.*, p. 128, M. Bessel a montré qu'en désignant par ☉ la longitude moy. du Soleil, par ☊ celle du nœud ascendant de la Lune, par ☾ la vraie longitude lunaire, la formule qui détermine la nutation d'obliquité dans la *Mécanique céleste,* revient à

$$\Delta\omega = (9'',64800 \cos ☊ - 0'',09423 \cos 2 ☊ + 0'',09390 \cos 2 ☾)(1+z) + (0'',49333 - 1'',24520 \,.\, z) \cos 2 ☉.$$

$z$ est une correction qu'il faut trouver par observation, en déterminant le principal et premier coefficient de la formule, $9'',64800\ (1+z)$.

317. Les astronomes ne s'accordent pas sur la valeur de ce coefficient. Bradley l'a trouvé $= 9'',00$, nombre que la théorie prouve être trop petit ; Mayer le prend $= 9'',65$ ; Maskelyne, $9'',55$ ; Laplace, $10'',0556$. Cet illustre géomètre est revenu à diverses reprises sur cette grandeur (*), et dernièrement il l'a faite $= 9'',40$. M. de Lindenau a déterminé cette valeur par des recherches sur des observations de la polaire qui s'étendent à une période comprenant trois révolutions des nœuds lunaires : il a trouvé $8'',989$ ; mais depuis, il a réduit ce nombre à $8'',977$. Le docteur Brinckley (*Trans. philos.* 1821, p. 347) a dernièrement trouvé $9'',25$ pour ce facteur, par une comparaison de 1618 observations d'étoiles différentes. M. Bessel a adopté la valeur de M. de Lindenau, et la plupart des astronomes allemands en ont fait autant.

Mais comme le coefficient du docteur Brinckley a été tiré d'un nombre considérable d'observations, et qu'il tient le milieu entre les récentes déterminations de Laplace et de M. de

(*) V. *Mécan. cél.*, livre XIII, p. 159 ; *Syst. du Monde*, 5e édit., p. 285 ; *Conn. des Tems*, 1822. Ce coefficient, déduit des observations de l'étoile polaire, est réduit à $9'',30$ ; le pendule le donne $= 8'',6$. Enfin, Laplace dit ailleurs qu'il y a $\frac{1}{5146}$ de probabilité que ce facteur n'est pas $< 9'',31$, ni $> 9'',91$.

Lindenau, M. Baily a cru devoir l'adopter, et nous imiterons cet exemple (*).

On trouve donc de la sorte $\epsilon = -0{,}041252$; et substituant dans l'équ. ci-dessus, il vient

$$\begin{aligned}\Delta\omega = 9'',2500 \cos ☊ - 0'',0903 \cos 2☊ \\ + 0'',0900 \cos 2☾ + 0'',5447 \cos 2\odot.\end{aligned}$$

Mais la nutation en longitude $\Delta l$ se tire de celle d'obliquité, en multipliant le 1^er terme par $-2 \cot 2\omega$, et les trois derniers par $-\cot \omega$, puis enfin changeant les cosinus en sinus Si l'on prend $\omega = 23°27'40''$, valeur qui convient actuellement et pendant une longue suite d'années, on a

$$\begin{aligned}\Delta l = -17'',2985 \sin ☊ + 0'',2082 \sin 2☊ \\ - 0'',2074 \sin 2☾ - 1'',2550 \sin 2\odot.\end{aligned}$$

318. La recherche des variations qu'éprouvent l'asc. dr. et la déclin. par l'effet des précédentes, n'est plus qu'un objet de calcul, et l'on trouve pour les nutations d'asc. dr. $\Delta Æ$, et de déclin $\Delta D$, les formules

$$\begin{aligned}\Delta Æ = (\cos\omega + \sin\omega \sin Æ \tang D)\,\Delta l - \cos Æ \tang D.\,\Delta\omega, \\ \Delta D = \sin\omega \cos Æ.\,\Delta l + \sin Æ.\,\Delta\omega.\end{aligned}$$

(*) J'ai balancé si je ne préférerais pas la formule de nutation de M. Bessel. (*V.* la *Conn. des Tems* de 1829.) Aussi habile en Astronomie qu'en Analyse, ce savant ne s'est pas décidé, sans de fortes raisons, à adopter la constante de M. de Lindenau ; mais, outre que ses motifs ne me sont pas connus, il en existe de puissans pour rejeter cette constante. 1°. Les observations de la polaire d'où on l'a tirée sont très delicates. 2°. La constante de l'aberration est 20'',449, suivant M de Lindenau, et tous les astronomes préfèrent celle de Delambre, 20'',255 Cependant cette constante 20'',449 une fois rejetée, les équations de condition qui font connaître la nutation sont altérées ; et comment admettre une partie de ce calcul et rejeter l'autre? 3°. Enfin, la masse de la Lune est liée à cette théorie ; en la déduisant avec M. de Lindenau, on trouve qu'elle est à peu près $\frac{1}{88}$ de celle de la Terre : on la prend $\frac{1}{80}$ avec le coefficient de M. Brinckley. Laplace ne la trouvait, d'après d'autres considérations, que de $\frac{1}{75}$, et même $\frac{1}{68}$. Ainsi, on peut regarder jusqu'ici les travaux de M. Brinckley, relatifs à la nutation, comme plus sûrs que ceux de M. de Lindenau.

On prendra donc pour $\omega$, $\Delta l$ et $\Delta\omega$ les valeurs ci-dessus, et l'on aura des expressions qui, appliquées à un astre désigné dont on connaît l'asc. dr. et la déclin., détermineront les nutations en asc. dr. et déclin. pour cet astre, et pour l'époque qui se rapporte aux valeurs de ☊, ☾ et ☉ qu'on a choisies.

Pour la commodité de ces calculs, on réduit les formules en tables. Nous en allons expliquer la composition.

319. La longitude du nœud ☊ est facile à trouver pour un jour donné : c'est ce qui sera expliqué n° 331, où l'on verra qu'on préfère employer le supplément de cet arc à 360° en divisant la circonf. en 1000 parties : cet arc est l'argument N déjà si souvent usité. Ce supplément N de la longitude de ☊ à 360° est la distance de ce nœud au point ♈, exprimée en millièmes de la circonférence, et comptée en sens inverse des longitudes, ou d'orient en occident. On trouve cet arc N dans la table III à chaque jour des années successives de 1828 à 1857.

Ainsi, pour le 18 août 1831, on a 1831....... N = 573
18 août....... 34
N = 607.

Ce calcul a déjà été plusieurs fois à notre usage.

On fait deux parts dans les formules $\Delta\omega$ et $\Delta l$ : l'une comprend la partie de la nutation en longitude et en obliquité qui dépend du nœud; quant aux termes fonctions des longitudes du Soleil et de la Lune, il faut y avoir égard séparément. Une première table IV donne la *nutation lunaire*, ou les termes qui dépendent du ☊, ou de N, savoir :

$$\Delta l = 17'',2985 \sin N - 0'',2082 \sin 2N,$$
$$\Delta\omega = 9'',2500 \cos N - 0,903 \cos 2N.$$

Une seconde table IV donne la *nutation solaire*, ou les termes qui dépendent de ☉, savoir :

$$\Delta l = -1'',2550 \sin 2☉, \quad \Delta\omega = 0'',5447 \cos 2☉.$$

La longit. du Soleil revenant la même aux mêmes dates, chaque année, ce sont ces dates qu'on prend pour argument de la table.

Quant aux termes en 2☊ et 2☾, dans nos formules, ils ne s'y trouvent pas; ils n'ont pas de valeur sensible, quand on se borne aux centièmes de seconde. Ces termes sont tout-à-fait négligeables, si ce n'est dans des cas très rares, où l'on en fera le calcul à part.

Les tables III et IV font donc connaître, l'une, l'argument N, l'autre, les nutations lunaire et solaire $\Delta l$ et $\Delta\omega$, corrections qu'il faut faire à toutes les longitudes moy. d'astres, et à l'obliquité moy. pour obtenir leurs valeurs apparentes, et avoir égard au déplacement de l'axe et de l'équateur terrestres, par le fait de la nutation.

320. La nutation d'asc. et de déclin. varie avec ces coordonnées, et exige un calcul spécial pour chaque astre. Nous allons exposer cette théorie; mais pour ce qui concerne le Soleil, dont l'asc. dr. moy. est si fréquemment employée qu'il convient de la calculer d'avance pour toutes les circonstances, elle est égale à la longitude moyenne, mais comptée sur l'équateur; il suffit donc d'y projeter le petit arc $dl$, ce qui donne $dl.\cos\omega$, et de l'ajouter à cette longitude : ainsi $d\text{Æ} = dl \cos\omega$. On trouve

$$d\text{Æ} = -15''8685 \sin ☊ + 0''1910 \sin 2☊, - 0,1902 \sin 2☾ - 1,1513 \sin 2☉,$$

et en temps,

$$d\text{Æ} = 1,0585 \sin \text{N} - 0,0127 \sin 2\text{N} - 0'',0127 \sin 2☾ - 0'',0768 \sin 2☉.$$

Nous verrons bientôt comment on tire de cette équ. la colonne $d\text{Æ}$ de la table IV, et quel en est l'usage.

321. Faisons $\omega = 23° 27' 40''$ dans les formules du n° 318, et substituons-y les valeurs de $\Delta l$ et $\Delta\omega$, en ne tenant compte que des termes dépendans de ☊, et négligeant ceux en 2☊ qui sont insensibles; nous aurons ces expressions, en arc, de la *nutation lunaire*, en asc. dr., et en déclin.,

$$d\text{Æ} = -9'',250 \cos \text{Æ} \tan \text{D} \cos ☊ - (15'',868 + 6'',887 \sin \text{Æ} \tan \text{D}) \sin ☊,$$
$$d\text{D} = 9'',250 \sin \text{Æ} \cos ☊ - 6'',887 \cos \text{Æ} \sin ☊.$$

Pour tirer des tables d'étoiles l'asc. dr. en temps et la déclin. d'une étoile, il faut y prendre les valeurs moy. de ces arcs, en

ayant égard à la précession, et les corriger ensuite de la nutation lunaire exprimée par ces équ. Or, pour calculer cette correction, il convient de préparer nos deux formules pour l'usage des log.

Posons $$\cot\varphi = \frac{15'',868 + 6'',887 \sin Æ \operatorname{tang} D}{9'',250 \cos Æ \operatorname{tang} D};$$

d'où l'on tire

$$dÆ = -9'',250 \cos Æ \operatorname{tang} D . \frac{\sin(\varphi + ☊)}{\sin\varphi}.$$

On voit que quand l'arc auxiliaire $\varphi$ sera connu par la 1[re] de ces équ., il faudra l'introduire dans la 2[e] avec son signe, tel que le donne le calcul, et que $\cot\varphi$ et le coefficient de $\sin(\varphi + ☊)$ sont constans pour une même étoile, pendant un temps considérable, puisque ces quantités varient très lentement avec Æ et la précession. De plus, le coefficient de $dÆ$ est sa plus grande valeur, puisqu'elle répond à $\sin = 1$. Ainsi on pourra calculer d'avance, pour toute étoile désignée, les valeurs de $\varphi$ et du *maximum* de nutation, ou plutôt du log. de ce *maximum*; c'est ce qu'on voit effectué pour 50 étoiles dans la table VII (dernières colonnes).

La valeur de $dD$ se traite de même, et le calcul en est plus aisé : on pose

$$\cot\varphi' = \frac{6'',887 \cot Æ}{9,250} = 0'',7445 \cot Æ;$$

d'où $$dD = -\frac{9'',250 \sin Æ}{\sin\varphi'} \sin(☊ - \varphi').$$

On calculera la valeur de $\varphi'$ pour chaque étoile, et celle du log. du coeff. de $\sin(☊ - \varphi')$, qui est le *maximum* de nutation lunaire en déclin. Ces arcs sont donnés dans notre table VII (colonne 5[e] et 6[e]).

Pour calculer ces arcs $\varphi$, $\varphi'$ et les deux *maxima*, on simplifie le plus possible les formules, et l'on trouve qu'en divisant $dÆ$ par 15, pour exprimer cet arc en temps, et posant

$$z = \mathrm{Q} \sin \text{Æ} \operatorname{tang} \mathrm{D}, \qquad \log \mathrm{Q} = 1.63749,$$

$$\operatorname{tang} \varphi = \frac{\mathrm{M} \cos \text{Æ} \operatorname{tang} \mathrm{D}}{1+z}, \quad \log \mathrm{M} = \bar{1}.76562, \quad \log \mathrm{A} = 0.02443-,$$

on a $\quad$ *maximum de nut. en asc. dr.* $= \dfrac{\mathrm{A}(1+z)}{\cos \varphi}$ (en temps),

$$\operatorname{tang} \varphi' = \mathrm{G} \operatorname{tang} \text{Æ}, \quad \log \mathrm{G} = 0.12811-; \quad \log \mathrm{H} = 0.83803-$$

*maximum de nut. en déclin.* $= \dfrac{\mathrm{H} \cos \text{Æ}}{\cos \varphi'}$ (en arc).

Et d'abord on remarquera qu'on peut toujours rendre les arcs $\phi$, $\phi'$ et les *maxima* positifs ; car si le calcul conduit à un arc $\phi$ ou $\phi'$ négatif, on y ajoute $12^s$ pour lui donner le signe $+$ ; et si c'est le coeff. qui a le signe $-$, on le prend positif, et l'on ajoute $6^s$ à l'arc ☊ $+ \varphi$, ou ☊ $- \varphi'$ ; on change de la sorte le signe des deux facteurs, ce qui n'altère pas le produit.

On comprend maintenant que pour trouver la nutation lunaire d'une étoile qui a fait le sujet des calculs précédens, il faudra tirer de la table VII les valeurs des arcs $\varphi$ et $\varphi'$, et des log. des deux *maxima*. On tirera de la *Conn. des Tems*, ou du n° 331, la longit du ☊ de la Lune, et on l'ajoutera aux arcs $\phi$ et $\phi'$, ce qui donnera deux sommes, qu'il faudra multiplier respectivement par les *maxima* dont on a les log. Cette opération est très facile; nous n'en donnerons pas d'exemple ici, attendu que ce sujet a déjà été traité p. 91.

322. Quant à la seconde partie de la formule de nutation, qui dépend de la longit. $\odot$ du Soleil, et constitue la nutation solaire, elle est si faible qu'on la néglige le plus souvent; on peut, au reste la calculer par les équ.

$$d\text{Æ} = -(1'',151 + 0'',500 \sin \text{Æ} \operatorname{tang} \mathrm{D}) \sin 2\odot - 0'',545 \cos \text{Æ} \operatorname{tang} \mathrm{D} \cos 2\odot,$$

$$d\mathrm{D} = +0'',545 \sin \text{Æ} \cos 2\odot - 0'',500 \cos \text{Æ} \sin 2\odot.$$

Dans le cas où l'on exigerait une extrême précision, il faudrait chercher ces valeurs, et corriger d'autant l'asc. dr. et la déclin. moy. de l'étoile. Ce calcul se ferait précisément comme le précédent; mais on l'abrège beaucoup en remarquant que la forme des équ. est la même et que les coeff. sont à fort peu

près les 0,075 des premiers. Ainsi on pourra se servir des mêmes arcs $\varphi$ et $\varphi'$ et des log. *maxima*, refaire le calcul en se servant de la longit. ☉ au lieu de ☊, puis prendre le dixième des $\frac{3}{4}$ des nutations ainsi obtenues en asc. dr. et déclin. Ce seront les nutations solaires demandées.

*Sur l'aberration.*

323. Ce phénomène résulte des mouvemens combinés de la Terre dans son orbite et de la lumière dans l'espace. Ces deux vitesses s'exerçant obliquement l'une à l'autre, ce sont deux forces qui se composent ensemble selon le parallélogramme statique. Il en résulte que lorsque nous dirigeons nos regards vers un astre dont la lumière nous vient selon un côté de ce parallélogramme, tandis que la vitesse de la Terre est produite selon l'autre côté adjacent, nous voyons l'astre dans le prolongement de la diagonale. On peut lire dans l'*Uranographie* la théorie de ce déplacement apparent (n° 128).

Mais comme la vitesse de la Terre est excessivement petite à l'égard de celle de la lumière, ce parallélogramme est si étroit que le grand côté se confond presque avec la direction du rayon lumineux, et que le déplacement apparent est très peu sensible : il est pourtant assez notable, pour que les astronomes en tiennent compte.

La lumière nous vient du Soleil en 8′ 13″,2, ce qui fait environ 70 mille lieues par seconde : on trouve l'arc que décrit la Terre en 8′ 13″,2 = 493″,2 par la proportion

$$\text{année sid. } 365^j{,}25636 : 360^o :: 493'',2 : x = 20'',253 ;$$

ainsi les vitesses de la lumière et de la Terre sont entre elles :: 493″,2 : 20″,253 ; ce sont les côtés de notre parallélogramme.

Un astre doit donc nous paraître sans cesse en avant de sa vraie place, de la quantité 20″,253, nombre qu'on appelle la *constante de l'aberration*, et cela dans un sens parallèle à la direction que suit actuellement notre globe. Une étoile située dans le plan de l'écliptique, quoiqu'elle y soit immobile, nous

paraît osciller de part et d'autre de son lieu réel, tantôt en avant, tantôt en arrière, sans sortir toutefois de ce plan. L'excursion la plus grande est de 20",253, et la période de ces oscillations est juste d'une année, pour décrire ce petit arc de 40",5. Le Soleil, qui ne sort pas de l'écliptique, mais qui reste fixé au centre de notre orbite, nous semble toujours en avant, en sorte que sa longitude est sans cesse diminuée de 20",253.

Si l'étoile est hors de l'écliptique, elle éprouve des déplacemens apparens tant en longitude qu'en latitude. Elle semble décrire annuellement une petite ellipse autour de son lieu réel, oscillant ainsi de manière à devancer la Terre de 90° dans cette ellipse fictive, dont le grand axe est de 40",5. (*V.* l'*Uranographie.*)

La constante 20",253 est trouvée en supposant que la Terre décrit un cercle autour du Soleil, dont le rayon est la moyenne distance à cet astre, et se meut uniformément : cette hypothèse exigerait une légère correction; cependant nous l'adopterons.

Bradley, à qui l'on doit la découverte de ce phénomène, faisait la constante de la réfraction égale à 20",00; mais les recherches de Delambre sur la vitesse de la lumière, déduites des éclipses des satellites de Jupiter, l'ont conduit à cette valeur, 20",253. Plusieurs astronomes modernes ont encore accru ce nombre. M. Bessel (*Astr. fund.*, p. 112) le fait = 20",68, par une moyenne tirée de la comparaison de 588 observations de différentes étoiles. M. de Lindenau (*Zeist. astr.*, t. I, p. 65), le prend = 20",6096, d'après 810 observations d'asc. dr. de la polaire, faites par Bradley, Maskelyne, Pond et Bessel. Le Dr Struve (*Obs. astr.*, Dorpat, t. III, p. 64) ne donne à cette constante que la valeur 20",349, conclue d'une suite de 693 observations de circompolaires, et 20",361 lorsqu'on y introduit la combinaison des résultats dus à M. Bessel. Dernièrement, le Dr Brinckley (*Trans. philos.*, 1821, p. 350) a obtenu 20",37 par une moyenne entre 2633 comparaisons de différentes étoiles. Comme on remarque un grand rapprochement entre ce nombre et celui de M. Struve, bien que tirés de moyens différens, et

qu'en outre ils ont l'un et l'autre trouvé ces résultats par la comparaison d'un grand nombre d'étoiles, M. Baily a adopté 20″,36 pour la constante de l'aberration dans la composition de sa table ; et c'est cette valeur que nous avons préférée aussi dans la nôtre (t. VII). Il est vrai que les derniers travaux de M. Richardson ont changé cette détermination (*v.* p. 415) ; mais nous attendrons pour adopter sa constante que les astronomes se soient prononcés sur ce changement.

Quant à la supposition que notre globe a un mouvement circulaire et uniforme dans l'écliptique, elle donne lieu à de petites erreurs. L'une tend à imposer une légère variation à la constante 20″,36, variation qui ne va au plus qu'à 0″,003. On y a égard en introduisant $(1+\frac{1}{2}e^2)$ pour facteur de ce coefficient, $e$ étant l'excentricité de l'écliptique, $e = 0{,}016853$. Mais cette correction est négligeable dans la détermination du lieu apparent des étoiles.

L'autre dépend du lieu de l'apogée solaire, et est la même pour toutes les étoiles, pendant une longue suite d'années. Celle-ci est nécessairement renfermée dans le lieu moyen donné par observation, et ne doit pas être prise en considération. Il y a encore la vitesse du mouvement diurne de la Terre dont il semble qu'on devrait tenir compte ; mais l'effet n'en est nullement appréciable.

324. Les formules générales pour déterminer les écarts produits par l'aberration sur l'asc. dr. Æ et la déclin. d'une étoile sont

$$\Delta \text{Æ} = -20''36\,(\sin \text{Æ} \sin \odot + \cos \omega \cos \text{Æ} \cos \odot) : \cos D,$$
$$\Delta D = -20{,}36\,(\cos \text{Æ} \sin \odot - \cos \omega \sin \text{Æ} \cos \odot)\, \sin D$$
$$\quad - 20{,}36\, \sin \omega \cos \odot \cos D,$$

en désignant par ⊙ la longit. vr. du Soleil, et par $\omega$ l'obliquité de l'écliptique, à un instant donné. Si l'on prend $\omega = 23°27'40''$, valeur qui convient actuellement et pendant une longue suite d'années, on trouve

$$\Delta \text{Æ} = -(20{,}3600 \sin\odot \cos\text{Æ} - 18{,}6768 \cos\odot \sin \text{Æ})\, \sin D$$
$$\Delta D = -(20''3600 \sin\odot \sin \text{Æ} + 18''6768 \cos\odot \cos \text{Æ}) : \cos D,$$
$$\quad - 8{,}1058 \cos\odot \cos D.$$

325. Pour rendre ces formules usuelles, il faut leur faire subir une préparation. Et d'abord pour la 1^re, posons

$$\text{tang}\,\theta = \frac{18'',6768}{20'',3600}\cot \mathrm{AR}\,;$$

$$\text{d'où}\quad d\mathrm{AR} = -\frac{20'',36000.\sin \mathrm{AR}}{\cos D\cos\theta}\sin(\odot+\theta).$$

L'arc auxiliaire $\theta$ est donné par la 1^re équ.; il faut le substituer dans la 2^e, avec son signe, et l'on obtient $d\mathrm{AR}$. Or pour une même étoile, $\odot$ varie seul chaque jour, et AR et D sont sensiblement constans, ou du moins leurs faibles changemens n'exercent ici pendant long-temps aucune influence. Ainsi $\theta$ est constant, aussi bien que le coeff. de $\sin(\odot+\theta)$; ce coefficient est la plus grande valeur que puisse prendre $d\mathrm{AR}$. On peut donc calculer d'avance, pour toute étoile désignée, l'arc $\theta$ et ce *maximum*.

Raisonnons de même pour la formule de déclin., et posons

$$\text{tang}\,\theta' = \frac{18'',6768}{20'',3600}\text{tang}\,\mathrm{AR} - \frac{8'',1058}{20,3600}\cdot\frac{\cot D}{\cos \mathrm{AR}},$$

$$\text{d'où}\quad dD = -20'',3600.\frac{\sin D\cos \mathrm{AR}}{\cos\theta'}\sin(\odot-\theta'),$$

on aura $\theta'$ par la 1^re équ., et substituant dans la 2^e, on trouvera $dD$. Or $\odot$ varie seul chaque jour; $\theta'$ et le coeff. de $\sin(\odot-\theta')$ sont constans pour une étoile quelconque désignée, et l'on pourra calculer d'avance les valeurs de $\theta'$ et de ce coefficient, qui est le *maximum* de l'aberration en déclin.

326. Maintenant divisons la valeur de $d\mathrm{AR}$ par 15 pour exprimer ce petit arc en temps, et nous verrons que ces calculs sont exprimés par les formules ci-après :

$\text{tang}\,\theta = C\cot \mathrm{AR}$, $\log C = \bar{1}.96252$,

*maximum d'aberr. d'asc. dr.* $= -\dfrac{B\sin \mathrm{AR}}{\cos D\cos\theta}$, $\log B = 0.13269-$,

$\text{tang}\,\theta' = -E\,\text{tang}\,\mathrm{AR}\left(1-\dfrac{N}{\text{tang}\,D\sin \mathrm{AR}}\right)$, $\log E = \bar{1}.96252-$,

*maximum d'aberr. de déclin.* $= -\dfrac{F\sin D\cos \mathrm{AR}}{\cos\theta'}$, $\log F = 1.30878-$.

ces équ. ont même forme que celles de la nutation, p. 460, et l'usage en est semblable. Le facteur Q y est ici le même ($\log. Q = 1.63749 -$). On conçoit maintenant comment nous avons pu calculer pour 50 étoiles les arcs $\theta$ et $\theta'$, et les log. des deux *maxima*, puis les inscrire dans les colonnes de notre table VII. Pour calculer l'aberration d'une étoile un jour donné, on prend dans la *Conn. des Tems* la longit. du Soleil, et on l'ajoute aux argumens $\theta$ et $\theta'$ : les sinus de cette somme doivent être multipliés par les *maxima* respectifs; on en ajoute donc les log. à ceux de ces *maxima* qu'on tire de la table. Mais il faut surtout avoir égard aux signes des sinus, conformément aux règles accoutumées. Ici comme p. 460, les arcs $\theta$ et $\theta'$ sont toujours positifs, aussi bien que les *maxima*, parce qu'on a eu soin de les rendre tels. En un mot, tout ce qui a été dit de la nutation se reproduit ici, si ce n'est que *l'aberration dépend de la longit. du Soleil, tandis que la nutation dépend de celle du nœud lunaire* ☊.

327. M. Dezach a publié, sur ces principes, des tables qui servent à calculer la nutation et l'aberration d'un grand nombre d'étoiles. M. Burckardt a donné dans la *Conn. des Tems* de 1812 des tables qui donnent ces petites corrections pour 48 principales étoiles : enfin, M. Baily a publié, dans les *Mémoires de la Société astronomique de Londres*, et d'après les formules de M. Bessel, des tables très complètes qui donnent l'aberration et la nutation de 2881 étoiles, ce qui suffit à tous les besoins de l'Astronomie. Comme le calcul du lieu apparent de ces astres est assez pénible et d'un fréquent usage, il importait d'abréger cette opération : les tables dont nous venons de parler sont donc précieuses. Quant à nous, il nous suffisait d'indiquer la construction de notre table VII. L'usage en a déjà été expliqué avec assez de clarté p. 91.

328. Tout cela s'applique aux planètes, pour ce qui concerne la nutation; mais l'aberration dépendant de la distance R de l'astre à la Terre, il faut en faire le calcul par la méthode de Delambre; savoir (*Astr.* III, p. 106),

$$aberr. = -\frac{\mu\theta}{86400}.R = -0'',0057083\,R\mu, \quad \log. = \bar{3}.7565094,$$

$\mu$ désigne le mouvement diurne géocentrique de la planète, exprimé en secondes d'arcs, soit en asc. dr., soit en déclin., soit en longit., soit en latitude. On donne à $\mu$ le signe —, quand la planète est rétrograde et qu'on traite l'asc. dr. ou la longit.; et aussi —, si le mouvement est vers le pôle austral, quand il s'agit de la latitude ou de la déclin. $\theta$ est le temps que la lumière emploie à nous venir du Soleil, exprimé en secondes (493'',2).

Le log. R est donné par les tables de la planète. Il sert encore à en trouver la parallaxe, qui est $= \frac{M}{R}$, en faisant M = parallaxe moy. du Soleil; on a

$$parall.\ horiz.\ planète = \frac{M}{R}, \ \log M = 0.9333658.$$

Et comme le demi-diamètre est toujours en rapport constant avec la parallaxe, on trouvera de même le 1[er] de ces arcs en connaissant ce rapport pour chaque planète.

*Sur les ascensions droites du Soleil moyen.*

329. Pour tirer de la formule p. 381 la longitude moyenne du Soleil à la date de 0 janvier à midi moyen de Paris (ou le 31 décembre), il faut retrancher 29' 34'',165, qui est le mouvement en 12 heures : on trouve

$$279^\circ\, 54'\, 1'',36 + t.\, 27'',605\,844 + t^2.\ \text{etc.}\ldots$$

Mais l'asc. dr. du Soleil moyen est égale à cette longitude moyenne réduite en temps; multipliant donc par $\frac{4}{60}$, il vient

$$18^h\, 39'\, 36'',09067 + t.1'',8403896 + t^2.0,00000\,81453\,667 - \alpha,$$

$t$ est le nombre d'années écoulées depuis le 1[er] janvier 1800; et, selon que le reste de la division de $t$ par 4 est 0, 1, 2 ou 3, on prend

$\alpha = 3'56'',55535$, $59'',13884$, $1'58'',27768$, ou $2'57'',41651$.

Si l'on veut avoir l'asc. dr. moy. pour midi moy. de tout autre jour de l'année, il faut encore ajouter le produit de la marche diurne $3'56'',555348$ multipliée par le nombre $j$ de jours écoulés depuis le o janvier. Ce facteur $j$, qui exprime la *date annuelle*, est connu. (*V.* p. 88.) Ajoutons donc ce produit, et nous aurons

$$\textit{asc. dr. moy.} = 18^h 38' + j.3'56'',555348, + 1'36'',09067 + t.1'',8403896, + t^2.0,00000\,81454 - \alpha.$$

Les deux premiers termes de cette expression sont donnés de 5 en 5 jours pour chaque date, dans la table III. Les jours intermédiaires ont été supprimés pour abréger cette table; mais on y supplée en prenant, à la fin, le mouvement pour 1, 2, 3..., jours, et l'ajoutant.

Quant aux autres termes de la formule, on en trouve la valeur pour une suite d'années dans la colonne intitulée *corrections*. Ici, $t$ désigne le nombre d'années écoulées à compter du 1$^{er}$ janvier 1800, $\alpha$ est donné par le reste de la division par 4 du millésime proposé, ou de ses deux chiffres à droite. Ainsi, en 1830, on fait $t = 30$, et le reste de $\frac{30}{4} = 2$. On obtient ainsi ce qu'il faut ajouter constamment à tous les nombres de la 1$^{re}$ partie de la table, pour avoir celle qui convient à l'an 1830. On complète donc ainsi toutes les asc. dr. du midi moyen de cette année de 5 en 5 jours. Cette correction est variable avec $t$, mais constante pour chaque année entière. Dans cette addition, il faut conserver à la correction son signe, qui est quelquefois —.

330. Jusqu'ici, cette asc. dr. est comptée de l'*équinoxe moyen*, et il faut la compter de l'*équinoxe vrai*, c'est-à-dire tel qu'il se trouve déplacé par la nutation.

Et d'abord la partie de cet effet qui est due au Soleil est... $= -0'',079 \sin 2\odot$ (n° 320). Comme cette petite quantité revient périodiquement, aux mêmes dates, chaque année, on l'a comprise dans la table III, en sorte qu'en y prenant les nombres,

on se trouve tenir compte de la nutation solaire. Reste donc celle de la Lune; elle est, en temps,

$$= 1'',0585 \sin N - 0'',013 \sin 2N - 0'',013 \sin 2☾.$$

N est le supplément à 360° du ☊. Le dernier terme est négligé de l'équ.; il est si faible qu'on peut ne pas s'en occuper. Quant aux deux autres termes, ils sont donnés sous le titre de *nutation lunaire en asc. dr.*, dans la colonne Æ de la table IV, pour toutes les valeurs de N de 10 en 10; l'interpolation suffit pour donner les nombres intermédiaires.

Voilà donc enfin ce qu'il faut faire pour obtenir l'asc. dr. moy. pour un midi moy. donné :

1°. Tirer de la table III les nombres qui répondent à la date donnée et à l'année proposée, ainsi que les valeurs de N correspondantes;

2°. Trouver dans la table IV la nutation lunaire qui répond à la valeur de N qu'on vient d'obtenir;

3°. Ajouter ces nombres.

Ce procédé a été mis en pratique, p. 148, sur divers exemples, et il est inutile d'en présenter d'autres.

331. Quant à l'arc N, voici la loi de sa formation. La théorie des mouvemens lunaires apprend que le nœud rétrograde de 19°20'30'',0 par an, ou de 19°,34166. Ainsi, connaissant son lieu à une époque donnée, on peut le calculer à toute autre époque. Par exemple, au 1er janvier 1830, le nœud a pour longitude 5s 23° 1' 18''; en retranchant de cet arc la marche annuelle prise 1, 2, 3..., fois, on aura le lieu du ☊ au commencement des années successives 1831, 1832...; c'est ce qui a déjà été expliqué p. 393, ainsi que le mouvement de ce point pour les différentes dates de l'année, à raison de...... 3' 10'',64 = 0°,052955 de rétrogradation par jour.

Ce calcul est facile, mais un peu long; on l'abrège par un procédé très simple. D'abord, au lieu de la longit. du nœud, on préfère le supplément à 360° qu'on appelle N; le décroissement de longitude du nœud, qui exigerait une soustraction, se trouve remplacé par une addition, la rétrogradation augmen-

tant sans cesse ce supplément. En outre, on représente la circonf. par 1000 au lieu de 360°, pour éviter les fractions complexes et faciliter le calcul.

Pour convertir $m$ degrés en millièmes de la circonf. on pose cette proportion : si 360° valent 1000, $m$ degrés valent $\frac{1000}{360} \cdot m = (3 - \frac{2}{9})\, m$. Il faut donc tripler $m$, et du produit retrancher 2 fois $\frac{1}{9}\, m$. Réciproquement, pour convertir les millièmes de circonf. en degrés, il faut multiplier par 0,36.

D'après cela, on trouve qu'en 1830 le supplément du ☊ est N = 519,38, le 1er janvier, et que sa marche annuelle est 53,7269. Ainsi, $t$ ans après le 1er janvier 1830,

$$\text{ce supplément} = 519{,}38 + 53{,}7269 \,.\, t;$$

on prend $t$ négatif pour les années antérieures à 1830.

Le mouvement, pour les jours écoulés depuis le 1er janvier, se trouve par le produit $53{,}7269 \times f$, $f$ étant la fraction d'année correspondante à la date (*v.* table VIII), ou bien en multipliant 0,147098 par le nombre de jours écoulés depuis le commencement de l'année. Mais il est inutile de faire ce dernier calcul, parce que le résultat en est donné t. III, près la date proposée, et qu'une unité d'erreur sur le nombre N n'est d'aucune importance.

D'après cela, cherchons la valeur de l'argument N, le 30 juin 1818. Du commencement de cette année à celui de 1830, il y a 12 ans ; $t = -12$.

| | | |
|---|---|---|
| Ainsi, en 1830 | | N = 519,38 |
| | Table III, 30 juin | 27 |
| | — 12 fois 53,7269 | — 644,72 |
| | Le 30 juin 1818 | N = 901,66. |

On a ajouté 1000 pour rendre la soustraction possible, ce qui est permis, puisque 1000 représente 360° ou une circonférence entière.

*Construction et usage des tables.*

Les tables I et II, *accélération des fixes*, expriment la marche du Soleil moyen en asc. dr., savoir, la 1<sup>re</sup> en temps moyen, la 2<sup>e</sup> en temps sidéral. D'après ce qui a été dit p. 88, l'une donne les fractions de 3′ 55″,909, l'autre celles de 3′ 56″,555, nombres qui représentent le mouvement en $24^h$. Ces tables sont d'un fréquent usage pour convertir le temps sidéral en temps moyen, et réciproquement, ainsi qu'on l'a exposé p. 144; elles servent surtout à calculer l'heure sidérale par l'heure moyenne (p. 151), ou réciproquement (p. 153), ainsi que les angles horaires (p. 172), l'heure moyenne du passage d'une étoile au méridien (p. 156). Il faut en général prendre les nombres dans la table I quand la durée qu'on cherche est en temps moyen, et dans la table II lorsqu'elle est en temps sidéral.

La table III est destinée à faire connaître l'asc. dr. du Soleil moyen à midi moyen de Paris, tous les jours de l'année, ainsi que l'argument N de nutation. La formation de cette table a été expliquée n° 329; l'usage en est donné p. 144 et suivantes.

La table IV fait connaître l'effet de la nutation luni-solaire sur l'asc. dr. moy. du Soleil en temps, sur l'obliquité de l'écliptique et sur la longitude des astres. On trouvera n° 315 l'exposition de la théorie de ces petites variations, et les formules qui servent à composer cette table. Le changement qui se produit sur l'asc. dr. est employé p. 144, pour trouver l'asc. dr. du Soleil moyen; celui d'obliquité l'a été p. 95 et 431, pour corriger l'obliquité moyenne, et la changer en vraie: enfin, celle de longitude donne la position vraie du point vernal ♈; on s'en est servi p. 388, pour trouver la longit. vraie du Soleil.

Les tables V et VI sont destinées à donner la réfraction; on en a expliqué l'usage et la composition p. 84.

La table VII est un *catalogue des* 50 *principales étoiles*, pour le 1<sup>er</sup> janvier 1830, tiré de celui de la Société astrono-

mique de Londres, publié par M. Baily; on s'accorde assez généralement à le considérer comme le plus exact de tous. On en a aussi extrait les *variations annuelles*, qui servent à calculer le mouvement de précession de l'équinoxe, et à transporter les données à une autre époque, ainsi qu'on l'a expliqué p. 89. Ces variations sont calculées sur les formules données p. 448. On a besoin de connaître le facteur qui est la *fraction de l'an* correspondante à une date donnée; ce facteur est contenu dans la table VIII, dont la formation et l'usage sont expliqués p. 92.

Enfin, la seconde partie de la table sert à corriger l'asc. dr. et la déclin. des étoiles de notre catalogue *de la nutation et de l'aberration*; elle est construite sur les équ. des p. 460 et 464 : on en a expliqué l'usage p. 91.

La table IX est destinée à faire connaître la petite quantité dont s'accroît le *demi-diamètre de la Lune*, à mesure qu'elle s'élève sur l'horizon. Cette théorie est expliquée p. 61.

Lorsque des observations de hauteur d'un astre sont faites près du méridien, on peut en tirer la latitude du lieu, en calculant l'exacte hauteur que prend cet astre quand il est au méridien même. La table X, de *réductions au méridien*, sert à faire ce calcul; voyez-en la théorie et l'usage p. 199 et suiv. Le calcul des nombres de cette table est expliqué p. 408.

La table XI sert à régler la lunette méridienne, et à la faire servir aux observations de passage, quand elle n'est qu'à très peu près dans le plan du méridien. Cette théorie est expliquée p. 168.

La table XII donne les valeurs de la parallaxe de hauteur pour le Soleil; elle est extraite des tables de Delambre, et suppose la parallaxe horizontale moyenne de 8",8. (*Voir* à ce sujet ce qui a été exposé p. 119.)

La table XIII est destinée à donner l'heure de la haute mer dans tous les ports dont on connaît l'établissement. Cette théorie est expliquée p. 365.

La table XIV fait trouver la longitude moyenne et vraie du Soleil, ainsi que les principales perturbations; c'est ce

qui a été expliqué p. 384. A est l'argument des perturbations de Vénus, B celui de Jupiter, C celui de la Lune, N celui de nutation lunaire. Cette partie de la table est composée sur les formules de perturbations suivantes :

Vénus...... $+ 5'',63 \sin A - 6'',45 \sin 2A - 0'',80 \sin 3A - 0'',24 \sin 4A$,
Jupiter. .... $- 7'',06 \sin B + 2'',67 \sin 2B + 0'',17 \sin 3B$,
Lune....... $7'' \sin(☾ - ☉)$,
Nutation.... $18'' \sin$ ☊.

La table XV donne le lieu de la Lune, conformément à ce qui a été expliqué p. 393.

Les tables XVI et XVII remplissent le même objet pour les planètes. (*V.* p. 397.)

## I. Exprimée en temps moyen.

UNE DURÉE SIDÉRALE

s'exprime en temps moyen, en retranchant pour

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 heure | 9″83 | 9h | 1′28″47 | 17h | 2′47″10 |
| 2 | 19,66 | 10 | 1.38,30 | 18 | 2.56,93 |
| 3 | 29,49 | 11 | 1.48,13 | 19 | 3. 6,76 |
| 4 | 39,32 | 12 | 1.57,95 | 20 | 3.16,59 |
| 5 | 49,15 | 13 | 2. 7,78 | 21 | 3.26,42 |
| 6 | 58,98 | 14 | 2.17,61 | 22 | 3.36,25 |
| 7 | 1′ 8,81 | 15 | 2.27,44 | 23 | 3.46,08 |
| 8 | 1.18,64 | 16 | 2.37,27 | 24 | 3.55,91 |
| 1 min. | 0″16 | 21 m | 3″44 | 41 m | 6″72 |
| 2 | 0,33 | 22 | 3,60 | 42 | 6,88 |
| 3 | 0,49 | 23 | 3,77 | 43 | 7,04 |
| 4 | 0,66 | 24 | 3,93 | 44 | 7,21 |
| 5 | 0,82 | 25 | 4,10 | 45 | 7,37 |
| 6 | 0,98 | 26 | 4,26 | 46 | 7,54 |
| 7 | 1,15 | 27 | 4,42 | 47 | 7,70 |
| 8 | 1,31 | 28 | 4,59 | 48 | 7,86 |
| 9 | 1,47 | 29 | 4,75 | 49 | 8,02 |
| 10 | 1,64 | 30 | 4,92 | 50 | 8,19 |
| 11 | 1,80 | 31 | 5,08 | 51 | 8,35 |
| 12 | 1,97 | 32 | 5,24 | 52 | 8,52 |
| 13 | 2,13 | 33 | 5,41 | 53 | 8,68 |
| 14 | 2,29 | 34 | 5,57 | 54 | 8,85 |
| 15 | 2,46 | 35 | 5,73 | 55 | 9,01 |
| 16 | 2,62 | 36 | 5,90 | 56 | 9,17 |
| 17 | 2,79 | 37 | 6,06 | 57 | 9,34 |
| 18 | 2,95 | 38 | 6,22 | 58 | 9,50 |
| 19 | 3,11 | 39 | 6,39 | 59 | 9,67 |
| 20 | 3,28 | 40 | 6,55 | 60 | 9,83 |
| 3 sec. | 0″01 | 24 sec. | 0″07 | 43 sec. | 0″12 |
| 6 | 0,02 | 28 | 0,08 | 47 | 0,13 |
| 10 | 0,03 | 32 | 0,09 | 50 | 0,14 |
| 14 | 0,04 | 35 | 0,10 | 54 | 0,15 |
| 17 | 0,05 | 39 | 0,11 | 57 | 0,16 |
| 21 | 0,06 | | | | |

## II. En temps sidéral.

UNE DURÉE MOYENNE

s'exprime en temps sidéral,

en ajoutant pour

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 heure | 9″86 | 9h | 1′28″71 |
| 2 | 19,71 | 10 | 1.38,56 |
| 3 | 29,57 | 11 | 1.48,42 |
| 4 | 39,43 | 12 | 1.58,28 |
| 5 | 49,28 | 13 | 2. 8,13 |
| 6 | 59,14 | 14 | 2.17,99 |
| 7 | 1′ 9,00 | 15 | 2.27,85 |
| 8 | 1.18,85 | 16 | 2.37,70 |
| *1 min. à 12* | | 36 min. | 5″91 |
| *comme ci-contre.* | | 37 | 6,08 |
| 13 min. | 2″14 | 38 | 6,24 |
| 14 | 2,30 | 39 | 6,41 |
| 15 | 2,46 | 40 | 6,57 |
| 16 | 2,63 | 41 | 6,74 |
| 17 | 2,79 | 42 | 6,90 |
| 18 | 2,96 | 43 | 7,06 |
| 19 | 3,12 | 44 | 7,23 |
| 20 | 3,29 | 45 | 7,39 |
| 21 | 3,45 | 46 | 7,56 |
| 22 | 3,61 | 47 | 7,72 |
| 23 | 3,78 | 48 | 7,88 |
| 24 | 3,94 | 49 | 8,05 |
| 25 | 4,11 | 50 | 8,21 |
| 26 | 4,27 | 51 | 8,38 |
| 27 | 4,43 | 52 | 8,54 |
| 28 | 4,60 | 53 | 8,71 |
| 29 | 4,76 | 54 | 8,87 |
| 30 | 4,93 | 55 | 9,04 |
| 31 | 5,09 | 56 | 9,20 |
| 32 | 5,26 | 57 | 9,36 |
| 33 | 5,42 | 58 | 9,53 |
| 34 | 5,59 | 59 | 9,69 |
| 35 | 5,75 | 60 | 9,86 |

*Pour les ″, comme ci-contre.*

## ASCENSIONS DROITES DU SOLEIL MOYEN, *à midi moyen de Paris.*

| DATES. | ASC. DR. | N. | DATES. | ASC DR. | N. | ANS. | CORRECT. | N. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 Janv. | 18h38′ 0″03 | 0 | 0 Juill. | 6h31′ 36″54 | 27 | 1828 | +2′ 27″63 | 413 |
| 5 | 18.57.42,82 | 1 | 5 | 6 51.19,33 | 27 | 29 | +1.30,33 | 466 |
| 10 | 19.17.25,61 | 1 | 10 | 7.11. 2,12 | 28 | 30 | +0.33,03 | 519 |
| 15 | 19.37. 8,39 | 2 | 15 | 7.30.44,91 | 29 | 31 | −0.24,27 | 573 |
| 20 | 19.56.51,18 | 3 | 20 | 7.50.27,69 | 30 | 32 | +2.34,09 | 627 |
| 25 | 20.16.33,96 | 4 | 25 | 8.10.10,48 | 30 | 33 | +1.37,69 | 681 |
| 0 Févr. | 20.40.13,30 | 5 | 0 Août. | 8.33.49,81 | 31 | 1834 | +0.40,40 | 734 |
| 5 | 20.59.56,07 | 5 | 5 | 8.53.32,59 | 32 | 35 | −0.16,90 | 788 |
| 10 | 21.19.38,85 | 6 | 10 | 9.13.15,37 | 33 | 36 | +2.42,36 | 842 |
| 15 | 21.39.21,62 | 7 | 15 | 9.32.58,14 | 33 | 37 | +1.45,06 | 895 |
| 20 | 21.59. 4,39 | 7 | 20 | 9.52.40,92 | 34 | 38 | +0.47,76 | 949 |
| 25 | 22.18.47,16 | 8 | 25 | 10.12.23,69 | 35 | 39 | −0. 9,54 | 3 |
| 0 Mars. | 22.30.36,82 | 9 | 0 Sept. | 10.36. 3,01 | 36 | 1840 | +2.49,72 | 56 |
| 5 | 22.50.19,58 | 10 | 5 | 10.55.45,77 | 36 | 41 | +1.52,42 | 110 |
| 10 | 23.10. 2,35 | 11 | 10 | 11.15.28,54 | 37 | 42 | +0.55,12 | 164 |
| 15 | 23.29.45,11 | 11 | 15 | 11.35.11,30 | 38 | 43 | −0. 2,17 | 218 |
| 20 | 23.49.27,87 | 12 | 20 | 11.54.54,06 | 39 | 44 | +2.57,08 | 272 |
| 25 | 0. 9.10,64 | 13 | 25 | 12.14.36,83 | 40 | 45 | +1.59,79 | 325 |
| 0 Avril. | 0.32.41,95 | 13 | 0 Octob. | 12.34.19,59 | 40 | 1846 | +1. 2,49 | 379 |
| 5 | 0.52.32,72 | 14 | 5 | 12.54. 2,35 | 41 | 47 | +0. 5,19 | 433 |
| 10 | 1.12.15,48 | 15 | 10 | 13.13.45,12 | 42 | 48 | +3. 4,45 | 487 |
| 15 | 1.31.58,25 | 15 | 15 | 13.33.27,88 | 42 | 49 | +2. 7,15 | 540 |
| 20 | 1.51.41,02 | 16 | 20 | 13.53.10,65 | 43 | 50 | +1. 9,85 | 594 |
| 25 | 2.11.23,79 | 17 | 25 | 14.12.53,42 | 44 | 51 | +0.12,55 | 648 |
| 0 Mai. | 2.31. 6,56 | 18 | 0 Nov. | 14.36.32,75 | 45 | 1852 | +3.11,81 | 701 |
| 5 | 2.50.49,34 | 18 | 5 | 14.56.15,52 | 45 | 53 | +2.14,52 | 755 |
| 10 | 3.10.32,11 | 19 | 10 | 15.15.58,30 | 46 | 54 | +1.17,22 | 809 |
| 15 | 3.30.14,90 | 20 | 15 | 15.35.41,08 | 47 | 55 | +0.19,92 | 863 |
| 20 | 3.49.57,68 | 21 | 20 | 15.55.23,86 | 48 | 56 | +3.19,18 | 916 |
| 25 | 4. 9.40,46 | 21 | 25 | 16.15. 6,64 | 48 | 57 | +2.21,88 | 970 |
| 0 Juin. | 4.33.19,80 | 22 | 0 Déc. | 16.34.49,43 | 49 | 1 j. | +3.56,56 | |
| 5 | 4.53. 2,59 | 23 | 5 | 16.54.32,22 | 50 | 2 | 7.53,11 | |
| 10 | 5.12.45,38 | 24 | 10 | 17.14.15,01 | 51 | 3 | 11.49,67 | |
| 15 | 5.32.28,17 | 24 | 15 | 17.33.57,80 | 51 | 4 | 15.46,22 | |
| 20 | 5.52.10,96 | 25 | 20 | 17.53.40,59 | 52 | 5 | 19.42,78 | |
| 25 | 6.11.53,75 | 26 | 25 | 18.13.23,38 | 53 | 6 | 23.39,33 | |

* En janvier et février des années bissextiles, au lieu de la date proposée, on prend celle de la veille (par ex., le 22, au lieu du 23).



| N. | Æ + | LONGIT. + | OBLIQ. ± | N. | Æ − | LONGIT. − | OBLIQ. ∓ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0″00 | 0″00 | +9″16 | 500 | 0″00 | 0″00 | −9″34 |
| 10 | 0,07 | 1,04 | 9,14 | 510 | 0,07 | 1,09 | 9,32 |
| 20 | 0,14 | 2,12 | 9,09 | 520 | 0,13 | 2,22 | 9,26 |
| 30 | 0,20 | 3,16 | 9,00 | 530 | 0,19 | 3,32 | 9,17 |
| 40 | 0,27 | 4,20 | 8,88 | 540 | 0,26 | 4,40 | 9,04 |
| 50 | 0,33 | 5,22 | 8,72 | 550 | 0,32 | 5,47 | 8,87 |
| 60 | 0,40 | 6,23 | 8,53 | 560 | 0,38 | 6,51 | 8,67 |
| 70 | 0,46 | 7,20 | 8,31 | 570 | 0,44 | 7,52 | 8,43 |
| 80 | 0,52 | 8,16 | 8,06 | 580 | 0,50 | 8,51 | 8,15 |
| 90 | 0,58 | 9,08 | 7,77 | 590 | 0,56 | 9,46 | 7,85 |
| 100 | 0,63 | 9,97 | 7,46 | 600 | 0,61 | 10,37 | 7,51 |
| 110 | 0,69 | 10,82 | 7,11 | 610 | 0,66 | 11,23 | 7,14 |
| 120 | 0,74 | 11,63 | 6,74 | 620 | 0,71 | 12,05 | 6,75 |
| 130 | 0,78 | 12,40 | 6,34 | 630 | 0,76 | 12,82 | 6,33 |
| 140 | 0,83 | 13,12 | 5,91 | 640 | 0,80 | 13,53 | 5,88 |
| 150 | 0,87 | 13,81 | 5,46 | 650 | 0,84 | 14,19 | 5,41 |
| 160 | 0,91 | 14,42 | 4,99 | 660 | 0,88 | 14,79 | 4,92 |
| 170 | 0,94 | 14,98 | 4,50 | 670 | 0,92 | 15,33 | 4,41 |
| 180 | 0,97 | 15,49 | 4,00 | 680 | 0,95 | 15,81 | 3,88 |
| 190 | 0,99 | 15,94 | 3,47 | 690 | 0,98 | 16,23 | 3,34 |
| 200 | 1,01 | 16,33 | 2,93 | 700 | 1,00 | 16,57 | 2,79 |
| 210 | 1,03 | 16,65 | 2,38 | 710 | 1,02 | 16,85 | 2,22 |
| 220 | 1,04 | 16,91 | 1,82 | 720 | 1,03 | 17,07 | 1,65 |
| 230 | 1,05 | 17,11 | 1,25 | 730 | 1,05 | 17,21 | 1,07 |
| 240 | 1,06 | 17,24 | 0,67 | 740 | 1,05 | 17,29 | −0,49 |
| 250 | 1,06 | 17,30 | +0,09 | 750 | 1,06 | 17,30 | +0,09 |
| 260 | 1,06 | 17,29 | −0,49 | 760 | 1,05 | 17,24 | 0,67 |
| 270 | 1,05 | 17,21 | 1,07 | 770 | 1,05 | 17,11 | 1,25 |
| 280 | 1,04 | 17,07 | 1,65 | 780 | 1,03 | 16,91 | 1,82 |
| 290 | 1,03 | 16,85 | 2,22 | 790 | 1,02 | 16,65 | 2,38 |
| 300 | 1,01 | 16,57 | 2,79 | 800 | 1,00 | 16,33 | 2,93 |
| 310 | 0,99 | 16,23 | 3,34 | 810 | 0,98 | 15,94 | 3,47 |
| 320 | 0,97 | 15,81 | 3,88 | 820 | 0,95 | 15,49 | 4,00 |
| 330 | 0,94 | 15,33 | 4,41 | 830 | 0,91 | 14,98 | 4,50 |
| 340 | 0,91 | 14,79 | 4,92 | 840 | 0,88 | 14,42 | 4,99 |
| 350 | 0,87 | 14,19 | 5,41 | 850 | 0,84 | 13,80 | 5,46 |
| 360 | 0,83 | 13,53 | 5,88 | 860 | 0,80 | 13,12 | 5,91 |
| 370 | 0,78 | 12,82 | 6,33 | 870 | 0,76 | 12,40 | 6,34 |
| 380 | 0,74 | 12,05 | 6,75 | 880 | 0,71 | 11,63 | 6,74 |
| 390 | 0,69 | 11,23 | 7,14 | 890 | 0,66 | 10,82 | 7,11 |
| 400 | 0,63 | 10,37 | 7,51 | 900 | 0,61 | 9,97 | 7,46 |
| 410 | 0,58 | 9,46 | 7,85 | 910 | 0,56 | 9,08 | 7,77 |
| 420 | 0,52 | 8,51 | 8,15 | 920 | 0,50 | 8,16 | 8,06 |
| 430 | 0,46 | 7,52 | 8,43 | 930 | 0,44 | 7,20 | 8,31 |
| 440 | 0,40 | 6,51 | 8,67 | 940 | 0,38 | 6,23 | 8,53 |
| 450 | 0,33 | 5,47 | 8,87 | 950 | 0,32 | 5,22 | 8,72 |
| 460 | 0,27 | 4,40 | 9,04 | 960 | 0,26 | 4,20 | 8,88 |
| 470 | 0,20 | 3,32 | 9,17 | 970 | 0,19 | 3,16 | 9,00 |
| 480 | 0,14 | 2,22 | 9,26 | 980 | 0,13 | 2,12 | 9,09 |
| 490 | 0,07 | 1,09 | 9,32 | 990 | 0,07 | 1,04 | 9,14 |
| 500 | 0,00 | 0,00 | −9,34 | 1000 | 0,00 | 0,00 | +9,16 |

| DATES. | LONG. | OBLIQ. |
|---|---|---|
| Janv. | | |
| 1 | +0″47 | −0″50 |
| 11 | 0,85 | 0,40 |
| 21 | 1,12 | 0,24 |
| 31 | 1,25 | −0,06 |
| Févr. | | |
| 10 | 1,22 | +0,13 |
| 20 | 1,05 | 0,30 |
| Mars.* | | |
| 2 | 0,74 | 0,44 |
| 12 | +0,35 | 0,52 |
| 22 | −0,08 | 0,54 |
| Avril. | | |
| 1 | 0,50 | 0,50 |
| 11 | 0,85 | 0,30 |
| 21 | 1,11 | 0,25 |
| Mai. | | |
| 1 | 1,24 | +0,08 |
| 11 | 1,23 | −0,11 |
| 21 | 1,08 | 0,27 |
| 31 | 0,81 | 0,41 |
| Juin. | | |
| 10 | 0,45 | 0,51 |
| 20 | −0,05 | 0,55 |
| 30 | +0,37 | 0,52 |
| Juillet. | | |
| 10 | 0,74 | 0,44 |
| 20 | 1,03 | 0,31 |
| 30 | 1,21 | −0,15 |
| Août. | | |
| 9 | 1,25 | +0,04 |
| 19 | 1,16 | 0,3[illegible] |
| 29 | 0,93 | 0,36 |
| Sept. | | |
| 8 | 0,60 | 0,47 |
| 18 | +0,20 | 0,54 |
| 28 | −0,23 | 0,54 |
| Octob | | |
| 8 | 0,63 | 0,47 |
| 18 | 0,96 | 0,35 |
| 28 | 1,18 | 0,19 |
| Nov. | | |
| 7 | 1,25 | +0,00 |
| 17 | 1,18 | −0,19 |
| 27 | 0,96 | 0,36 |
| Déc. | | |
| 7 | 0,6[illegible] | 0,47 |
| 17 | −0,[illegible] | 0,54 |
| 27 | +0,[illegible] | 0,53 |
| 37 | +0,66 | −0,47 |

* Dans les années bissextiles, il faut prendre la date de la veille du jour proposé, à partir du 1er mars jusqu'à la fin de l'année.

| dist. zén. | log. réfr. | diff. p.10' | dist. zén. | log. réfr. | diff. p.10' | dist. zén. | log. réfr. | diff. p.10' | dist. zénit. | log. réfr. | diff. p.10' | dist. zén. | log. réfr. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 1° | 0.0242 | 502 | 39° | 1.6903 | 25,7 | 58° | 1.9852 | 28,0 | 70° | 2.2176 | 38,8 | 78° | 2.4448 |
| 2 | .3253 | 294 | 30 | .6980 | 25,7 | 20 | .9908 | 28,1 | 10 | .2216 | 39,0 | 10 | .4507 |
| 3 | .5016 | 209 | 40 | .7057 | 25,6 | 40 | .9965 | 28,3 | 20 | .2255 | 39,3 | 20 | .4567 |
| 4 | .6269 | 162 | 30 | .7134 | 25,5 | 59 | 2.0021 | 28,5 | 30 | .2294 | 39,6 | 30 | .4628 |
| 5 | .7242 | 133 | 41 | .7210 | 25,4 | 20 | .0078 | 28,7 | 40 | .2334 | 39,8 | 40 | .4691 |
| 6 | .8039 | 113 | 30 | .7287 | 25,4 | 40 | .0136 | 28,9 | 50 | .2374 | 40,1 | 50 | .4753 |
| 7 | 0.8714 | 97,8 | 42 | 1.7363 | 25,3 | 60 | 2.0194 | 29,0 | 71 | 2.2414 | 40,4 | 79 | 2.4817 |
| 8 | .9300 | 86,5 | 30 | .7439 | 25,3 | 15 | .0237 | 29,2 | 10 | .2454 | 40,7 | 10 | .4882 |
| 9 | .9820 | 77,7 | 43 | .7515 | 25,3 | 30 | .0281 | 29,4 | 20 | .2495 | 41,0 | 20 | .4947 |
| 10 | 1.0286 | 70,5 | 30 | .7591 | 25,2 | 45 | .0325 | 29,5 | 30 | .2536 | 41,3 | 30 | .5014 |
| 11 | .0709 | 64,7 | 44 | .7666 | 25,2 | 61 | .0369 | 29,6 | 40 | .2577 | 41,6 | 40 | .5080 |
| 12 | .1097 | 59,8 | 30 | .7742 | 25,2 | 15 | .0413 | 29,8 | 50 | .2620 | 41,9 | 50 | .5148 |
| 13 | 1.1456 | 55,7 | 45 | 1.7818 | 25,2 | 30 | 2.0458 | 30,0 | 72 | 2.2661 | 42,2 | 80 | 2.521 |
| 14 | .1790 | 52,1 | 30 | .7893 | 25,2 | 45 | .0503 | 30,2 | 10 | .2703 | 42,6 | 10 | .528 |
| 15 | .2103 | 49,1 | 46 | .7969 | 25,2 | 62 | .0549 | 30,3 | 20 | .2746 | 42,9 | 20 | .535 |
| 16 | .2397 | 46,4 | 30 | .8045 | 25,2 | 15 | .0594 | 30,5 | 30 | .2790 | 43,2 | 30 | .543 |
| 17 | .2675 | 44,1 | 47 | .8120 | 25,3 | 30 | .0640 | 30,7 | 40 | .2833 | 43,6 | 40 | .550 |
| 18 | .2940 | 42,0 | 30 | .8196 | 25,3 | 45 | .0686 | 30,9 | 50 | .2876 | 43,9 | 50 | .557 |
| 19 | 1.3192 | 40,1 | 48 | 1.8272 | 25,3 | 63 | 2.0732 | 31,0 | 73 | 2.2920 | 44,3 | 81 | 2.565 |
| 20 | .3432 | 38,5 | 30 | .8348 | 25,4 | 15 | .0779 | 31,2 | 10 | .2965 | 44,7 | 10 | .572 |
| 21 | .3663 | 37,0 | 49 | .8424 | 25,5 | 30 | .0826 | 31,4 | 20 | .3009 | 45,0 | 20 | .580 |
| 22 | .3886 | 35,7 | 20 | .8475 | 25,5 | 45 | .0873 | 31,6 | 30 | .3054 | 45,4 | 30 | .588 |
| 23 | .4100 | 34,5 | 40 | .8526 | 25,6 | 64 | .0920 | 31,8 | 40 | .3100 | 45,8 | 40 | .596 |
| 24 | .4307 | 33,5 | 50 | .8577 | 25,6 | 15 | .0968 | 32,1 | 50 | .3145 | 46,2 | 50 | .604 |
| 25 | 1.4508 | 32,5 | 20 | 1.8628 | 25,7 | 30 | 2.1016 | 32,3 | 74 | 2.3192 | 46,6 | 82 | 2.612 |
| 26 | .4703 | 31,6 | 40 | .8680 | 25,7 | 45 | .1065 | 32,6 | 10 | .3239 | 47,0 | 10 | .620 |
| 27 | .4893 | 30,8 | 51 | .8731 | 25,7 | 65 | .1114 | 32,8 | 20 | .3287 | 47,4 | 20 | .629 |
| 28 | .5078 | 30,0 | 20 | .8783 | 25,8 | 15 | .1162 | 33,0 | 30 | .3335 | 48,0 | 30 | .637 |
| 29 | .5258 | 29,5 | 40 | .8835 | 25,9 | 30 | .1212 | 33,3 | 40 | .3382 | 48,3 | 40 | .646 |
| 30 | .5435 | 29,0 | 52 | .8886 | 26,0 | 45 | .1262 | 33,5 | 50 | .3431 | 48,7 | 50 | .655 |
| 30 | 1.5522 | 28,7 | 20 | 1.8938 | 26,0 | 66 | 2.1312 | 33,8 | 75 | 2.3479 | 49,2 | 83 | 2.664 |
| 31 | .5608 | 28,4 | 40 | .8990 | 26,1 | 15 | .1363 | 34,0 | 10 | .3529 | 50,0 | 10 | .674 |
| 30 | .5694 | 28,2 | 53 | .9043 | 26,2 | 30 | .1414 | 34,3 | 20 | .3579 | 50,1 | 20 | .684 |
| 32 | .5777 | 28,0 | 20 | .9095 | 26,3 | 45 | .1465 | 34,6 | 30 | .3629 | 50,6 | 30 | .694 |
| 30 | .5862 | 27,8 | 40 | .9148 | 26,4 | 67 | .1517 | 34,9 | 40 | .3679 | 51,1 | 40 | .704 |
| 33 | .5946 | 27,5 | 54 | .9201 | 26,5 | 15 | .1569 | 35,2 | 50 | .3730 | 51,6 | 50 | .714 |
| 30 | 1.6028 | 27,3 | 20 | 1.9254 | 26,6 | 30 | 2.1622 | 35,6 | 76 | 2.3782 | 52,1 | 84 | 2.724 |
| 34 | .6110 | 27,1 | 40 | .9307 | 26,7 | 45 | .1675 | 35,8 | 10 | .3834 | 52,7 | 10 | .734 |
| 30 | .6191 | 26,9 | 55 | .9360 | 26,8 | 68 | .1729 | 36,0 | 20 | .3886 | 53,2 | 20 | .745 |
| 35 | .6272 | 26,8 | 20 | .9414 | 27,0 | 15 | .1783 | 36,4 | 30 | .3940 | 53,8 | 30 | .756 |
| 30 | .6352 | 26,6 | 40 | .9467 | 27,1 | 30 | .1837 | 36,8 | 40 | .3993 | 54,3 | 40 | .767 |
| 36 | .6432 | 26,4 | 56 | .9522 | 27,2 | 45 | .1892 | 37,1 | 50 | .4049 | 54,9 | 50 | .779 |
| 30 | 1.6512 | 26,3 | 20 | 1.9576 | 27,3 | 69 | 2.1978 | 37,3 | 77 | 2.4104 | 55,5 | 85 | 2.79 |
| 37 | .6591 | 26,5 | 40 | .9631 | 27,6 | 10 | .1985 | 37,5 | 10 | .4159 | 56,1 | 10 | .80 |
| 30 | .6669 | 26,0 | 57 | .9686 | 27,6 | 20 | .2023 | 37,8 | 20 | .4216 | 56,7 | 20 | .815 |
| 38 | .6748 | 25,9 | 20 | .9741 | 27,7 | 30 | .2061 | 38,0 | 30 | .4273 | 57,3 | 30 | .82 |
| 30 | .6825 | 25,8 | 40 | .9796 | 27,9 | 40 | .2099 | 38,3 | 40 | .4330 | 58,0 | 40 | .84 |
| 39 | 1.6903 | 25,7 | 58 | 1.9852 | 28,0 | 50 | 2.213[illegible] | 38,[illegible] | 50 | .4388 | 58,7 | 50 | 2.85 |

| dist. zénit. | log. réfract. | diff. p. 1'. |
|---|---|---|
| | 2.8670 | 13,0 |
| 10 | .8808 | 13,2 |
| 20 | .8950 | 13,6 |
| 30 | .9095 | 13,8 |
| 40 | .9244 | 14,2 |
| 50 | .9397 | 14,4 |
| | 2.9554 | 14,8 |
| 10 | 2.9715 | 15,1 |
| 20 | 2.9881 | 15,5 |
| 30 | 3 0051 | 15,8 |
| 40 | .0225 | 16,1 |
| 50 | .0406 | 16,5 |
| | 3.0591 | 17,0 |
| 10 | .0781 | 17,3 |
| 20 | .0977 | 17,5 |
| 30 | .1178 | 18,2 |
| 40 | .1385 | 18,3 |
| 50 | .1597 | 18,6 |
| | 3.1815 | 19,0 |
| 10 | .2039 | 19,4 |
| 20 | .2269 | 19,7 |
| 30 | .2503 | 19,8 |
| 40 | .2743 | 20,2 |
| 50 | .2988 | 20,6 |
| | 3.3235 | 20,7 |
| 10 | .3484 | 20,9 |
| 20 | .3755 | 21,0 |
| 30 | .3988 | |

TABLE SUPPLÉMENTAIRE.

| dist. zén. | cor. — | dist. zén. | cor. — |
|---|---|---|---|
| …0° | 0″01 | 75° | 0″16 |
| …7 | 0,01 | 76 | 0,20 |
| …8 | 0,02 | 77 | 0,24 |
| …4 | 0,03 | 78 | 0,31 |
| …8 | 0,05 | 79 | 0,40 |
| …9 | 0,06 | 80 | 0,54 |
| 70 | 0,07 | 81 | 0,73 |
| 71 | 0,08 | 82 | 1,05 |
| 72 | 0,09 | 83 | 1,56 |
| 73 | 0,11 | 84 | 2,48 |
| …4 | 0,13 | 85 | 4,28 |

CORRECTION BAROMÉTRIQUE.

| milli. | log. cor. | milli. | log. cor. |
|---|---|---|---|
| 725 | $\bar{1}$.9795 | 760 | 0.0000 |
| 26 | 9801 | 61 | 006 |
| 27 | 807 | 62 | 011 |
| 28 | 813 | 63 | 017 |
| 29 | 819 | 64 | 023 |
| 730 | $\bar{1}$.9825 | 765 | 0.0029 |
| 31 | 831 | 66 | 034 |
| 32 | 837 | 67 | 040 |
| 33 | 843 | 68 | 046 |
| 34 | 849 | 69 | 051 |
| 735 | $\bar{1}$.9855 | 770 | 0.0057 |
| 36 | 861 | 71 | 062 |
| 37 | 867 | 72 | 068 |
| 38 | 872 | 73 | 074 |
| 39 | 878 | 74 | 079 |
| 740 | $\bar{1}$.9884 | 775 | 0.0085 |
| 41 | 890 | 76 | 091 |
| 42 | 896 | 77 | 096 |
| 43 | 902 | 78 | 102 |
| 44 | 908 | 79 | 107 |
| 745 | $\bar{1}$.9913 | 780 | 0.0113 |
| 46 | 919 | 81 | 118 |
| 47 | 925 | 82 | 124 |
| 48 | 931 | 83 | 130 |
| 49 | 937 | 84 | 135 |
| 750 | $\bar{1}$.9943 | 785 | 0.0141 |
| 51 | 948 | 86 | 146 |
| 52 | 954 | 87 | 152 |
| 53 | 960 | 88 | 157 |
| 54 | 966 | 89 | 163 |
| 755 | 971 | 790 | 0.0168 |
| 56 | 977 | 91 | 174 |
| 57 | 983 | 92 | 179 |
| 58 | 989 | 93 | 185 |
| 59 | 994 | 94 | 0.0190 |

CORRECTION THERMOMÉTRIQUE.

| D | log. cor. | D | log. cor. |
|---|---|---|---|
| —10° | 0.0174 | 16° | $\bar{1}$.9735 |
| 9 | 156 | 17 | 718 |
| 8 | 139 | 18 | 702 |
| 7 | 221 | 19 | 686 |
| 6 | 104 | 20 | 670 |
| — 5 | 0.0086 | 21 | $\bar{1}$.9654 |
| 4 | 069 | 22 | 639 |
| 3 | 052 | 23 | 623 |
| 2 | 034 | 24 | 607 |
| — 1 | 017 | 25 | 591 |
| 0 | 0.0000 | 26 | $\bar{1}$.9576 |
| + 1 | $\bar{1}$.9983 | 27 | 560 |
| 2 | 966 | 28 | 545 |
| 3 | 949 | 29 | 529 |
| 4 | 932 | 30 | 514 |
| 5 | $\bar{1}$.9915 | 31 | $\bar{1}$.9498 |
| 6 | 899 | 32 | 483 |
| 7 | 882 | 33 | 468 |
| 8 | 865 | 34 | 452 |
| 9 | 849 | 35 | 437 |
| 10 | $\bar{1}$.9832 | 36 | $\bar{1}$.9422 |
| 11 | 816 | 37 | 407 |
| 12 | 800 | 38 | 392 |
| 13 | 783 | 39 | 377 |
| 14 | 767 | 40 | 362 |
| 15 | $\bar{1}$.9751 | 41 | $\bar{1}$.9347 |

| BAROM. | | THERM. | |
|---|---|---|---|
| 0,1$^{mm}$ | + 1 | 0°1 | — 2 |
| 0,2 | + 1 | 0,2 | — 3 |
| 0,3 | + 2 | 0,3 | — 5 |
| 0,4 | + 2 | 0,4 | — 6 |
| 0,5 | + 3 | 0,5 | — 8 |
| 0,6 | + 3 | 0,6 | — 10 |
| 0,7 | + 4 | 0,7 | — 11 |
| 0,8 | + 4 | 0,8 | — 13 |
| 0,9 | + [illegible] | 0,9 | — 15 |

| ÉTOILES. | Asc. droite en tems. | Variat. annu. | ABERRATION. Argum. | ABERRATION. maxi. | NUTATION. Argum. | NUTATION. Maxi. |
|---|---|---|---|---|---|---|
| γ *Algenib*... 2.3 | 0h 4′ 29″36 | + 3,075 | 8s 28° 47′ | 0.1087 | 6s 8° 24′ | 0.0300 |
| α *Polaire*... 2.3 | 0.59.30,76 | 15,478 | 8.13.51 | 1.6526 | 8.16. 7 | 1.3427 |
| β Andromède 2 | 1. 0.13,67 | 3,309 | 8.13.39 | 0.1830 | 6.19.53 | 0.0838 |
| α *Acharnar*. 1 | 1.31.22,04 | 2,235 | 8. 5.20 | 0.3801 | 4.10.12 | 0.0775 |
| α Bélier.... 3 | 1.57.36,12 | 3,342 | 7.28.26 | 0.1397 | 6.11. 1 | 0.0695 |
| α Baleine..... 2.3 | 2.53.23,90 | 3,123 | 7.14.11 | 0.1149 | 6. 1.26 | 0.0322 |
| α Persée...... 2.3 | 3.12.13,33 | 4,221 | 7. 9.30 | 0.3020 | 6.18.13 | 0.1849 |
| *Aldébaran*. 1 | 4.26.10,09 | 3,423 | 6.21.43 | 0.1447 | 6. 3.27 | 0.0726 |
| *La Chèvre*. 1 | 5. 4. 8,31 | 4,402 | 6.12.51 | 0.2875 | 6. 5.46 | 0.1830 |
| β *Rigel*..... 1 | 5. 6.22,13 | 2,876 | 6.12.20 | 0.1355 | 5.28.47 | $\bar{1}$.9966 |
| β Taureau... 2 | 5.15.32,97 | 3,779 | 6.10.13 | 0.1873 | 6. 2.52 | 0.1018 |
| γ Orion..... 2 | 5.16. 1,00 | 3,210 | 6.10. 6 | 0.1340 | 6. 0.40 | 0.0441 |
| α Colombe... 2 | 5.33.29,48 | 2,167 | 6. 6. 5 | 0.2145 | 5.26.18 | $\bar{1}$.8750 |
| α Orion..... 1 | 5.45.58,18 | 3,241 | 6. 3.13 | 0.1361 | 6. 0.15 | 0.0481 |
| *Canopus*... 1 | 6.20.10,58 | 1,327 | 5.25.22 | 0.3491 | 6. 8.46 | $\bar{1}$.6679 |
| *Sirius*..... 1 | 6.37.39,27 | 2,643 | 5.21.21 | 0.1501 | 6. 1.51 | $\bar{1}$.9658 |
| α *Castor*.... 2.3 | 7.23.44,29 | 3,856 | 5.10.40 | 0.2010 | 5.24. 2 | 0.1257 |
| α *Procyon*... 1.2 | 7.30.23,85 | 3,143 | 5. 9. 6 | 0.1297 | 5.28.47 | 0.0414 |
| β *Pollux*.... 2 | 7.34.53,78 | 3,682 | 5. 8. 2 | 0.1829 | 5.24. 2 | 0.1114 |
| α Hydre..... 2 | 9.19.13,69 | 2,948 | 4.12.39 | 0.1158 | 6. 3.41 | 0.0081 |
| α *Regulus*... 1 | 9.59.18,29 | 3,221 | 4. 2.22 | 0.1162 | 5.23.47 | 0.0480 |
| α Gr. Ourse.. 1.2 | 10.53. 9,76 | 3,811 | 3.18. 7 | 0.4366 | 4.18.53 | 0.2407 |
| β Lion...... 2.3 | 11.40.22,77 | 3,064 | 3. 5.21 | 0.1117 | 5.20.56 | 0.0344 |
| β Vierge..... 3.4 | 11.41.50,18 | 3,124 | 3. 4.57 | 0.0958 | 5.28.25 | 0.0253 |
| γ Gr. Ourse.. 2 | 11.44.50,83 | 3,192 | 3. 4. 8 | 0.3229 | 4.21.46 | 0.1465 |
| α2 Croix A... 2 | 12.17.11,10 | 3,258 | 2.25.19 | 0.4261 | 7.16. 2 | 0.2089 |
| α *Epi*....... 1 | 13.16.14,71 | 3,147 | 2. 9.22 | 0.1066 | 6. 5.51 | 0.0154 |
| θ Centaure... 2 | 13.56.43,09 | 3,491 | 1.28.40 | 0.1942 | 6.17.31 | 0.1062 |
| α Dragon..... 3.4 | 13.59.46,57 | 1,625 | 1.27.53 | 0.4824 | 3.25.50 | 0.1090 |
| *Arcturus*... 1 | 14. 7.54,29 | 2,731 | 1.25.46 | 0.1336 | 5.18.49 | $\bar{1}$.9937 |
| α2 Centaure.. 1 | 14.28.13,66 | 4,470 | 1.20.32 | 0.4123 | 6.29. 6 | 0.2460 |
| α2 Balance... 3 | 14.41.29,30 | + 3,305 | 1.17.26 | 0.1273 | 6. 6.29 | 0.0593 |
| β Pet. Ourse. 3 | 14.51.17,30 | − 0,286 | 1.14.42 | 0.6961 | 2.26.45 | 0.2235 |
| γ2 Pet. Ourse. 3.4 | 15.21. 3,12 | − 0,179 | 1. 7.20 | 0.6386 | 2.27. 7 | 0.0960 |
| α Cour. Bor.. 2 | 15.27.29,10 | + 2,526 | 1. 5.45 | 0.1704 | 5.17.18 | $\bar{1}$.9510 |
| α Serpent.... 2.3 | 15.35.53,90 | 2,936 | 1. 3.43 | 0.1237 | 5.27.30 | 0.0058 |
| β Scorpion.... 2 | 15.55.33,99 | 3,469 | 0.28.58 | 0.1485 | 6. 5.20 | 0.0795 |
| α *Antarès*... 1 | 16.19. 0,03 | 3,659 | 0.23.24 | 0.1728 | 6. 5.49 | 0.1029 |
| α Hercule..... 3.4 | 17. 6.53,56 | 2,729 | 0.12.13 | 0.1451 | 5.27.45 | $\bar{1}$.9742 |
| α Ophiucus... 2 | 17.27. 2,43 | + 2,770 | 0. 7.34 | 0.1427 | 5.28.48 | $\bar{1}$.9803 |
| δ Pet. Ourse. 3 | 18.27. 5,13 | −19,167 | 11.23.47 | 1.3571 | 11.19.31 | 0.8257 |
| *Wega*..... 1 | 18.31.10,77 | + 2,010 | 11.22.50 | 0.2393 | 6. 5.31 | $\bar{1}$.8436 |
| *Ataïr*..... 1.2 | 19.42.29,19 | 2,924 | 11. 6.15 | 0.1309 | 6. 2.16 | $\bar{1}$.9988 |
| α2 Capricorne. 3 | 20. 8.36,98 | 3,331 | 11. 0. 2 | 0.1341 | 5.26.12 | 0.0609 |
| α Cygne..... 1 | 20.35.37,89 | 2,040 | 10.23.29 | 0.2668 | 6.28.32 | $\bar{1}$.9042 |
| α Verseau.... 3 | 21.57. 2,88 | 3,082 | 10. 2.57 | 0.1057 | 5.29.26 | 0.0264 |
| *Fomalhaut* 1 | 22.48.14,34 | 3,311 | 9.19.26 | 0.1638 | 5.13. 8 | 0.0765 |
| β *Scheat*.... 2 | 22.55.32,37 | 2,878 | 9.17.29 | 0.1491 | 6.17. 2 | 0.0162 |
| α *Markab*... 2 | 22.56.17,71 | 2,975 | 9.17.17 | 0.1120 | 6. 8.23 | 0.0157 |
| α Andromède. 1 | 23.59.36,59 | 3,067 | 9. 0. 6 | 0.1495 | [illegible] | 0.0444 |

| DÉCLINAISON. | Variat. annu. | ABERRATION. | | NUTATION. | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | Argument. | Maxi. | Argument. | Maxi. |
| + 14°14′ 18″11 | + 20,039 | 7ˢ 27° 12′ | 0.9657 | 5ˢ 28° 30′ | 0.8381 |
| + 88.24. 8,82 | + 19,371 | 5.16 57 | 1.3052 | 5.10.22 | 0.8493 |
| + 34.43. 3,68 | + 19,355 | 6.19.12 | 1.0740 | 5.10. 8 | 0.8496 |
| − 58. 6.12,12 | + 18,471 | 10.26.46 | 1.2798 | 5. 0.31 | 0.8629 |
| + 22.39.18,46 | + 17,461 | 7. 0. 2 | 0.8972 | 4.22.53 | 0,8765 |
| + 3.25. 5,05 | + 14,575 | 8.23. 8 | 0.8678 | 4. 8.16 | 0.9078 |
| + 49.14.56,88 | + 13,397 | 5. 3. 5 | 1.0630 | 4. 3.47 | 0.9179 |
| + 16. 9.40,31 | + 7,979 | 7.23.12 | 0.5760 | 3.17.54 | 0.9502 |
| + 45.48.52,30 | + 4,837 | 3.25.37 | 0.9112 | 3.10.29 | 0.9605 |
| − 8.24.14,69 | + 4,647 | 9. 3.42 | 1.0300 | 3.10. 4 | 0.9608 |
| + 28.27.17,96 | + 3,863 | 4.19.21 | 0.3917 | 3. 8.19 | 0.9626 |
| + 6.11.17,10 | + 3,823 | 8.26. 4 | 0.7851 | 3. 8.14 | 0,9626 |
| − 34.10.10,19 | + 2,313 | 9. 4.24 | 1.2348 | 3. 4.57 | 0.9648 |
| + 7.22. 4,13 | + 1,226 | 8.28.23 | 0.7521 | 3. 2.37 | 0.9657 |
| − 52.36.27,50 | − 1,762 | 8.25.53 | 1.2060 | 2 26.15 | 0.9657 |
| − 16.29.18,74 | − 4,418 | 8.25.51 | 1.1152 | 2.22.58 | 0,9636 |
| + 32.15.10,87 | − 7,161 | 1. 2.17 | 0.6620 | 2.14. 6 | 0.9535 |
| + 5.39.19,89 | − 8,682 | 9. 6.54 | 0.8071 | 2.12.47 | 0.9513 |
| + 28.25.45,27 | − 8,064 | 0.14.32 | 0.6052 | 2.11.53 | 0.9499 |
| − 7.55.30,78 | − 15,310 | 8.17.31 | 0.9967 | 1.18.37 | 0.9007 |
| + 12.47.44,83 | − 17,329 | 10. 3.47 | 0,8457 | 1. 7.59 | 0.8782 |
| + 62.39.59,94 | − 19,196 | 0. 3.28 | 1.2394 | 0.21.57 | 0.8520 |
| + 15.31.24,30 | − 19,969 | 10. 6.20 | 0.9621 | 0. 6.35 | 0.8393 |
| + 2.43.22,36 | − 19,980 | 9. 6.51 | 0.9075 | 0. 6. 5 | 0.8390 |
| + 54.38.21,73 | − 19,999 | 11.17.28 | 1.2298 | 0. 5. 5 | 0.8388 |
| − 62. 9.28,00 | − 19,986 | 6. 8. 5 | 1.2585 | 11.24.14 | 0.8390 |
| − 10.16.13,13 | − 18,944 | 8. 3.31 | 0.8862 | 11. 5. 6 | 0.8559 |
| − 35.31.46,94 | − 17,499 | 6. 7.12 | 1.0176 | 10.23. 8 | 0.8760 |
| + 65.11.25,82 | − 17,367 | 10.23.28 | 1.2995 | 10.22.16 | 0.8777 |
| + 20. 4.19,19 | − 18,962 | 9.28.18 | 1.0974 | 10.20. 1 | 0.8822 |
| − 60.27.31,12 | − 15,995 | 5. 7.54 | 1.1820 | 10.14.36 | 0.8937 |
| − 15.19.33,73 | − 15,270 | 7.18.24 | 0.6923 | 10.11.28 | 0.9006 |
| + 74.50.55,87 | − 14,701 | 10.15. 5 | 1.3087 | 10. 8.47 | 0.9066 |
| + 72.26.22,22 | − 12,813 | 10. 7.33 | 1,3087 | 10. 1.45 | 0.9225 |
| + 27.17.35,27 | − 12,375 | 9.22.28 | 1.1785 | 10. 0.18 | 0.9257 |
| + 6.58. 1,03 | − 11,788 | 9. 8.22 | 0.9994 | 9.28.26 | 0.9298 |
| − 19.19.53,52 | − 10,355 | 7. 4 4 | 0.6237 | 9.24.12 | 0.9386 |
| + 26. 2.44,15 | − 8,550 | 5.27.59 | 0.5816 | 9.19.21 | 0.9478 |
| + 14.35.31,51 | − 4,603 | 9. 5.25 | 1.0962 | 9. 9.58 | 0.9610 |
| + 12.41.31,36 | − 2,872 | 9. 3. 4 | 1.0786 | 9. 6. 9 | 0.9642 |
| + 86.35. 5,70 | + 2,363 | 8.22.49 | 1.2821 | 8.24.57 | 0.9650 |
| + 38.37.50,34 | + 2,718 | 8.24.29 | 1.2545 | 8.24.10 | 0.9644 |
| + 8.25.37,10 | + 8,667 | 8.22.59 | 1.0237 | 8.10.21 | 0.9472 |
| − 13. 3.49,43 | + 10,667 | 9.29.33 | 0.6961 | 8. 4.55 | 0.9368 |
| + 44.40.37,75 | + 12,588 | 8. 0.39 | 1.2634 | 7.29. 0 | 0.9242 |
| − 1. 8.28,60 | + 17,227 | 9. 2.31 | 0.8988 | 7. 8.37 | 0.8794 |
| − 30.31.13,88 | + 19,668 | 11. 7.34 | 1.0271 | 6.23.30 | 0.8540 |
| + 27. 9.40,11 | + 19,255 | 7.17. 0 | 1.1171 | 6.21.13. | 0.8511 |
| + 14.17.36,66 | + 19,273 | 8. 2. 5 | 1.0138 | 6.20.58 | 0.8508 |
| + 28. 9. 6,65 | + 20,043 | 7. 6.42 | 1.0785 | 6. 9. 8 | [illegible] |

## VIII. Fraction de l'année correspondante à chaque date.

| DATES. | FRACT. | DATES. | FRACT. | DATES. | DATES. |
|---|---|---|---|---|---|
| Janvier. 1 | 0,000 | Mai. 1 | 0,329 | Septemb. 1 | 0,666 |
| 4 | 008 | 2 | 332 | 2 | 0,668 |
| 8 | 019 | 4 | 337 | 4 | 674 |
| 12 | 030 | 8 | 348 | 6 | 679 |
| 16 | 041 | 10 | 353 | 10 | 690 |
| 18 | 046 | 14 | 364 | 12 | 696 |
| 21 | 054 | 18 | 375 | 15 | 704 |
| 23 | 060 | 21 | 383 | 18 | 712 |
| 26 | 068 | 24 | 392 | 22 | 723 |
| 28 | 074 | 26 | 397 | 26 | 734 |
| 30 | 079 | 30 | 408 | 30 | 745 |
| Février. 2 | 0,088 | Juin. 2 | 0,416 | Octobre. 2 | 0,751 |
| 4 | 093 | 4 | 422 | 4 | 756 |
| 8 | 104 | 6 | 427 | 6 | 760 |
| 10 | 109 | 8 | 433 | 9 | 770 |
| 13 | 117 | 10 | 438 | 12 | 778 |
| 16 | 125 | 14 | 449 | 14 | 784 |
| 18 | 131 | 18 | 461 | 18 | 795 |
| 20 | 137 | 20 | 465 | 20 | 800 |
| 22 | 142 | 23 | 473 | 22 | 805 |
| 26 | 153 | 25 | 479 | 24 | 811 |
| | | 28 | 487 | 26 | 816 |
| | | | | 30 | 827 |
| Mars. 2 | 0,164 | Juillet. 1 | 0,496 | Novemb. 1 | 0,833 |
| 4 | 170 | 4 | 504 | 4 | 841 |
| 6 | 175 | 6 | 509 | 6 | 847 |
| 8 | 181 | 8 | 515 | 10 | 858 |
| 10 | 186 | 10 | 520 | 14 | 868 |
| 14 | 197 | 14 | 531 | 16 | 874 |
| 16 | 202 | 16 | 537 | 18 | 879 |
| 18 | 208 | 18 | 542 | 21 | 888 |
| 22 | 219 | 22 | 553 | 24 | 896 |
| 25 | 227 | 26 | 564 | 26 | 901 |
| 27 | 233 | 28 | 570 | 29 | 910 |
| 30 | 241 | 30 | 575 | | |
| Avril. 1 | 0,247 | Août. 1 | 0,581 | Décemb. 1 | 0,915 |
| 3 | 252 | 3 | 586 | 4 | 923 |
| 6 | 260 | 6 | 594 | 6 | 929 |
| 9 | 268 | 9 | 602 | 8 | 934 |
| 11 | 274 | 12 | 610 | 10 | 940 |
| 14 | 282 | 14 | 616 | 12 | 945 |
| 17 | 291 | 16 | 622 | 16 | 956 |
| 19 | 296 | 18 | 627 | 18 | 962 |
| 22 | 304 | 22 | 638 | 20 | 967 |
| 25 | 312 | 24 | 644 | 22 | 973 |
| 28 | 320 | 26 | 649 | 25 | 981 |
| 30 | 326 | 29 | 658 | 27 | 986 |
| | | | | 30 | 995 |

Pour les dates intermédiaires, ajoutez 0,003 pour 1 jour, 0,006 pour 2 jours, 0,009 pour 3 jours.

## IX. Augmentation du demi-diamètre horizontal de la Lune.

| Distance zénithale. | Hauteur. | Demi-diamètre horizontal. | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | | 14′ 30″ | 15′ 0″ | 15′ 30″ | 16′ 0″ | 16′ 30″ | 17′ 0″ |
| 90° | 0° | 0″10 | 0″12 | 0″13 | 0″14 | 0″15 | 0″17 |
| 88 | 2 | 0,58 | 0,62 | 0,66 | 0,71 | 0,76 | 0,81 |
| 86 | 4 | 1,05 | 1,12 | 1,20 | 1,28 | 1,37 | 1,46 |
| 84 | 6 | 1,51 | 1,62 | 1,74 | 1,86 | 1,98 | 2,10 |
| 82 | 8 | 1,98 | 2,12 | 2,27 | 2,42 | 2,58 | 2,75 |
| 80 | 10 | 2,44 | 2,62 | 2,80 | 2,99 | 3,18 | 3,39 |
| 78 | 12 | 2,90 | 3,11 | 3,33 | 3,56 | 3,78 | 4,02 |
| 76 | 14 | 3,36 | 3,61 | 3,86 | 4,11 | 4,37 | 4,66 |
| 74 | 16 | 3,82 | 4,09 | 4,38 | 4,67 | 4,96 | 5,28 |
| 72 | 18 | 4,27 | 4,58 | 4,89 | 5,22 | 5,54 | 5,90 |
| 69 | 21 | 4,94 | 5,29 | 5,66 | 6,03 | 6,41 | 6,82 |
| 66 | 24 | 5,60 | 5,99 | 6,41 | 6,83 | 7,26 | 7,72 |
| 63 | 27 | 6,24 | 6,68 | 7,14 | 7,61 | 8,10 | 8,61 |
| 60 | 30 | 6,86 | 7,35 | 7,85 | 8,37 | 8,93 | 9,47 |
| 57 | 33 | 7,47 | 7,99 | 8,55 | 9,11 | 9,70 | 10,30 |
| 54 | 36 | 8,06 | 8,62 | 9,22 | 9,83 | 10,46 | 11,11 |
| 51 | 39 | 8,62 | 9,22 | 9,86 | 10,51 | 11,19 | 11,88 |
| 48 | 42 | 9,16 | 9,80 | 10,48 | 11,17 | 11,89 | 12,63 |
| 45 | 45 | 9,68 | 10,36 | 11,07 | 11,80 | 12,56 | 13,34 |
| 42 | 48 | 10,16 | 10,88 | 11,63 | 12,40 | 13,20 | 14,02 |
| 39 | 51 | 10,63 | 11,38 | 12,16 | 12,97 | 13,80 | 14,66 |
| 36 | 54 | 11,07 | 11,84 | 12,66 | 13,50 | 14,36 | 15,25 |
| 33 | 57 | 11,47 | 12,27 | 13,12 | 13,99 | 14,88 | 15,81 |
| 30 | 60 | 11,84 | 12,67 | 13,55 | 14,44 | 15,37 | 16,32 |
| 27 | 63 | 12,19 | 13,04 | 13,94 | 14,86 | 15,81 | 16,79 |
| 24 | 66 | 12,49 | 13,37 | 14,29 | 15,24 | 16,21 | 17,22 |
| 21 | 69 | 12,77 | 13,66 | 14,60 | 15,57 | 16,56 | 17,60 |
| 18 | 72 | 13,00 | 13,92 | 14,88 | 15,86 | 16,88 | 17,92 |
| 15 | 75 | 13,21 | 14,13 | 15,11 | 16,11 | 17,13 | 18,20 |
| 12 | 78 | 13,38 | 14,31 | 15,30 | 16,31 | 17,36 | 18,43 |
| 9 | 81 | 13,51 | 14,45 | 15,45 | 16,47 | 17,63 | 18,61 |
| 6 | 84 | 13,60 | 14,55 | 15,56 | 16,59 | 17,65 | 18,74 |
| 3 | 87 | 13,66 | 14,61 | 15,62 | 16,65 | 17,72 | 18,82 |
| 0 | 90 | 13,67 | 14,63 | 15,64 | 16,68 | 17,74 | 18,85 |

| Séc. | 0′ | 1′ | 2′ | 3′ | 4′ | 5′ | 6′ | 7′ | 8′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0"00 | 1"96 | 7"85 | 17"67 | 31"41 | 49"09 | 70"68 | 96"20 | 125"65 |
| 1 | 0,00 | 2,03 | 7,99 | 17,87 | 31,68 | 49,41 | 71,07 | 96,66 | 126,17 |
| 2 | 0,00 | 2,10 | 8,12 | 18,07 | 31,94 | 49,74 | 71,47 | 97,12 | 126,70 |
| 3 | 0,00 | 2,16 | 8,25 | 18,27 | 32,21 | 50,07 | 71,86 | 97,58 | 127,23 |
| 4 | 0,01 | 2,23 | 8,39 | 18,47 | 32,47 | 50,40 | 72,26 | 98,04 | 127,75 |
| 5 | 0,01 | 2,30 | 8,52 | 18,67 | 32,74 | 50,74 | 72,66 | 98,51 | 128,28 |
| 6 | 0,02 | 2,38 | 8,66 | 18,87 | 33,01 | 51,07 | 73,06 | 98,97 | 128,81 |
| 7 | 0,03 | 2,45 | 8,80 | 19,07 | 33,27 | 51,40 | 73,46 | 99,44 | 129,34 |
| 8 | 0,03 | 2,52 | 8,94 | 19,28 | 33,54 | 51,74 | 73,86 | 99,90 | 129,87 |
| 9 | 0,04 | 2,60 | 9,08 | 19,48 | 33,82 | 52,07 | 74,26 | 100,37 | 130,41 |
| 10 | 0,05 | 2,67 | 9,22 | 19,69 | 34,09 | 52,41 | 74,66 | 100,84 | 130,94 |
| 11 | 0,07 | 2,75 | 9,36 | 19,90 | 34,36 | 52,75 | 75,07 | 101,31 | 131,48 |
| 12 | 0,08 | 2,83 | 9,50 | 20,11 | 34,64 | 53,09 | 75,47 | 101,78 | 132,01 |
| 13 | 0,09 | 2,91 | 9,65 | 20,32 | 34,91 | 53,43 | 75,88 | 102,25 | 132,55 |
| 14 | 0,11 | 2,99 | 9,79 | 20,53 | 35,19 | 53,77 | 76,29 | 102,72 | 133,09 |
| 15 | 0,12 | 3,07 | 9,94 | 20,74 | 35,46 | 54,12 | 76,70 | 103,20 | 133,63 |
| 16 | 0,14 | 3,15 | 10,09 | 20,95 | 35,74 | 54,46 | 77,10 | 103,67 | 134,17 |
| 17 | 0,16 | 3,23 | 10,24 | 21,17 | 36,02 | 54,81 | 77,51 | 104,15 | 134,71 |
| 18 | 0,18 | 3,32 | 10,39 | 21,38 | 36,30 | 55,15 | 77,92 | 104,63 | 135,25 |
| 19 | 0,20 | 3,40 | 10,54 | 21,60 | 36,59 | 55,50 | 78,34 | 105,10 | 135,79 |
| 20 | 0,22 | 3,49 | 10,69 | 21,82 | 36,87 | 55,85 | 78,75 | 105,58 | 136,34 |
| 21 | 0,24 | 3,58 | 10,84 | 22,03 | 37,15 | 56,20 | 79,17 | 106,06 | 136,88 |
| 22 | 0,26 | 3,67 | 11,00 | 22,25 | 37,44 | 56,55 | 79,58 | 106,55 | 137,43 |
| 23 | 0,29 | 3,76 | 11,15 | 22,48 | 37,72 | 56,90 | 80,00 | 107,03 | 137,98 |
| 24 | 0,31 | 3,85 | 11,31 | 22,70 | 38,01 | 57,25 | 80,42 | 107,51 | 138,53 |
| 25 | 0,34 | 3,94 | 11,47 | 22,92 | 38,30 | 57,61 | 80,84 | 108,00 | 139,08 |
| 26 | 0,37 | 4,03 | 11,63 | 23,14 | 38,59 | 57,96 | 81,26 | 108,48 | 139,63 |
| 27 | 0,40 | 4,13 | 11,79 | 23,37 | 38,88 | 58,32 | 81,68 | 108,97 | 140,18 |
| 28 | 0,43 | 4,22 | 11,95 | 23,60 | 39,17 | 58,68 | 82,10 | 109,46 | 140,74 |
| 29 | 0,46 | 4,32 | 12,11 | 23,82 | 39,47 | 59,03 | 82,53 | 109,95 | 141,29 |
| 30 | 0,49 | 4,42 | 12,27 | 24,05 | 39,76 | 59,39 | 82,95 | 110,44 | 141,85 |
| 31 | 0,52 | 4,52 | 12,44 | 24,28 | 40,05 | 59,76 | 83,38 | 110,93 | 142,40 |
| 32 | 0,56 | 4,62 | 12,60 | 24,51 | 40,35 | 60,15 | 83,81 | 111,42 | 142,96 |
| 33 | 0,59 | 4,72 | 12,77 | 24,74 | 40,65 | 60,48 | 84,23 | 111,91 | 143,52 |
| 34 | 0,63 | 4,82 | 12,94 | 24,98 | 40,95 | 60,84 | 84,66 | 112,41 | 144,08 |
| 35 | 0,67 | 4,92 | 13,10 | 25,21 | 41,25 | 61,21 | 85,09 | 112,90 | 144,64 |
| 36 | 0,71 | 5,03 | 13,27 | 25,45 | 41,55 | 61,57 | 85,52 | 113,40 | 145,20 |
| 37 | 0,75 | 5,13 | 13,44 | 25,68 | 41,85 | 61,94 | 85,96 | 113,90 | 145,77 |
| 38 | 0,79 | 5,24 | 13,62 | 25,92 | 42,15 | 62,31 | 86,39 | 114,40 | 146,33 |
| 39 | 0,83 | 5,35 | 13,79 | 26,16 | 42,45 | 62,68 | 86,82 | 114,90 | 146,90 |
| 40 | 0,87 | 5,45 | 13,96 | 26,40 | 42,76 | 63,05 | 87,26 | 115,40 | 147,46 |
| 41 | 0,92 | 5,56 | 14,14 | 26,64 | 43,06 | 63,42 | 87,70 | 115,90 | 148,03 |
| 42 | 0,96 | 5,67 | 14,31 | 26,88 | 43,37 | 63.79 | 88,13 | 116,40 | 148,60 |
| 43 | 1,01 | 5,79 | 14,49 | 27,12 | 43,68 | 64,16 | 88,57 | 116,91 | 149,17 |
| 44 | 1,06 | 5,90 | 14,67 | 27,37 | 43,99 | 64,54 | 89,01 | 117,41 | 149,74 |
| 45 | 1,10 | 6,01 | 14,85 | 27,61 | 44,30 | 64,91 | 89,46 | 117,92 | 150,31 |
| 46 | 1,15 | 6,13 | 15,03 | 27,86 | 44,61 | 65,29 | 89,90 | 118,43 | 150,88 |
| 47 | 1,20 | 6,24 | 15,21 | 28,10 | 44,92 | 65,67 | 90,34 | 118,94 | 151,46 |
| 48 | 1,26 | 6,36 | 15,39 | 28,35 | 45,24 | 66,05 | 90,79 | 119,45 | 152,03 |
| 49 | 1,31 | 6,48 | 15,58 | 28,60 | 45,55 | 66,43 | 91,23 | 119,96 | 152,61 |
| 50 | 1,36 | 6,60 | 15,76 | 28,85 | 45,87 | 66,81 | 91,68 | 120,47 | 153,19 |
| 51 | 1,42 | 6,72 | 15,95 | 29,10 | 46,18 | 67,19 | 92,13 | 120,98 | 153,77 |
| 52 | 1,48 | 6,84 | 16,14 | 29,36 | 46,50 | 67,58 | 92,57 | 121,50 | 154,35 |
| 53 | 1,53 | 6,96 | 16,32 | 29,61 | 46,82 | 67,96 | 93,02 | 122,01 | 154,93 |
| 54 | 1,59 | 7,09 | 16,51 | 29,86 | 47,14 | 68,35 | 93,47 | 122,53 | 155,51 |
| 55 | 1,65 | 7,21 | 16,70 | 30,12 | 47,46 | 68,73 | 93,93 | 123,05 | 156,09 |
| 56 | 1,71 | 7,34 | 16,89 | 30,38 | 47,79 | 69,12 | 94,38 | 123,57 | 156,68 |
| 57 | 1,77 | 7,47 | 17,08 | 30,64 | 48,11 | 69,51 | 94,83 | 124,09 | 157,26 |
| 58 | 1,83 | 7,59 | 17,28 | 30,89 | 48,43 | 69,90 | 95,29 | 124,61 | 157,85 |
| 59 | 1,90 | 7,72 | 17,48 | 31,15 | 48,76 | 70,29 | 95,75 | 125,13 | 158,43 |

# Suite de la Table X.

| Séc. | 9′ | 10 | 11′ | 12′ | 13′ | 14′ | 15′ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 159″02 | 196″32 | 237″54 | 282″68 | 331″71 | 384″73 | 441″63 |
| 1 | 159,61 | 196,97 | 238,29 | 283,46 | 332,59 | 385,64 | 442,61 |
| 2 | 160,20 | 197,63 | 238,98 | 284,25 | 333,44 | 386,56 | 443,59 |
| 3 | 160,79 | 198,29 | 239,70 | 285,04 | 334,30 | 387,48 | 444,58 |
| 4 | 161,39 | 198,94 | 240,42 | 285,83 | 335,15 | 388,40 | 445,56 |
| 5 | 161,98 | 199,60 | 241,15 | 286,62 | 336,01 | 389,32 | 446,54 |
| 6 | 162,58 | 200,26 | 241,87 | 287,41 | 336,86 | 390,24 | 447,53 |
| 7 | 163,17 | 200,93 | 242,60 | 288,20 | 337,72 | 391,16 | 448,52 |
| 8 | 163,77 | 201,59 | 243,33 | 288,99 | 338,58 | 392,09 | 449,51 |
| 9 | 164,37 | 202,25 | 244,06 | 289,79 | 339,44 | 393,01 | 450,50 |
| 10 | 164,97 | 202,92 | 244,79 | 290,58 | 340,30 | 393,94 | 451,49 |
| 11 | 165,57 | 203,58 | 245,52 | 291,38 | 341,16 | 394,86 | 452,48 |
| 12 | 166,17 | 204,25 | 246,26 | 292,18 | 342,02 | 395,79 | 453,48 |
| 13 | 166,77 | 204,92 | 246,99 | 292,98 | 342,89 | 396,72 | 454,47 |
| 14 | 167,37 | 205,59 | 247,72 | 293,78 | 343,75 | 397,65 | 455,47 |
| 15 | 167,98 | 206,26 | 248,46 | 294,58 | 344,62 | 398,58 | 456,47 |
| 16 | 168,58 | 206,93 | 249,19 | 295,38 | 345,49 | 399,52 | 457,46 |
| 17 | 169,19 | 207,60 | 249,93 | 296,18 | 346,36 | 400,46 | 458,46 |
| 18 | 169,80 | 208,27 | 250,67 | 296,99 | 347,23 | 401,39 | 459,46 |
| 19 | 170,41 | 208,95 | 251,41 | 297,79 | 348,10 | 402,32 | 460,47 |
| 20 | 171,02 | 209,62 | 252,15 | 298,60 | 348,97 | 403,26 | 461,47 |
| 21 | 171,63 | 210,30 | 252,89 | 299,40 | 349,84 | 404,20 | 462,47 |
| 22 | 172,24 | 210,98 | 253,63 | 300,21 | 350,71 | 405,14 | 463,48 |
| 23 | 172,86 | 211,66 | 254,38 | 301,02 | 351,59 | 406,08 | 464,48 |
| 24 | 173,47 | 212,34 | 255,12 | 301,83 | 352,46 | 407,02 | 465,49 |
| 25 | 174,09 | 213,02 | 255,87 | 302,65 | 353,34 | 407,96 | 466,50 |
| 26 | 174,70 | 213,70 | 256,62 | 303,46 | 354,22 | 408,90 | 467,50 |
| 27 | 175,32 | 214,38 | 257,37 | 304,27 | 355,10 | 409,85 | 468,51 |
| 28 | 175,94 | 215,07 | 258,12 | 305,09 | 355,98 | 410,79 | 469,52 |
| 29 | 176,56 | 215,75 | 258,87 | 305,90 | 356,86 | 411,74 | 470,54 |
| 30 | 177,18 | 216,44 | 259,62 | 306,72 | 357,74 | 412,69 | 471,55 |
| 31 | 177,80 | 217,12 | 260,37 | 307,54 | 358,63 | 413,64 | 472,56 |
| 32 | 178,42 | 217,81 | 261,12 | 308,36 | 359,51 | 414,59 | 473,58 |
| 33 | 179,05 | 218,50 | 261,88 | 309,18 | 360,40 | 415,54 | 474,60 |
| 34 | 179,68 | 219,19 | 262,64 | 310,00 | 361,28 | 416,49 | 475,61 |
| 35 | 180,30 | 219,89 | 263,39 | 310,82 | 362,17 | 417,44 | 476,63 |
| 36 | 180,93 | 220,58 | 264,15 | 311,65 | 363,06 | 418,40 | 477,65 |
| 37 | 181,56 | 221,27 | 264,91 | 312,47 | 363,95 | 419,35 | 478,67 |
| 38 | 182,19 | 221,97 | 265,67 | 313,30 | 364,84 | 420,31 | 479,69 |
| 39 | 182,82 | 222,66 | 266,43 | 314,12 | 365,74 | 421,27 | 480,72 |
| 40 | 183,45 | 223,36 | 267,20 | 314,95 | 366,63 | 422,23 | 481,74 |
| 41 | 184,09 | 224,06 | 267,96 | 315,78 | 367,52 | 423,19 | 482,77 |
| 42 | 184,72 | 224,76 | 268,72 | 316,61 | 368,42 | 424,15 | 483,79 |
| 43 | 185,35 | 225,46 | 269,49 | 317,44 | 369,32 | 425,11 | 484,82 |
| 44 | 185,99 | 226,16 | 270,26 | 318,27 | 370,21 | 426,07 | 485,85 |
| 45 | 186,63 | 226,86 | 271,03 | 319,11 | 371,11 | 427,04 | 486,88 |
| 46 | 187,27 | 227,57 | 271,79 | 319,94 | 372,01 | 428,00 | 487,91 |
| 47 | 187,91 | 228,27 | 272,57 | 320,78 | 372,91 | 428,97 | 488,94 |
| 48 | 188,55 | 228,98 | 273,34 | 321,62 | 373,81 | 429,93 | 489,97 |
| 49 | 189,19 | 229,69 | 274,11 | 322,45 | 374,72 | 430,90 | 491,01 |
| 50 | 189,83 | 230,40 | 274,88 | 323,29 | 375,62 | 431,87 | 492,04 |
| 51 | 190,47 | 231,11 | 275,66 | 324,13 | 376,53 | 432,84 | 493,08 |
| 52 | 191,12 | 231,81 | 276,43 | 324,97 | 377,43 | 433,82 | 494,11 |
| 53 | 191,76 | 232,53 | 277,21 | 325,82 | 378,34 | 434,79 | 495,15 |
| 54 | 192,41 | 233,24 | 277,99 | 326,66 | 379,25 | 435,76 | 496,19 |
| 55 | 193,06 | 233,95 | 278,77 | 327,50 | 380,16 | 436,74 | 497,23 |
| 56 | 193,71 | 234,67 | 279,55 | 328,35 | 381,07 | 437,71 | 498,27 |
| 57 | 194,36 | 235,38 | 280,33 | 329,20 | 381,98 | 438,69 | 499,32 |
| 58 | 195,02 | 236,10 | 281,11 | 330,04 | 382,90 | 439,67 | 500,36 |
| 59 | 195,67 | 236,82 | 281,89 | 330,89 | 383,81 | 440,65 | 501,40 |

VAL. DE *m*.

| *p* | *m* |
|---|---|
| 5′ 0″ | 0″01 |
| 6. 0 | 01 |
| 30 | 02 |
| 7. 0 | 02 |
| 30 | 03 |
| 8. 0 | 04 |
| 30 | 0,05 |
| 9. 0 | 06 |
| 30 | 08 |
| 10. 0 | 09 |
| 30 | 11 |
| 11. 0 | 14 |
| 20 | 0,15 |
| 40 | 17 |
| 12. 0 | 19 |
| 20 | 22 |
| 40 | 24 |
| 13. 0 | 27 |
| 20 | 0,30 |
| 40 | 33 |
| 14. 0 | 36 |
| 15 | 38 |
| 30 | 41 |
| 40 | 43 |
| 50 | 0,45 |
| 15. 0 | 47 |
| 10 | 49 |
| 20 | 52 |
| 30 | 54 |
| 40 | 56 |
| 50 | 59 |
| 16. 0 | 0,61 |

On a l'équ.

$$m = \frac{2\sin^2\frac{1}{2}p}{\sin 1''}$$

## XI. VALEUR DE *n*.

| D | Boré. + | Aust. + | D | Boré. − |
|---|---|---|---|---|
| 0° | 0,753 | 0,753 | 49 | 0,001 |
| 1 | 741 | 764 | 50 | 032 |
| 2 | 730 | 776 | 51 | 064 |
| 3 | 718 | 787 | 52 | 096 |
| 4 | 707 | 799 | 53 | 121 |
| 5 | 695 | 810 | 54 | 153 |
| 6 | 0,684 | 0,822 | 55 | 0,187 |
| 7 | 672 | 834 | 56 | 22[illegible] |
| 8 | 660 | 845 | 57 | 261 |
| 9 | 649 | 857 | 58 | 301 |
| 10 | 637 | 869 | 59 | 343 |
| 11 | 625 | 881 | 60 | 385 |
| 12 | 0,613 | 0,893 | 61 | 0,435 |
| 13 | 601 | 905 | 62 | 485 |
| 14 | 589 | 917 | 63 | 53[illegible] |
| 15 | 576 | 929 | 64 | 59[illegible] |
| 16 | 564 | 942 | 65 | 659 |
| 17 | 552 | 954 | 66 | 720 |
| 18 | 0,539 | 0,967 | 67 | 0,798 |
| 19 | 526 | 979 | 68 | 870 |
| 20 | 513 | 992 | 69 | 962 |
| 21 | 500 | 1,006 | 70 | 1,056 |
| 22 | 487 | 019 | 71 | 15[illegible] |
| 23 | 474 | 032 | 72 | 273 |
| 24 | 0,460 | 1,046 | 73 | 1,400 |
| 25 | 446 | 060 | 74 | 543 |
| 26 | 432 | 074 | 75 | 70[illegible] |
| 27 | 417 | 088 | 76 | 887 |
| 28 | 403 | 103 | 77 | 2,098 |
| 29 | 388 | 118 | 78 | 2,344 |
| 30 | 0,373 | 1,133 | 79 | 2,633 |
| 31 | 357 | 148 | 80 | 2,98[illegible] |
| 32 | 341 | 164 | 81 | 3,403 |
| 33 | 325 | 180 | 82 | 3,93[illegible] |
| 34 | 309 | 197 | 83 | 4,608 |
| 35 | 292 | 214 | 84 | 5,510 |
| 36 | 0,275 | 1,231 | 85 | 8,523 |
| 37 | 257 | 249 | 86 | 8,660 |
| 38 | 239 | 267 | 87 | 11,511 |
| 39 | 220 | 286 | 88 | 28,096 |
| 40 | 201 | 305 | 89 | 36,956 |
| 41 | 181 | 325 | | |
| 42 | 0,160 | | | |
| 43 | 139 | | | |
| 44 | 117 | | | |
| 45 | 095 | | | |
| 46 | 071 | | | |
| 47 | 047 | | | |
| 48 | 0,022 | | | |

Pour régler la lun. méridienne, on a l'équat.

$$n = \frac{\sin(l - D)}{\cos D}.$$

*Voyez* p. 168.

## XII. PARALLAXE ☉ pour le 1ᵉʳ j. du mois.

| Dist. zénit. | Janv. | Févr. Déc. | Mars. Nov. | Avr. Oct. | Mai. Sept. | Juin. Août. | Juill. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 10° | 1"55 | 1"54 | 1"53 | 1"52 | 1"51 | 1"50 | 1,50 |
| 11 | 1,71 | 1,70 | 1,69 | 1,68 | 1,66 | 1,65 | ,65 |
| 12 | 1,86 | 1,85 | 1,84 | 1,83 | 1,81 | 1,80 | 1,80 |
| 13 | 2,02 | 2,01 | 1,99 | 1,98 | 1,96 | 1,95 | 1,95 |
| 14 | 2,17 | 2,16 | 2,14 | 2,13 | 2,11 | 2,10 | 2,09 |
| 15 | 2,32 | 2,31 | 2,29 | 2,28 | 2,26 | 2,25 | 2,24 |
| 16 | 2,47 | 2,46 | 2,44 | 2,43 | 2,41 | 2,39 | 2,38 |
| 17 | 2,62 | 2,61 | 2,59 | 2,58 | 2,56 | 2,54 | 2,53 |
| 18 | 2,77 | 2,76 | 2,74 | 2,72 | 2,70 | 2,68 | 2,67 |
| 19 | 2,92 | 2,91 | 2,89 | 2,87 | 2,85 | 2,83 | 2,82 |
| 20 | 3,06 | 3,05 | 3,03 | 3,01 | 2,99 | 2,97 | 2,95 |
| 21 | 3,21 | 3,20 | 3,18 | 3,16 | 3,13 | 3,11 | 3,10 |
| 22 | 3,35 | 3,34 | 3,32 | 3,30 | 3,27 | 3,25 | 3,24 |
| 23 | 3,50 | 3,49 | 3,47 | 3,44 | 3,41 | 3,39 | 3,38 |
| 24 | 3,64 | 3,63 | 3,61 | 3,58 | 3,55 | 3,53 | 3,52 |
| 26 | 3,92 | 3,91 | 3,89 | 3,86 | 3,83 | 3,80 | 3,79 |
| 28 | 4,20 | 4,19 | 4,16 | 4,13 | 4,10 | 4,07 | 4,06 |
| 30 | 4,47 | 4,46 | 4,43 | 4,40 | 4,36 | 4,33 | 4,32 |
| 32 | 4,74 | 4,73 | 4,70 | 4,66 | 4,63 | 4,59 | 4,58 |
| 34 | 5,00 | 4,99 | 4,96 | 4,92 | 4,88 | 4,84 | 4,83 |
| 36 | 5,26 | 5,25 | 5,21 | 5,17 | 5,13 | 5,09 | 5,08 |
| 38 | 5,51 | 5,50 | 5,46 | 5,42 | 5,37 | 5,33 | 5,32 |
| 40 | 5,75 | 5,74 | 5,70 | 5,66 | 5,61 | 5,57 | 5,56 |
| 42 | 5,99 | 5,97 | 5,93 | 5,88 | 5,84 | 5,80 | 5,79 |
| 44 | 6,22 | 6,20 | 6,16 | 6,11 | 6,06 | 6,02 | 6,01 |
| 46 | 6,44 | 6,42 | 6,38 | 6,33 | 6,28 | 6,23 | 6,22 |
| 48 | 6,65 | 6,64 | 6,59 | 6,54 | 6,49 | 6,44 | 6,43 |
| 50 | 6,85 | 6,84 | 6,79 | 6,74 | 6,69 | 6,64 | 6,62 |
| 52 | 7,05 | 7,04 | 6,99 | 6,93 | 6,88 | 6,83 | 6,82 |
| 54 | 7,24 | 7,22 | 7,17 | 7,11 | 7,06 | 7,01 | 7,00 |
| 56 | 7,42 | 7,40 | 7,35 | 7,29 | 7,23 | 7,18 | 7,17 |
| 58 | 7,59 | 7,57 | 7,52 | 7,46 | 7,40 | 7,35 | 7,33 |
| 60 | 7,75 | 7,73 | 7,68 | 7,62 | 7,56 | 7,51 | 7,49 |
| 62 | 7,90 | 7,88 | 7,83 | 7,77 | 7,71 | 7,65 | 7,63 |
| 64 | 8,04 | 8,03 | 7,97 | 7,91 | 7,85 | 7,79 | 7,77 |
| 66 | 8,17 | 8,16 | 8,10 | 8,04 | 7,97 | 7,92 | 7,90 |
| 68 | 8,30 | 8,28 | 8,22 | 8,16 | 8,09 | 8,04 | 8,02 |
| 70 | 8,41 | 8,39 | 8,33 | 8,27 | 8,20 | 8,15 | 8,13 |
| 72 | 8,51 | 8,49 | 8,44 | 8,37 | 8,30 | 8,25 | 8,23 |
| 74 | 8,60 | 8,58 | 8,53 | 8,46 | 8,39 | 8,33 | 8,31 |
| 76 | 8,68 | 8,66 | 8,61 | 8,54 | 8,47 | 8,41 | 8,39 |
| 78 | 8,75 | 8,73 | 8,67 | 8,61 | 8,54 | 8.48 | 8,46 |
| 80 | 8,81 | 8,79 | 8,73 | 8,67 | 8,60 | 8,54 | 8.52 |
| 82 | 8,86 | 8,84 | 8,78 | 8,71 | 8,64 | 8,58 | 8,56 |
| 84 | 8,90 | 8,88 | 8,82 | 8,75 | 8,68 | 8,62 | 8,60 |
| 86 | 8,92 | 8,90 | 8,84 | 8,77 | 8,70 | 8,64 | 8,62 |
| 88 | 8,94 | 8,92 | 8,86 | 8,79 | 8,72 | 8,66 | 8,64 |
| 90 | 8,95 | 8,93 | 8,87 | 8,80 | 8,73 | [illegible] | 8,65 |

# TABLE XIII. Pour trouver l'heure de la haute mer.

ARGUMENS. *Parallaxe horizontale de la Lune et heure de son passage au méridien.*

| ☾ pass. méridien. | ☾ *périgée* par. 60′. | Parall. 61′. | Parall. 59′. | Parall. 58′. | ☾ *moy. dist.* par. 57′. | Parall. 56′. | Parall. 55′. | ☾ *apogée* par. 54′. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 12h ou 0h | — 3′7 | — 2′8 | — 1′9 | — 1′0 | 0′0 | + 1′8 | + 3′7 | + 5′6 |
| 20′ | — 8,2 | — 7,5 | — 6,8 | — 6,1 | — 5,4 | — 4,0 | — 2,6 | — 1,1 |
| 40′ | —12,6 | —12,2 | —11,7 | —11,2 | — 10,7 | — 9,7 | — 8,7 | — 7,8 |
| 13h ou 1h | —17,5 | —17,3 | —17,0 | —16,8 | — 16,6 | —16,1 | —15,6 | —15,1 |
| 20′ | —22,3 | —22,3 | —22,3 | —22,3 | — 22,3 | —22,3 | —22,3 | —22,3 |
| 40′ | —27,0 | —27,4 | —27,5 | —27,8 | — 28,0 | —28,5 | —28,9 | —29,4 |
| 14h ou 2h | —31,9 | —32,4 | —32,8 | —33,3 | — 33,8 | —34,8 | —35,7 | —36,7 |
| 20′ | —36,3 | —37,1 | —37,8 | —38,5 | — 39,2 | —40,6 | —42,0 | —43,4 |
| 40′ | —40,8 | —41,8 | —42,7 | —43,6 | — 44,5 | —46,3 | —48,2 | —50,1 |
| 15h ou 3h | —45,1 | —46,3 | —47,4 | —48,6 | — 49,7 | —52,0 | —54,2 | —56,5 |
| 20′ | —49,2 | —50,6 | —51,9 | —53,2 | — 54,5 | —57,2 | —59,9 | —62,6 |
| 40′ | —52,8 | —54,3 | —55,8 | —57,4 | — 58,9 | —61,9 | —64,9 | —68,9 |
| 16h ou 4h | —56,0 | —57,7 | —59,3 | —61,0 | — 62,7 | —66,0 | —69,4 | —72,8 |
| 20′ | —58,6 | —60,8 | —62,2 | —64,1 | — 65,9 | —69,5 | —73,1 | —76,8 |
| 40′ | —60,5 | —62,4 | —64,3 | —66,2 | — 68,2 | —72,0 | —75,8 | —79,6 |
| 17h ou 5h | —61,5 | —63,5 | —65,5 | —67,4 | — 69,4 | —73,3 | —77,2 | —81,1 |
| 20′ | —61,3 | —63,3 | —65,2 | —67,2 | — 69,1 | —73,0 | —76,9 | —80,8 |
| 40′ | —58,1 | —59,9 | —61,7 | —63,5 | — 65,3 | —68,9 | —72,5 | —76,1 |
| 18h ou 6h | —56,2 | —57,9 | —59,6 | —61,3 | — 62,9 | —66,3 | —69,7 | —73,1 |
| 20′ | —48,6 | —49,9 | —51,2 | —52,6 | — 53,9 | —56,5 | —59,2 | —61,8 |
| 40′ | —42,9 | —43,9 | —44,9 | —46,0 | — 47,0 | —49,0 | —51,1 | —53,2 |
| 19h ou 7h | —32,1 | —32,6 | —33,1 | —33,6 | — 34,0 | —35,0 | —36,0 | —37,0 |
| 20′ | —22,3 | —22,3 | —22,3 | —22,3 | — 22,3 | —22,3 | —22,3 | —22,3 |
| 40′ | —12,5 | —12,0 | —11,5 | —11,0 | — 10,5 | — 9,5 | — 8,5 | — 7,6 |
| 20h ou 8h | — 1,7 | — 0,7 | + 0,4 | + 1,5 | + 2,5 | + 4,5 | + 6,5 | + 8,6 |
| 20′ | + 4,1 | + 5,4 | + 6,7 | + 8,0 | + 9,3 | +12,0 | +14,6 | +17,3 |
| 40′ | +11,6 | +13,3 | +15,0 | +16,7 | + 18,4 | +21,8 | +25,2 | +28,6 |
| 21h ou 9h | +13,6 | +15,4 | +17,2 | +19,0 | + 20,7 | +24,3 | +27,9 | +31,5 |
| 20′ | +16,8 | +18,8 | +20,7 | +22,6 | + 21,5 | +28,5 | +32,4 | +36,3 |
| 40′ | +17,0 | +18,9 | +20,9 | +22,8 | + 24,8 | +28,7 | +32,6 | +36,6 |
| 22h ou 10h | +16,0 | +17,9 | +19,8 | +21,7 | + 23,6 | +27,4 | +31,2 | +35,1 |
| 20′ | +14,1 | +15,9 | +17,7 | +19,5 | + 21,3 | +24,8 | +28,4 | +32,2 |
| 40′ | +11,4 | +13,1 | +14,8 | +16,5 | + 18,2 | +21,5 | +24,9 | +28,3 |
| 23h ou 11h | + 8,2 | + 9,8 | +11,3 | +12,8 | + 14,3 | +17,3 | +20,4 | +23,5 |
| 20′ | + 4,6 | + 6,0 | + 7,3 | + 8,7 | + 10,0 | +12,7 | +15,4 | +18,1 |
| 40′ | + 0,6 | + 1,7 | + 2,8 | + 4,0 | + 5,1 | + 7,1 | + 9,7 | +12,0 |
| 24h ou 12h | — 3,7 | — 2,8 | — 1,9 | — 1,0 | 0,0 | + 1,8 | [illegible] | + 5,6 |

## Époque : *Minuit temps moyen de Paris, qui commence l'année civile.*

| ANNÉES. | LONGIT. MOY. | ANOM. MOY. r. | A | B | C | N |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1830 | 9ˢ 10° 7′ 40″6 | 0ˢ 0° 6′ 56″ | 889 | 480 | 211 | 519 |
| 31 | 9.53.30,2 | 11.29.51.35 | 514 | 565 | 571 | 573 |
| 32 | 9.39.10,7 | 11.29.36.14 | 139 | 649 | 931 | 627 |
| 33 | 10.23.59,6 | 0. 0.20. 1 | 766 | 733 | 325 | 681 |
| 34 | 10. 9.40,1 | 0. 0. 4.40 | 391 | 817 | 685 | 734 |
| 35 | 9.55.20,6 | 11.29.49.19 | 016 | 901 | 045 | 788 |
| 36 | 9.41. 1,2 | 11.29.33.58 | 641 | 985 | 405 | 842 |
| 37 | 10.25.50,0 | 0. 0.17.45 | 268 | 069 | 799 | 895 |
| 38 | 10.11.30,6 | 0. 0. 2.24 | 893 | 154 | 159 | 949 |
| 39 | 9.57.11,1 | 11.29.47. 3 | 518 | 239 | 519 | 003 |
| 1840 | 9.42.51,6 | 11.29.31.42 | 143 | 324 | 879 | 056 |
| Mouvem. pour 30 j. | 29°34′ 9″90 | 29°34′ 4″ 8 | 51,3 | 924,7 | 16,4 | 4,4 |
| 10 j. | 9.51.23,30 | 9.51.22, 6 | 17,1 | −25,0 | 338,8 | 1,5 |
| 1 j. | 0.59. 8,33 | 0.59. 8, 2 | 1,71 | − 2,5 | 33,9 | 0,1 |
| 12 h. | 0.29.34,16 | 0.29.34,08 | 0,85 | − 1,3 | 17,0 | 0,0 |
| 1 h. | 0. 2.27,85 | 0. 2.27,84 | 0,07 | − 0,1 | 1,4 | 0,0 |

### PERTURBATIONS.

| ARG. | A | B | C | ARG. | ARG. | A | B | C | ARG. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0 | −0″00 | −0″00 | +0″06 | 1000 | 250 | + 6″43 | −7″10 | +7″50 | 750 |
| 20 | −1,27 | −0,23 | +0,87 | 980 | 260 | + 7,26 | −7,44 | +7,49 | 740 |
| 40 | −2,25 | −0,51 | +1,87 | 960 | 280 | + 8,63 | −7,96 | +7,37 | 720 |
| 60 | −3,01 | −0,83 | +2,76 | 940 | 300 | + 9,63 | −8,28 | +7,13 | 700 |
| 80 | −3,46 | −1,22 | +3,61 | 920 | 320 | +10,28 | −8,44 | +6,79 | 680 |
| 100 | −3,49 | −1,70 | +4,41 | 900 | 340 | +10,52 | −8,35 | +6,33 | 660 |
| 120 | −3,09 | −2,28 | +5,13 | 880 | 360 | +10,30 | −8,01 | +5,78 | 640 |
| 140 | −2,30 | −2,93 | +5,78 | 860 | 380 | + 9,69 | −7,41 | +5,13 | 620 |
| 160 | −1,03 | −3,67 | +6,33 | 840 | 400 | + 8,74 | −6,65 | +4,41 | 600 |
| 180 | +0,47 | −4,45 | +6,79 | 820 | 420 | + 7,35 | −5,60 | +3,61 | 580 |
| 200 | +2,06 | −5,22 | +7,13 | 800 | 440 | + 5,78 | −4,35 | +2,76 | 560 |
| 220 | +3,95 | −6,06 | +7,37 | 780 | 460 | + 4,03 | −3,01 | +1,87 | 540 |
| 240 | +5,65 | −6,78 | +7,49 | 760 | 480 | + 2,11 | −1,54 | +0,87 | 520 |
| 250 | +6,43 | −7,10 | +7,50 | 750 | 500 | + 0,00 | −0,00 | +0,00 | 500 |

Quand l'argument A, B ou C passe 500, il faut prendre le nombre de la table en signe contraire.





## XV. TABLE DE LA LUNE.

Époque : *minuit temps moy. à Paris, qui commence l'année civile.*

| Années. | Longit. moy. | Anom. moy. A. | D = ☾ − ☉. | δ = ☾ − ☊ |
|---|---|---|---|---|
| 1830 | 11ˢ26° 0′11″9 | 11ˢ19°54′ 1″8 | 2ˢ15°52′10″ | 6ˢ 2°58′46″ |
| 31 | 4. 5.23.17,0 | 2.18.37.21,9 | 6.25.29.35 | 11. 1.41.34 |
| 32 | 8.14.46.22,2 | 5.17.20.41,7 | 11. 5. 6.59 | 4. 0.24.22 |
| 33 | 1. 7.20. 2,6 | 8.29. 7.55,8 | 3.26.55.52 | 9 12.20.55 |
| 34 | 5.16.43. 7,8 | 11.27.51.15,8 | 8. 6.33.16 | 2.11. 3.42 |
| 35 | 9.26. 6.12,9 | 2.26.34.35,9 | 0.16.10.41 | 7. 9.46.32 |
| 36 | 2. 5.29.18,2 | 5.25.17.56,0 | 4.25.48. 5 | 0. 8.29.17 |
| 37 | 6.28. 2.58,7 | 9. 7. 5.10,1 | 9.17.36.58 | 5.20.25.50 |
| 38 | 11. 7.26. 4,0 | 0. 5.48.30,2 | 1.27.14.22 | 10.19. 8.38 |
| 39 | 3.16.49. 9,2 | 3. 4.31.50,4 | 6. 6.51.47 | 3.17.51.25 |
| 1840 | 7.26.12.14,6 | 6. 3.15.10,5 | 10.16.29.13 | 8.16.34.13 |
| Mouv. pour 30ʲ | 1. 5.17.30,82 | 1. 1.56.59,09 | 0. 5.43.20,9 | 1. 6.52.49,9 |
| 10ʲ | 4.11.45.50,27 | 4.10.38.59,70 | 4. 1.54.27,0 | 4.12.17.36,7 |
| 1ʰ | 0.13.10.35,03 | 0.13. 3.53,97 | 0.12.11.26,7 | 0.13.13.45,7 |
| 12ʲ | 0. 6.35.17,51 | 0. 6.31.56,98 | 0. 6. 5.43,3 | 0. 6.36.52,9 |
| 1ʰ | 0. 0.32.56,46 | 0. 0.32.39,75 | 0. 0.30.28,6 | 0. 0.33. 4,4 |

## XVI. TABLE DES PLANÈTES.

| | Log A + en secondes | Log B + en secondes | Log C + en secondes | Log D − en secondes | M = | Log N − | Log P − |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ☿ | 4.9262380 | 4.03073 | 3.27697 | 2.88758 | 0,3952827 | $\bar{2}$.893965 | $\bar{3}$.90060 |
| ♀ | 3.4518921 | 1.08814 | • | 2.25720 | 0,7233485 | $\bar{3}$.693680 | $\bar{5}$.22660 |
| ♂ | 4.5846045 | 3.34916 | 2.25566 | 1.73159 | 1,5303161 | $\bar{1}$.151087 | $\bar{3}$.81856 |
| ♃ | 4.2984548 | 2.77720 | 1.39682 | 1.43379 | 5,209912 | 1.438147 | 3.85576 |
| ♄ | 4.3639135 | 2.90809 | 1.59418 | 1.99945 | 9,557276 | $\bar{1}$.721066 | $\bar{2}$.17758 |
| ♅ | 4.2844632 | 2.74924 | 1.44304 | 0.97354 | 19,212091 | 1.951697 | 2.31958 |

Grande inégalité de Jupiter et de Saturne.

| | 1830 | 1831 | 1832 | 1833 | 1834 | 1835 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| ♃ | +18′57″4 | +18′54″5 | +18′51″8 | +18′49″1 | +18′46″4 | +18′43″8 |
| ♄ | −46.10,3 | −46. 3,1 | −45.56,1 | −45.49,2 | −45.42,4 | −45.35,8 |

| Plan. | Révolut. sidérale. | Mouvement moyen en longitude. | | |
|---|---|---|---|---|
| | | En 1 jour. | En 30 jours. | En 365 jours. |
| ☿ | 87,969 2580 | 4° 5′ 32″56 | 122°46′ 16″74 | 53°43′ 3″6 |
| ♀ | 224,700 7869 | 1.36. 7,81 | 48. 3.54,25 | 224.47.29,7 |
| ♂ | 686,979 6458 | 0.31.26,66 | 15.43.19,67 | 191.17. 9,1 |
| ♃ | 4332,584 8212 | 0. 4.59,26 | 1.29.37,80 | 30.20.31,9 |
| ♄ | 10756,219 8174 | 0. 2. 0,59 | 1. 0.17,75 | 12.13.36,1 |
| ♅ | 30686,820 8296 | 0. 0.42,37 | 0.21.11,05 | 4.17.45,1 |

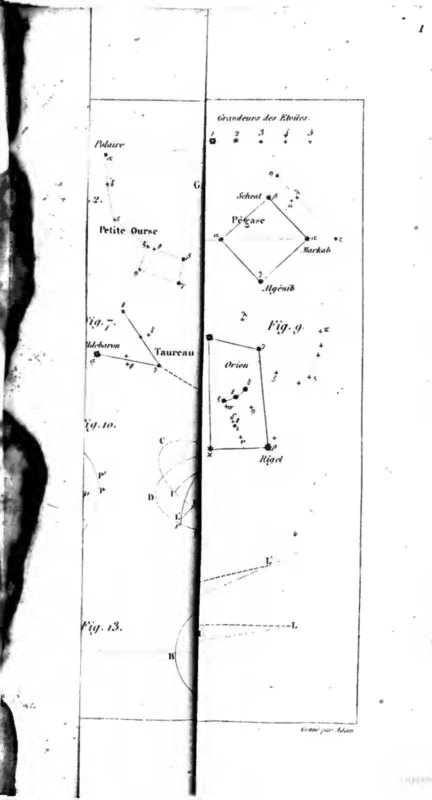
| | Mouvement du périhélie. | | | Mouvement du ☊. | | | Inclin. |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| | En 1 j. | En 30 j. | En 365 j. | En 1 j. | En 30 j. | En 365 j | En 1830 |
| ☿ | 0″153 | 4″60 | 55″94 | 0″116 | 3″48 | 42″26 | 7° 0′ 20″6 |
| ♀ | 0,129 | 3,86 | 46,98 | 0,084 | 2,52 | 30,66 | 3.23.27,1 |
| ♂ | 0,180 | 5,41 | 65,83 | 0,069 | 2,06 | 25,00 | 1.51. 6,2 |
| ♃ | 0,156 | 4,66 | 56,75 | 0,094 | 2,82 | 34,31 | 1.18.44,5 |
| ♄ | 0,190 | 6,33 | 69,41 | 0,084 | 2,53 | 30,67 | 2.29.31,0 |
| ♅ | 0,144 | 4,31 | 52,46 | 0,039 | 1,17 | 14,15 | 0.46.29,3 |

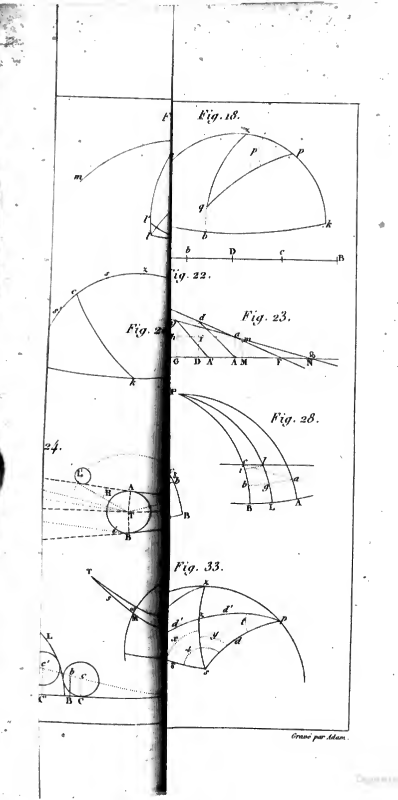
| MERCURE. | | | | VÉNUS. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ans. | Longit. moy. | périh. 2ˢ14° | ☊ 1ˢ16° | Longit. moy. | périh. 4ˢ 9° | ☊ 2ˢ15° |
| 1830 | 10ˢ10°23′ 54″5 | 48′ 7″ | 18′ 13″ | 2ˢ 0°54′ 37″5 | 6′ 36″ | 9′ 18″ |
| 31 | 0. 4. 6.58,1 | 49. 3 | 18.55 | 9.15.42. 7,2 | 7.23 | 9.49 |
| 32 | 1.27.50. 1,7 | 49.59 | 19.37 | 5. 0.29.36,9 | 8.10 | 10.21 |
| 33 | 3.25.38.37,9 | 50.55 | 20.19 | 0.16.53.14,4 | 8.57 | 10.52 |
| 34 | 5.19.21.41,5 | 51.51 | 21. 2 | 8. 1.40.44,1 | 9.44 | 11.23 |
| 35 | 7.13. 4.45,1 | 52.47 | 21.44 | 3.16.28.13,8 | 10.31 | 11.54 |

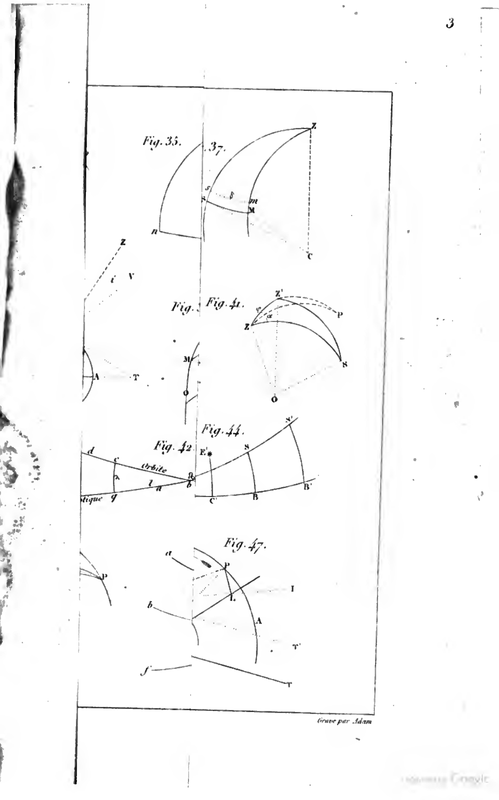
| MARS. | | | | JUPITER. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ans. | Longit. moy. | périh. 11ˢ2° | ☊ 1ˢ18° | Longit. moy. | périh. 11° | ☊ 3ˢ 8° |
| 1830 | 2ˢ 5° 4′ 40″3 | 55′ 46″ | 12′ 8″ | 9ˢ 2°43′ 14″3 | 35′ 59″ | 42′ 54″ |
| 31 | 1.16.21.49,8 | 56.52 | 12.33 | 10. 3. 3.46,3 | 36.56 | 43.28 |
| 32 | 7.27.38.59,2 | 57.58 | 12.58 | 11. 3.24.18,2 | 37.52 | 44. 3 |
| 33 | 2. 9.27.35,3 | 59. 3 | 13.23 | 0. 3.49.49,5 | 38.49 | 44.37 |
| 34 | 6.20.44.44,7 | 60. 9 | 13.48 | 1. 4.10.21,5 | 39.46 | 45.11 |
| 35 | 3. 2. 1.54,1 | 61.55 | 14.13 | 2. 4.30.53,5 | 40.42 | 45.46 |

| SATURNE. | | | | URANUS. | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Ans. | Longit. moy | périh 2ˢ29° | ☊ 3ˢ22° | Longit. moy. | périh 5ˢ17° | ☊ 2ˢ13° |
| 1830 | 4ˢ10° 7′ 35″9 | 43′ 2″ | 11′ 29″ | 10ˢ 2°27′ 9″6 | 56′ 39″ | 6′ 26″ |
| 31 | 4.22.21.11,9 | 44.11 | 12. 0 | 10. 6.45.31,2 | 57.31 | 6.40 |
| 32 | 5. 4.34.48,0 | 45.21 | 12.31 | 10.11. 3.16,4 | 58.24 | 6.54 |
| 33 | 5.16.50.24,7 | 46.30 | 13. 2 | 10.15.21.43,8 | 59.16 | 7. 8 |
| 34 | 5.29. 4. 0,8 | 47.40 | 13.33 | 10.19.39.28,8 | 60. 9 | 7.22 |
| 35 | 6.11.17.36,9 | 48.49 | 14. 3 | 10.23.57.14,0 | 61. 1 | 7.36 |

L'époque est à minuit moy. de Paris, qui sépare le 31 déc. du 1er janvier.


Grandeurs des Etoiles.
1 2 3 4 5
Polaire
2.
Petite Ourse
Scheat
Pégase
Markab
Algénib
Fig. 7.
Aldebaran
Taureau
Fig. 9.
Orion
Rigel
Fig. 10.
Fig. 13.
Gravé par Adam


Fig. 18.
Fig. 22.
Fig. 23.
Fig. 28.
Fig. 33.
Gravé par Adam.




Gravé par Adam

